

Aspecte moderne în proiectarea inginerescă a sistemelor automate.

Prof. dr. ing. Sorin Larionescu – UTCB

În lucrare se prezintă două cazuri în care metodele ingineresti clasice de proiectare a sistemelor automate nu conduc la rezultate satisfăcătoare. Este vorba de folosirea indicatorilor margine de amplificare MA și margine de fază MF și de efectul aproximării Pade de ordinul doi a timpului mort a procesului instalației automatizate asupra stabilității sistemului automat proiectat prin metoda locului rădăcinilor.

Orice sistem tehnic proiectat și executat prezintă riscul, pericolul, inconvenientul posibil, ca performanțele sale să nu coincidă cu cele prevăzute. Riscul tehnic al sistemului depinde de structura sistemului și de incertitudinea asupra valorilor perturbațiilor și elementelor sale componente. O importanță aparte prezintă studiul riscului pentru sistemele automate caracterizate de o structură tip reacție negativă. Acestea prezintă caracteristica remarcabilă a unui risc mai mic decât riscul elementelor componente pe calea directă a sistemului. Un sistem automat se numește robust dacă are un risc (pericol) mic în realizarea stabilității și performanțelor prevăzute în condițiile prezenței unui risc semnificativ al procesului condus. Schema bloc a unui sistem automat modern folosit în instalațiile pentru construcții este prezentată în Fig. 1. Dacă considerăm pentru simplificare că $D1=0$ și $D2=1$ atunci relația dintre ieșirea sistemului $Y(s)$ și cele trei intrări ale sale, referința $R(s)$, perturbația $P(s)$ și zgomotul $N(s)$, este următoarea:

$$Y = \frac{KG}{1+KG} FR + \frac{A-BCG}{1+KGH} P - \frac{KG}{1+KGH} N \quad (1)$$

Se observă că dacă compensatorul perturbației are funcția de transfer $C=A/BG$ atunci influența perturbației este nulă. Din păcate funcțiile de transfer $G(s)$ și în special $A(s)$ nu sunt cunoscute și compensatorul $C(s)$ nu poate fi determinat cu precizie. Tot din relația (1) se constată însă, că dacă compensatorul erorii există și are o funcție de transfer $K(s)$ destul de mare, efectul perturbației este dramatic scăzut chiar în prezența unui risc de necunoaștere a proceselor conduse. Din această cauză vom considera în continuare numai efectul reacției negative în eliminarea perturbației $P(s)$ pe baza schemei bloc din Fig. 2.

Funcția de transfer $H_u(s)$ a sistemului automat din Fig. 2 în regim de urmărire este dată de relația (2).

$$H_u(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} \quad (2)$$

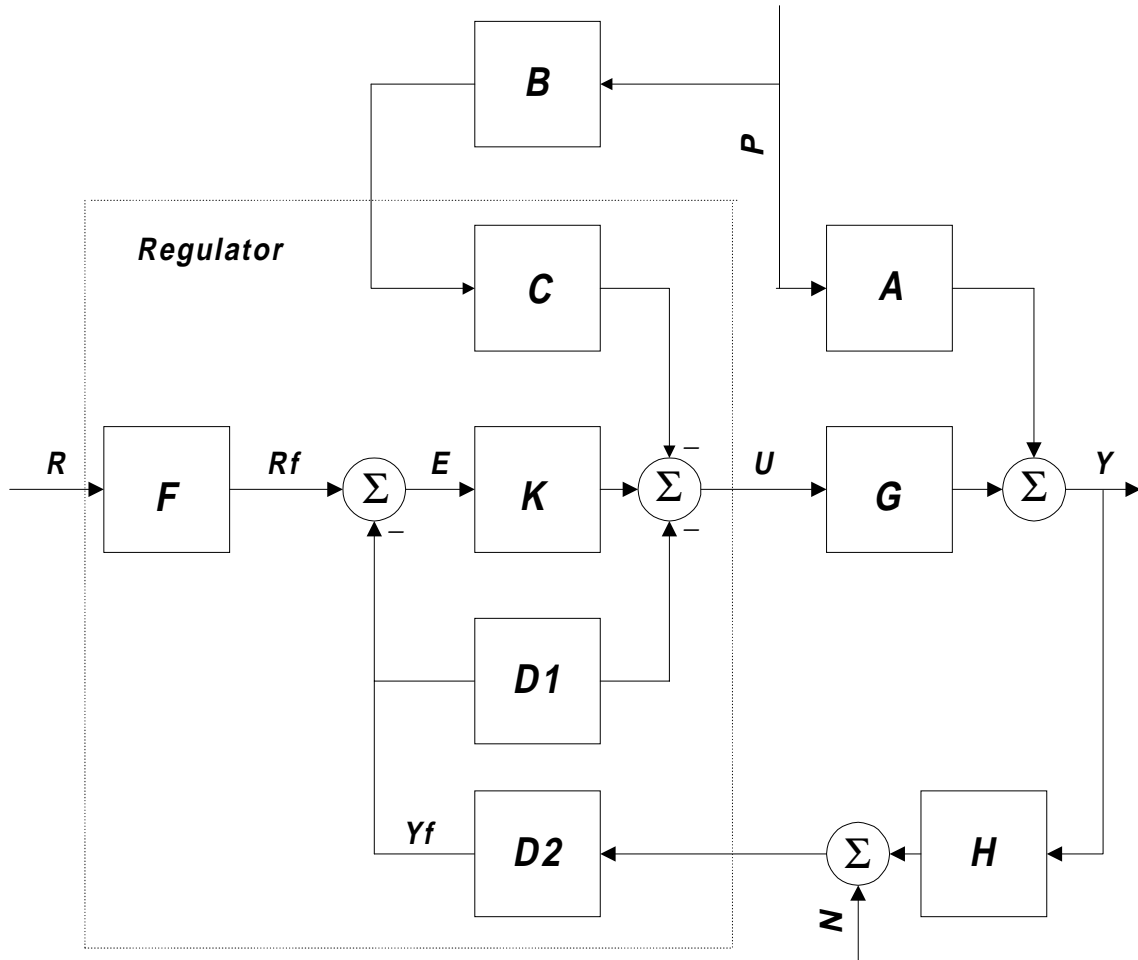


Fig. 1 Schema bloc a unei instalații automatizate

Funcția de sensibilitate $S(s)$ a sistemului automat arată cât de mult se modifică funcția de transfer în regim de urmărire $H_u(s)$ atunci când funcția de transfer a instalației automatizate $G(s)$ își schimbă puțin valoarea cu $dG(s)$. Funcția de sensibilitate este definită de relația (3).

$$S(s) = \frac{\frac{dH_u(s)}{H_u(s)}}{\frac{dG(s)}{G(s)}} = \frac{dH_u}{dG} \frac{G}{H_u} \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă expresia (4) a funcției de sensibilitate $S(s)$.

$$S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (4)$$

în care $L(s) = K(s)G(s)$ este funcția de transfer cu bucla deschisă.

Pe lângă funcția de sensibilitate $S(s)$ se definește și funcția de sensibilitate complementară $T(s)$ a sistemului automat din Fig. 2 cu ajutorul relației (5).

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (5)$$

Se observă că are loc relația (6) între cele două sensibilități.

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (6)$$

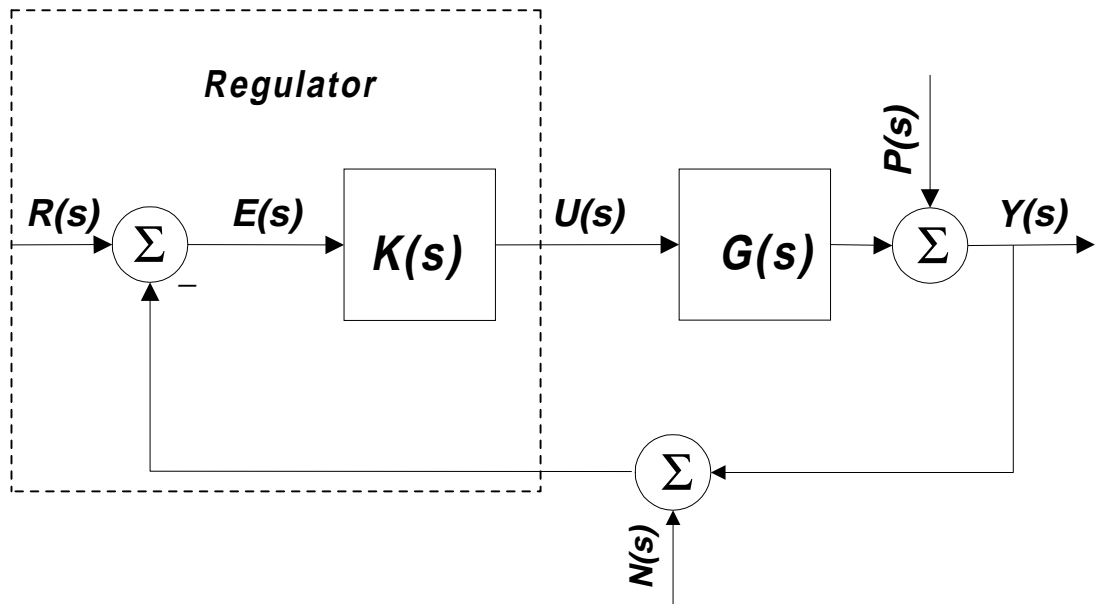


Fig. 2 Schema bloc pentru proiectarea unui sistem automat

Folosind funcțiile de sensibilitate $S(s)$ și $T(s)$ se obțin din (1) ieșirea, eroarea și comanda pentru schema bloc din Fig. 2

$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)P(s) - T(s)N(s) \quad (7)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) - N(s) = S(s)[R(s) - P(s) - N(s)] \quad (8)$$

$$U(s) = K(s)E(s) = K(s)S(s)[R(s) - P(s) - N(s)] \quad (9)$$

Referința $R(s)$, perturbația $P(s)$ și zgomotul $N(s)$ pot fi generate cu ajutorul *aceluiași* model caracterizat de relația (10).

$$v(s) = W(s)v^*(s) \quad (10)$$

în care $v^*(s)$ este transformata Laplace a unui semnal tip,

$W(s)$ – o funcție de transfer proprie fiecărui semnal $R(s)$, $P(s)$ sau $N(s)$.

De exemplu, dacă semnalul tip este impulsul Dirac $\delta(t)$, atunci transformata sa Laplace este $v^*(s)=1$. Pentru $W(s)=1/s$ modelul (10) generează un semnal treaptă iar pentru $W(s)=1/(as+1)$ generează un semnal exponențial.

Dacă se consideră separat¹ regimul de urmărire, reglare² și filtrare atunci eroarea (8) poate fi exprimată într-un mod foarte general prin relația.

$$E(s) = S(s)W(s)v^*(s) \quad (11)$$

Pentru cazul $v^*(s)=1$, analizat mai înainte, eroarea este:

$$E(s) = S(s)W(s) \quad (12)$$

în care $S(s)$ și $W(s)$ sunt funcții de transfer.

O măsură matematică a erorii se poate face cu ajutorul normei H_2 definită de (13) sau a normei H_∞ definită de (14).

$$\|e(t)\|_2 = \left(\int_0^\infty |e(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (13)$$

Norma H_2 este egală cu energia semnalului de eroare.

$$\|e(t)\|_\infty = \sup_t |e(t)| \quad (14)$$

Norma H_∞ a erorii (14) este egală cu valoarea celui mai mare vârf posibil. Se folosește *sup* în loc de *max* pentru că acest vârf poate apare la infinit.

Evaluarea performanțelor se face și în domeniul frecvență și din această cauză există norma H_2 și norma H_∞ a unei funcții de transfer. Dacă considerăm în (7) numai efectul lui P :

$$Y(s) = S(s)P(s) \quad (15)$$

atunci norma H_2 a lui $S(s)$ este

$$\|S\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (16)$$

și poate fi interpretată din (15) drept valoarea eficace a ieșirii Y a sistemului pentru o intrare P de tip zgomot alb. Norma H_∞ a lui $S(s)$ se definește astfel:

$$\|S\|_\infty = \sup_P \frac{\|SP\|_2}{\|P\|_2} \quad (17)$$

¹ Pentru sistemele liniare se poate aplica principiul superpoziției.

² Stabilizare.

Aplicând teorema lui Parseval se obține o formă echivalentă pentru (17):

$$\|S\|_{\infty} = \sup_{\omega} |S(j\omega)| \quad (18)$$

Ultima relație arată că norma H_{∞} a lui $S(s)$ este egală cu valoarea de vârf M_s a răspunsului în frecvență $S(j\omega)$ a sistemului.

Proiectarea inginerescă a sistemelor automate necesită rezolvarea a două probleme: 1) stabilitatea, 2) asigurarea performanțelor impuse.

Abordarea clasică a proiectării ingineresti consideră că cele două probleme sunt rezolvate într-o primă aproximare dacă indicatorii *marginea de amplificare MA* și *marginea de fază³ MF* au valori care satisfac următoarele condiții:

$$MA > 2 \quad (6dB), \quad \text{cel puțin } 1,6 \quad (4dB) \quad (19)$$

$$60^{\circ} > MF > 30^{\circ} \quad (20)$$

. Din păcate există situații în care acești indicatori nu dau informații corecte. Un exemplu va lămurii situația.

În relația (2) să considerăm funcția de transfer (21) pentru partea fixă⁴ a instalației și funcția de transfer (22) pentru compensatorul PID serie cu filtrare⁵.

$$G(s) = \frac{e^{-0,4s}}{(s+1)^4} \quad (21)$$

$$K(s) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} = 1,195 \left(1 + \frac{1}{3,23s} + 2,3s \right) \frac{1}{0,2s + 1} \quad (22)$$

Dacă notăm cu $L(s)$ funcția de transfer a sistemului cu *bucla deschisă* definită în (4), atunci marginea de amplificare *MA* și marginea de fază *MF* pot fi determinate pe diagrama Nyquist a lui $L(j\omega)$ din Fig. 3 .

Marginea de amplificare *MA* este inversul distanței de la origine la punctul de intersecție a hodografului⁶ lui $L(j\omega)$ cu axa reală și reprezintă factorul cu care trebuie înmulțit modulul lui $L(j\omega)$ pentru ca sistemul automat să devină instabil⁷.

³ Rezerva de amplificare, rezerva de fază.

⁴ Elementul de execuție, procesul condus și traductorul.

⁵ Pentru a fi realizabil fizic.

⁶ Curba funcției de transfer gradată în frecvențe (pulsății). Această reprezentare se mai numește și *loc (hodograf) Nyquist*.

⁷ Hodograful lui $L(j\omega)$ să treacă prin punctul de coordonate (-1, j0).

Marginea de fază MF este unghiul dintre axa reală negativă și dreapta care unește originea cu punctul de intersecție a cercului unitar⁸ cu hodograful lui $L(j\omega)$. Marginea de fază reprezintă defazajul suplimentar al lui $L(j\omega)$ pentru ca sistemul automat să devină instabil.

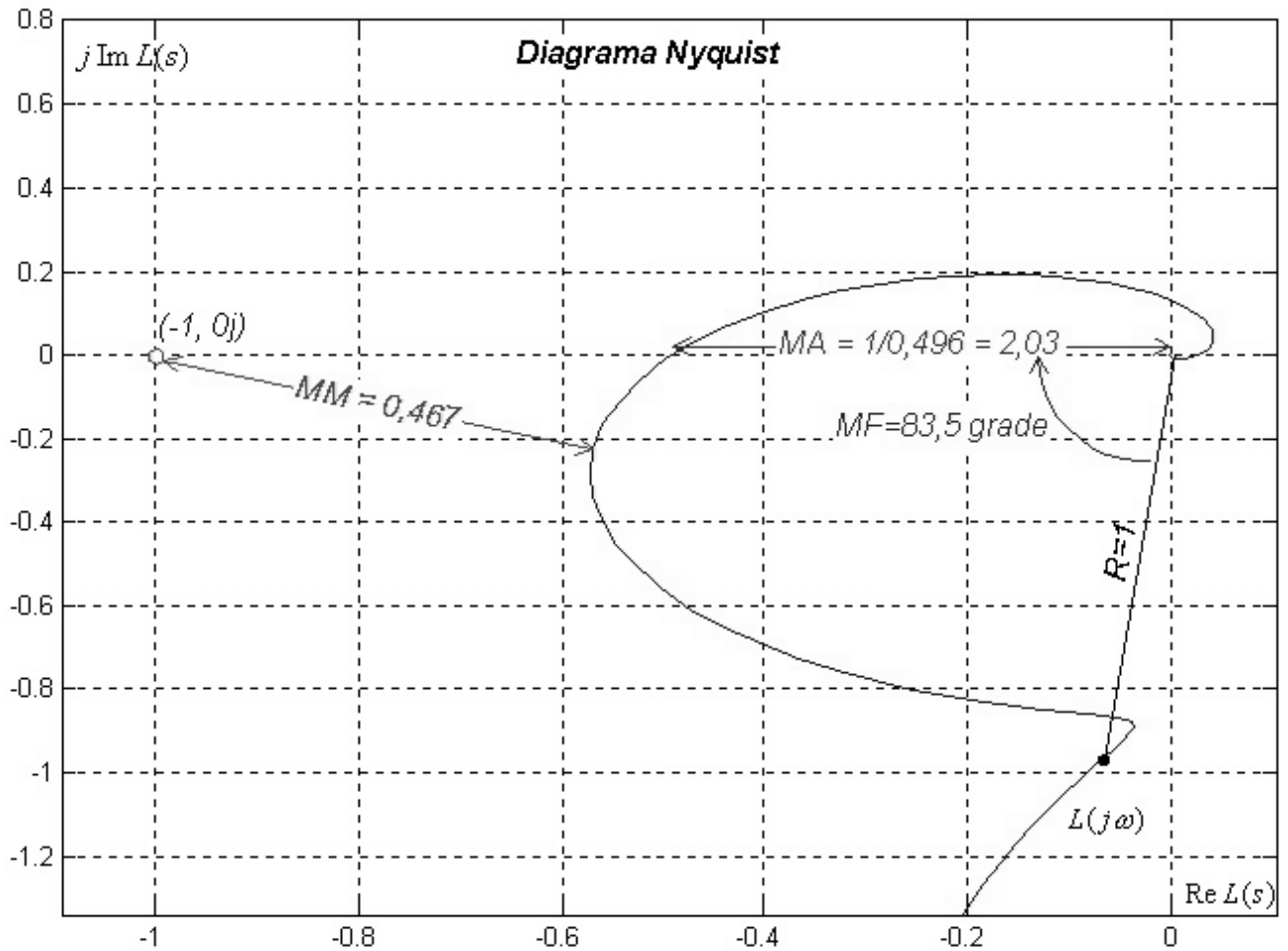


Fig. 3 Determinarea marginii de amplificare MA , marginii de fază MF și a marginii de modul

Pentru exemplul considerat rezultă din Fig. 3 o margine de amplificare $MA=2,03$ și o margine de fază $MF=83,5^\circ$.

Conform regulilor (19) și (20) sistemul automat este bine proiectat. Totuși, se observă în Fig. 3 că hodograful lui $L(j\omega)$ se apropie în mod periculos de *punctul critic* $(-1, j0)$ și sistemul poate deveni instabil.

Abordarea modernă în proiectarea inginerescă a sistemelor automate consideră un indicator mai bun al robusteții stabilității. Acesta este o distanță minimă, numită *margine de modul* MM , dintre hodograful lui $L(j\omega)$ și punctul critic.

⁸ Cercul cu raza $R=1$.

Marginea de modul MM este raza cecului cu centrul în punctul critic $(-1, j0)$ și tangent la hodograful lui $L(j\omega)$. Vectorul care unește punctul critic $(-1, j0)$ cu punctul cel mai apropiat de pe hodograful lui $L(j\omega)$ are modulul dat de relația (23).

$$MM = |1 + L(j\omega)|_{\min} \quad (23)$$

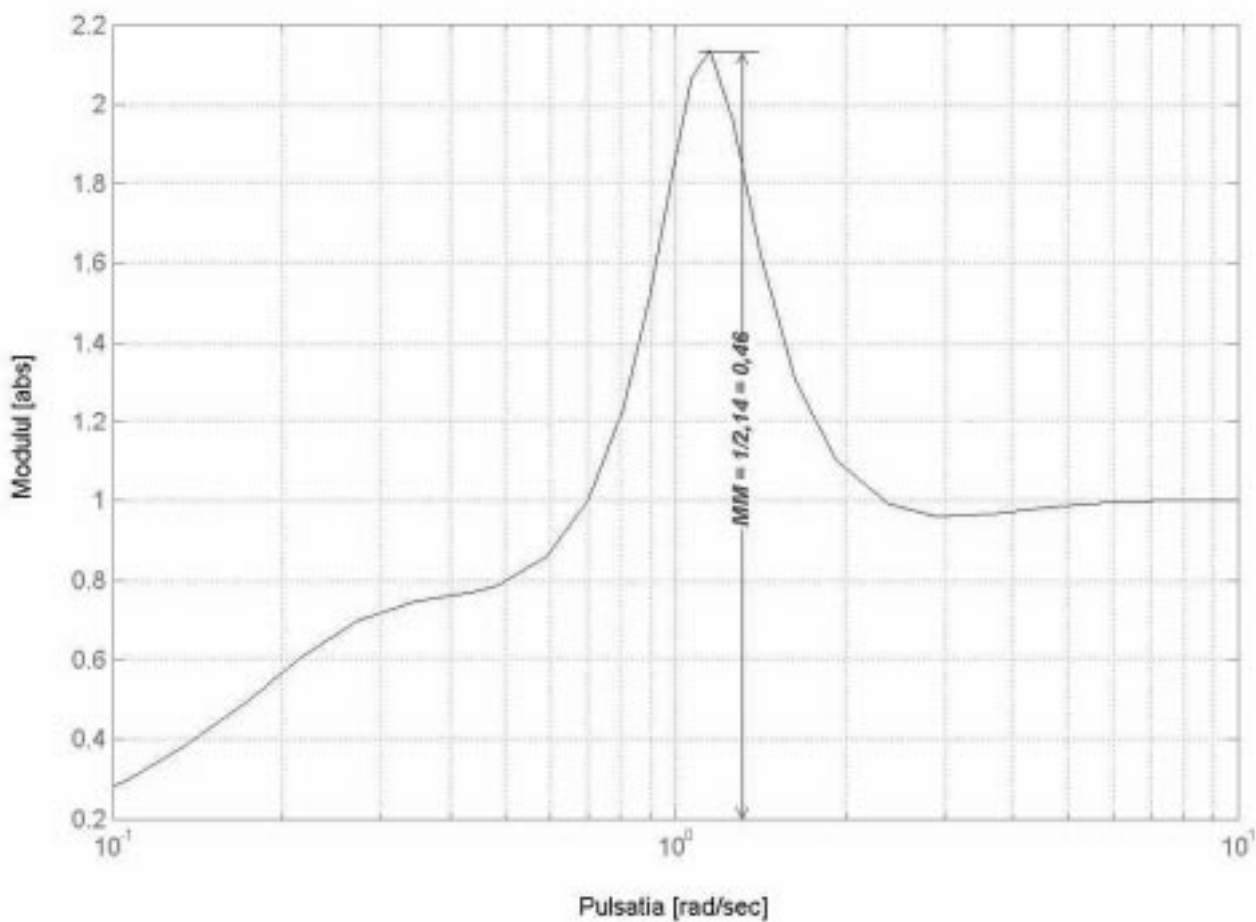


Fig. 4 Modulul funcției de sensibilitate $S(j\omega)$ a sistemului automat cu partea fixă (21) și compensatorul PID (22).

O nouă definiție (24) a marginii de modul MM rezultă din relațiile (4) și (23).

$$MM = \frac{1}{|S(j\omega)|_{\max}} \quad (24)$$

în care $M_s = |S(j\omega)|_{max}$ este valoarea⁹ cea mai mare dintre vârfurile modului lui $S(j\omega)$.

Reducerea sensibilității maxime va conduce la creșterea marginii de modul.

Ca și în cazul marginii de amplificarea sau a marginii de fază există o regulă (25) pentru valoarea marginii de modul MM care asigură robustețea stabilității sistemului automat.

$$MM \geq 0.5 (-6dB) \quad \text{cel puțin} \quad 0,4 (-8dB) \quad (25)$$

Marginea de modul se calculează ușor cu relația (24). Pentru exemplul considerat modulul funcției de sensibilitate este prezentat în Fig. 4. Valoarea sa maximă este $M_s = 2,14$ și deci rezultă din (24) valoarea $MM = 0,467$. Sistemul automat nu îndeplinește condiția (25) și nu este stabil robust. Această concluzie coincide și cu situația vizibilă în Fig. 3.

Marginea de modul este foarte importantă și pentru că face legătura cu criteriul cercului de stabilitate al lui Popov pentru sistemele neliniare.

Condiția de robustețe (25) implică și realizarea condițiilor de robustețe (19) și (20) După cum am văzut din exemplul prezentat reciproca nu este valabilă.

Creșterea unor performanțe ale sistemului automat implică micșorarea robusteței stabilității sale. Marginea de modul este cel mai bun indicator al faptului că o anumită limită a robusteții, de exemplu cea indicată de relația (25), nu este depășită.

Pericolul datorat unui grad de incertitudine în cunoașterea instalației $G(s)$ poate fi aditiv sau multiplicativ. Riscul aditiv $a(j\omega)$ este definit astfel:

$$G(j\omega) = G_m(j\omega) + a(j\omega) \quad (26)$$

în care $G_m(j\omega)$ este modelul instalației.

Pentru înlesnirea proiectării se introduce o constantă dependentă de frecvență $a(\omega)$ astfel încât:

$$|a(j\omega)| \leq a(\omega) \quad (27)$$

Asemănător se definește riscul multiplicativ $l(j\omega)$:

$$G(j\omega) = G_m(j\omega)[1 + l(j\omega)] \quad (28)$$

în care:

$$|l(j\omega)| \leq l(\omega) \quad (29)$$

și apare din nou o constantă $l(\omega)$ dependentă de frecvență introdusă pentru specificarea sarcinilor urmărite la proiectare.

Deoarece ambele descrieri trebuie să fie echivalente este necesar ca:

⁹ Această valoare corespunde normei H_∞ (18) a modulului lui $S(j\omega)$ și se notează cu M_s .

$$l(\omega) = \frac{a(\omega)}{|G_m(j\omega)|} \quad (30)$$

Dacă se cunoaște o margine superioară $l(\omega)$ (29) a incertitudinii modelării instalației automatizate se poate stabili un criteriu de stabilitate robustă mai bun decât criteriile (19), (20) sau (25). În acest scop se consideră un exemplu în care o instalație este modelată cu ajutorul funcției de transfer (31).

$$G(s) \approx G_m(s) = \frac{e^{-0.5s}}{1+s} \quad (31)$$

în care $G_m(s)$ este funcția de transfer a modelului adoptat pentru instalație.

Compensatorul erorii este de tip proporțional și are valoarea $K(s)=2$.

Traductorul sistemului automat prezintă un risc tehnic de 10% până la 1 rad/s. Pentru frecvențe mai mari riscul crește liniar până la 20 rad/s, iar după aceea rămâne constant și egal cu 100%. Această descriere a riscului este multiplicativă. Pentru folosirea diagramei Nyquist se determină riscul aditiv cu ajutorul relației (6). În Fig. 5 se prezintă grafic funcția de transfer a sistemului automat cu bucla deschisă. Riscul aditiv apare sub forma unor cercuri suprapuse.

Criteriul de stabilitate Nyquist arată că dacă funcțiile de transfer posibile ale instalațiilor modelate au același număr de poli în semiplanul drept și dacă banda de cercuri nu include punctul (-1,0) atunci sistemul automat este stabil robust. Cu alte cuvinte stabilitatea este garantată dacă distanța de la punctul (-1,0) la un punct al graficului $K(j\omega)G(j\omega)$ este mai mică decât riscul tehnic reprezentat de raza cercului:

$$|1 + K(j\omega)G_m(j\omega)| > |K(j\omega)G_m(j\omega)|l(\omega) \quad (32)$$

Din Fig. 5 se observă că sistemul automat nu are risc de stabilitate, adică este stabil robust, deoarece relația (32) este satisfăcută.

Dacă se consideră sensibilitatea complementară $T_m(s)$ pentru instalația nominală,

$$T_m(s) = \frac{K(s)G_m(s)}{1 + K(s)G_m(s)} \quad (33)$$

atunci criteriul de stabilitate robustă rezultă din (32) și este:

$$|T_m(j\omega)|l(\omega) < 1 \quad (34)$$

pentru toate valorile lui ω .

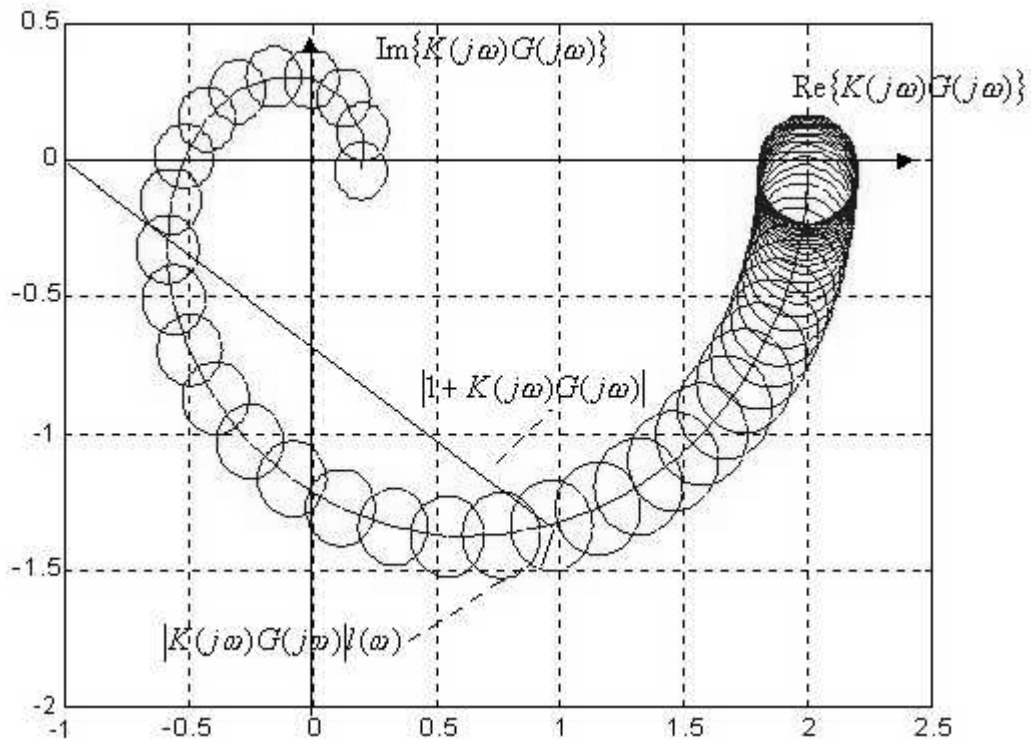


Fig. 5 Diagrama Nyquist cu parametrii riscului de stabilitate.

Un alt exemplu de apreciere al stabilității robuste îl constituie cazul modelării timpului mort T_m al modelului instalației automatizate cu ajutorul aproximației Pade de ordinul doi (35).

$$e^{-T_m s} \cong V(s) = \frac{12 - 6T_m s + T_m^2 s^2}{12 + 6T_m s + T_m^2 s^2} \quad (35)$$

Funcția de transfer a procesului este (36).

$$G(s) = K_f \frac{e^{-T_m s}}{(T_f s + 1)^n} \quad (36)$$

Funcția de transfer a modelului procesului este (37).

$$G_m(s) = K_f \frac{V(s)}{(T_f s + 1)^n} \quad (37)$$

Înlocuind pe (35), (36) și (37) în (28) se poate calcula riscul multiplicativ (38).

$$l(j\omega) = e^{-j\omega T_m} \frac{1}{V(j\omega)} - 1 \quad (38)$$

Dacă avem un model pentru proces, de exemplu $G_m(s)$ dat de (37), se poate proiecta compensatorul $K(s)$ și apoi cu ajutorul relațiilor (33) și (38) se poate verifica condiția de stabilitate robustă (34). Un exemplu va clarifica lucrurile. Pentru modelul procesului descris de relațiile (35) și (37) avem următoarele valori pentru parametrii:

$$K_f = 1; \quad T_m = 5[s]; \quad T_f = 10[s]; \quad n = 1 \quad (39)$$

Acordarea Ziegler – Nichols a regulatorului conduce la următorii parametri ai compensatorului erorii:

$$K_r = 3; \quad T_i = 12,5[s]; \quad T_d = 2,5[s] \quad (40)$$

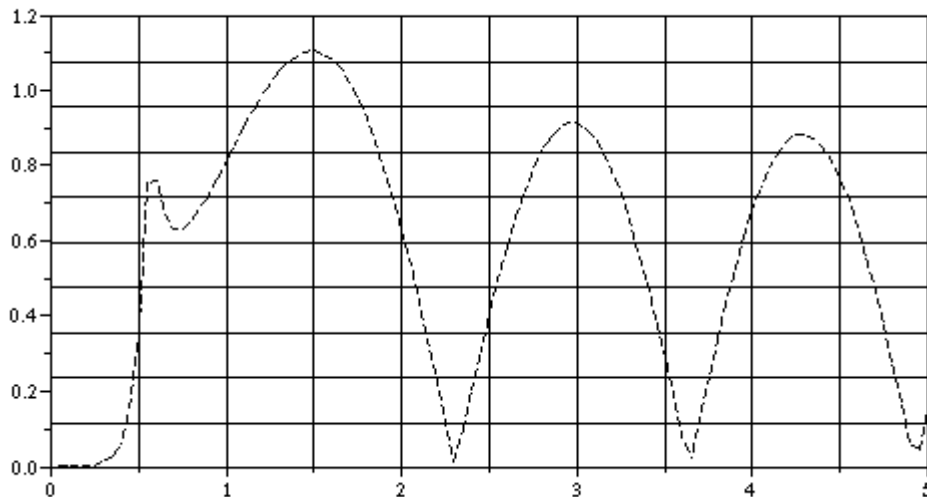


Fig. 6 Variația condiției (34) în funcție de ω pentru valorile (39) și (40)

Funcția de transfer a regulatorului PID va fi:

$$K(s) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 3 \left(1 + \frac{1}{12,5s} + 1,5s \right) \quad (41)$$

Cu valorile numerice (39) și (40) condiția (34) are valoarea din Fig. 6. Se observa ca ea nu este îndeplinită, depășind valoarea 1 cu toate că regulatorul a fost acordat Ziegler-Nichols.

Riscul tehnic la sistemele automate implică în afară de riscul instabilității și riscul deteriorării performanțelor. Una dintre cele mai importante performanțe apreciază modul în care sistemul automat înlătură sau atenuază efectul perturbațiilor. Pentru perturbații diferite eroarea poate fi exprimată, într-un mod foarte general, cu ajutorul relațiilor (11) și (12).

Deoarece se consideră că perturbația este unitară rezultă că răspunsul sistemului automat la perturbație, adică eroarea, trebuie să fie mai mic decât unu. Folosind norma H_∞ aplicată relației (12) rezultă condiția de performanță nominală:

$$\|SW\|_\infty < 1 \quad (42)$$

Pentru o performanță robustă relația (42) trebuie să fie satisfăcută pentru cazul cel mai nefavorabil al funcției de transfer al procesului din instalație. Deci:

$$\|SW\|_\infty = \sup_{\omega} |S(j\omega)W(j\omega)| < 1 \quad (43)$$

în care *sup* – supremum înseamnă că se consideră valoarea cea mai mare a modulului funcției de sensibilitate $S(j\omega)$ ponderate cu $W(j\omega)$, pentru toate valorile lui ω .

Se observă în Fig. 5 că pentru orice frecvență funcția de transfer în buclă deschisă GK se va găsi în interiorul discurilor care reprezintă regiunea de incertitudine. Din această cauză există următoarea relație pentru toate valorile posibile ale lui G :

$$|1 + G(s)K(s)| \geq |1 + G_m(s)K(s)| - |G_m(s)K(s)|l \quad (44)$$

Din definiția (4) a funcției de sensibilitate S rezultă:

$$|S| = \left| \frac{1}{1 + GK} \right| \leq \frac{|S_m|}{1 - |T_m|l} \quad (45)$$

Condiția de *performanță robustă* (43) pentru toate pulsațiile ω devine:

$$\frac{|S_m W|}{1 - |T_m|l} < 1 \quad (46)$$

sau

$$|T_m|l + |S_m W| < 1 \quad (47)$$

Se observă că condiția de performanță robustă (47) implică condiția de stabilitate robustă (34) și condiția de performanță nominală (42). Se observă că îmbunătățirea stabilității robuste provoacă o deteriorare a performanței nominale și vice versa. Pe de altă parte funcția de sensibilitate $S(s)$ trebuie să îndeplinească și condiția integrală (48) a lui Bode.

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0 \quad (48)$$

Considerând relațiile (6), (47) și (48) și impunând diferite condiții lui $S(s)$ și $T(s)$ se pot lua în considerare diferite performanțe referitoare la stabilitatea robustă, eroarea staționară, suprareglarea, durata procesului tranzitoriu, banda de trecere în buclă închisă și la eliminarea perturbațiilor, a zgomotului de măsurare, a deficiențelor de modelare și a saturării

elementului de execuție. De exemplu, pentru sistemul automat standard din Fig. 2 T(s) definit de relația (33) reprezintă funcția de transfer intrare – ieșire. Dacă această funcție de transfer este de ordinul doi, așa cum se consideră la evaluarea performanțelor standard, atunci vârful M_t al diagramei Bode a modulului lui T(s) are valoarea:

$$M_t = \sup_{\omega} |T_m(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (49)$$

în care ζ este fracțiunea de amortizare critică.

Suprareglarea răspunsului indicial, o performanță importantă pentru sistemele automate, depinde și ea de ζ :

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (50)$$

Din (34), (49) și (50) se poate stabili o legătură între robustețea stabilității și indicatorii de performanță standard. Câteva valori folosite frecvent sunt următoarele:

$$\begin{aligned} M_t &= 1,1 \dots 1,5 \\ \zeta &= 0,54 \dots 0,36 \\ \sigma &= 0,13 \dots 0,29 \end{aligned}$$

Recunoașterea faptului că la proiectarea și exploatarea sistemelor automate este necesară considerarea riscului tehnic a condus la apariția mai multor metode de proiectare, în special în domeniul frecvență, pe baza conceptelor prezentate în această lucrare.

Bibliografie

1. Astrom K. J., Control System Design, Lund Institute of Technology, 2001.
2. Astrom K. J., Model Uncertainty and Robust Control Design, COSY Valencia Workshop, Sept., 1999.
3. Dorf R., Bishop R., Modern Control Systems, Addison-Wesley, New York, 1998.
4. Dutton K., Thompson S., Barraclough., The art of control engineering, Addison-Wesley, New York, 1997.
5. Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E., Control System Design, Prentice Hall, N.Y., 2000.
6. Ionescu C., Vlădeanu V., Larionescu S., Ionescu D., Automatizări, Ed. didactică și pedagogică, București, 1982.
7. Kwakernaok H., Meinsma G., Design Methods for Control Systems, Dutch Institute of Systems and Control, 2001.
8. Landau I., D., Identificarea și comanda sistemelor, Ed. tehnică, București, 1997.
9. Larionescu S., Accente noi în analiza și proiectarea sistemelor automate, A XXXVI-a Conferință națională de instalații, Sinaia, 2-5 oct.2001, Vol. 2,p.57-65
10. Larionescu S., Aprecierea robusteții sistemelor automate, Măsurări și Automatizări, Nr. 2, 2001, p.55-56
11. Larionescu S., Schema bloc a unui sistem automat modern, A XXXV-a Conferința de instalații, Sinaia, 3-6 oct. 2000, Vol. 2, p. 78-83.