

Proiectarea reguletoarelor PID cu două grade de libertate prin formarea buclei

Prof. dr. ing. Sorin Larionescu – UTCB

Implementarea numerică a reguletoarelor permite realizarea cu ușurință a unor algoritmi foarte complecși. Totuși, în practică, algoritmul PID cu unele modificări este folosit în 90% din cazuri datorită avantajelor sale probate într-o lungă perioadă de timp. S-a demonstrat că și noile performanțe impuse în ultima vreme referitoare la robustețea sistemelor automate pot fi realizate foarte bine și ușor cu ajutorul reguletoarelor PID.

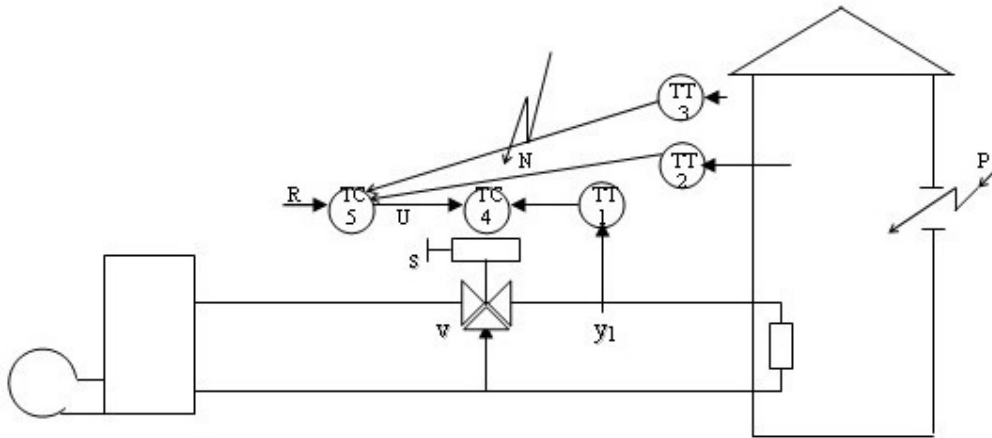


Fig. 1 Schema tehnologică simplificată pentru sistemul de reglare automată a temperaturii

Schimbările conturate în ultima perioadă pentru reguletoarele PID se referă la folosirea structurii cu două grade de libertate, a mecanismului de antisaturare și la metoda de acordare care ia în considerare pe lângă stabilitate și performanțele clasice din domeniul timp și asigurarea unor criterii de robustețe și independență față de incertitudinile în cunoașterea procesului. Problema proiectării unui regulator PID cu două grade de libertate poate fi rezolvată în multe feluri. În continuare se prezintă o abordare proprie, exemplificată pentru cazul regulatorului PID de temperatură pentru instalația de încălzire a unei încălțiri a cărei schemă tehnologică simplificată cu echipamentul de automatizare este prezentată în Fig. 1. Regulatorul de temperatură folosit este aparatul cu numărul 5 care realizează pe lângă operațiunea de feedback de la temperatura din încălțire măsurată de traductorul 2 și operațiunea de feedforward de la perturbație realizată cu ajutorul traductorului temperaturii exterioare 3.

Schema bloc a unui sistem automat modern folosit în instalațiile pentru construcții este prezentată în Fig. 2. Dacă considerăm pentru simplificare că $D1=0$ și $D2=1$ atunci relația dintre ieșirea sistemului $Y(s)$ și cele trei intrări ale sale, referința $R(s)$, perturbația $P(s)$ și zgomotul $N(s)$, este următoarea:

$$Y = \frac{KG}{1+KGH} FR + \frac{A-BCG}{1+KGH} P - \frac{KG}{1+KGH} N \quad (1)$$

Se observă că dacă compensatorul perturbației are funcția de transfer $C=A/BG$ atunci influența perturbației este nulă. Din păcate funcțiile de transfer $G(s)$ și în special $A(s)$ nu sunt cunoscute și compensatorul $C(s)$ nu poate fi determinat cu precizie. Tot din relația (1) se constată însă, că dacă compensatorul erorii există și are o funcție de transfer $K(s)$ destul de

mare, efectul perturbației este dramatic scăzut chiar în prezența unui risc de necunoaștere a proceselor conduse. Din această cauză vom considera în continuare efectul reacției negative în eliminarea perturbației $P(s)$ pe baza schemei bloc din Fig. 3 care folosește un regulator cu un grad de libertate.

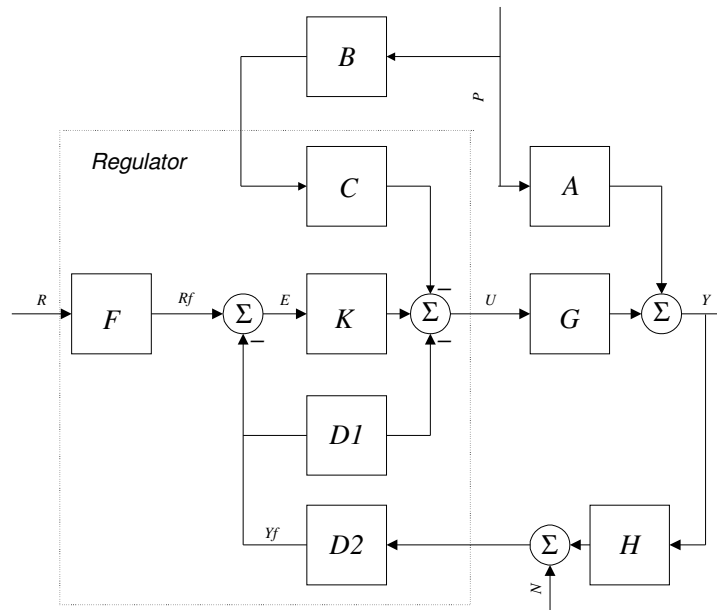


Fig. 2 Buclă de reglare cu compensator feedforward C de la perturbație și compensator F feedforward de la referință

Echipamentele moderne de conducere automată oferă posibilitatea folosirii unei game foarte largi de algoritmi. Unul dintre algoritmi cei mai frecvent folosiți este algoritmul proporțional integral derivativ PID, din care s-au identificat peste 297 de variante utilizate în regulatoarele comerciale. De exemplu, companiile National Instruments, ABB, Bailey, Fisher, Foxboro, Honeywell, Moore Products, Yokogawa și altele, comercializează regulatoare pentru care denumirea algoritmului, terminologia întrebuițată pentru descrierea lui și a unităților de măsură este diferită.

Schema bloc a unui sistem de reglare automată clasic este prezentată în Fig. 3. Cele trei intrări ale sistemului automat sunt referința R, perturbația P și zgomotul N de la ieșirea traductorului.

Regulatorul PID

Regulatorul este format dintr-un comparator și compensatorul K. Blocul G de pe calea directă modelează elementul de execuție și procesul automatizat. Traductorul este reprezentat de blocul H. Funcția de transfer a unui compensator K de tip PID are următoarea formă generală:

$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s + q \frac{T_d}{T_i} \right) \quad (2)$$

în care K_c este constanta de proporționalitate a compensatorului. Pentru semnale unificate $K_c = (100\%) / BP$ iar BP este banda de proporționalitate măsurată în procente,

T_i : constanta de timp integral sau timpul de repetare [s / repetare],

T_d : constanta de timp derivativ [s],

q: factor de influență.

Algoritmul PID cu factor de influență zero $q=0$, numit ideal, este cel preferat de teoreticieni și prezentat cu precădere în toate manualele și monografiile consacrate sistemelor automate

Forma algoritmului, numită algoritmul PID paralel, este preferată de unele firme și de unele manuale universitare deoarece este linear în parametrii K_p , K_i , K_d . În acest caz se pune clar în evidență acțiunea proporțională (amplificarea) K_p , acțiunea integrală (restabilirea automată) K_i/s și acțiunea derivativă $K_d s$.

$$\begin{aligned}
 \text{PID ideal:} \quad K(s) &= K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 \text{PID paralel:} \quad K(s) &= k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \\
 \text{PID serie:} \quad K(s) &= K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (T_d s + 1)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Algoritmul PID serie (interactiv) corespunde valorii $q=1$ a factorului de influență și se obține după câteva transformări simple din relația generală.

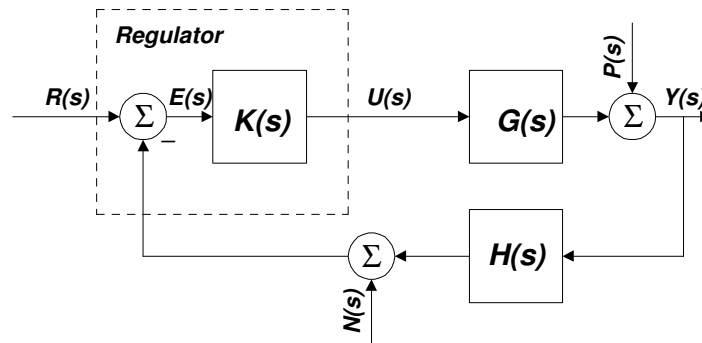


Fig. 3 Bucla de reglare standard

Toate cele trei forme ale algoritmului PID sunt folosite în prezent de către producătorii de reglatoare automate. De exemplu, AEG Modicon și Texas Instruments folosesc tipul ideal, Foxboro și Fisher au adoptat algoritmul serie, Honeywel are reglatoare PID atât serie cât și ideale iar Bailey și Allen Bradley au reglatoare cu algoritmi tip PID ideal și paralel.

Dacă nu ne interesează firma producătoare și analizăm reglatoarele automate din alte puncte de vedere, se poate constata că aproape toate reglatoarele analogice electronice și pneumatice sunt de tip serie. Reglatoarele numerice sunt în cea mai mare parte de tip ideal. Un număr mai mic de reglatoare numerice sunt de tip serie pentru a fi echivalente cu reglatoarele analogice.

Compensatoarele PID se transformă ușor în compensatoare P dacă $T_d = 0$ și $T_i = \infty$, în compensatoare PI dacă $T_d = 0$, sau compensatoare PD dacă $T_i = \infty$. Compensatoarele ideale PID diferă de cele serie numai în cazul în care toate cele trei acțiuni P, I și D sunt prezente.

Răspunsul compensatorului PI la o eroare treaptă unitară este $u = K_c(1+t/T_i)$. Atunci când $t = T_i$ efectul proporțional al algoritmului se repetă (dublează). Din această cauză T_i se măsoară în secunde / repetare. O eroare rampă provoacă răspunsul $u = K_c(t+T_d)$ al compensatorului PD. Dacă $t = T_d$ efectul proporțional al algoritmului se dublează și în felul acesta poate fi determinată constanta de timp derivativ.

În documentația tehnică sau în manuale algoritmul PID este prezentat, de obicei, într-una din formele ideală, paralelă sau serie. Algoritmul real, folosit de regulator la conducerea procesului, este însă diferit deoarece termenul $T_d s$, corespunzător acțiunii derivatice, care apare în funcția de transfer a compensatorului PID nu este realizabil fizic. Regulatele comerciale analogice folosesc, din acest motiv, aproximarea:

$$T_d s \cong \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} \quad (4)$$

în care α este o caracteristică constructivă a compensatorului, care nu poate fi modificată de către utilizator, cu o valoare fixată undeva între 1/6 și 1/20.

Cu această aproximație algoritmi PID pentru compensatoarele analogice sunt prezentați adeseori sub această formă:

$$\text{PID ideal analogic: } K(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} \right) \quad (5)$$

$$\text{PID serie analogic: } K(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \left(\frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} \right)$$

Regulatorul PID cu două grade de libertate.

Regulatele moderne, implementate numeric, au schema bloc prezentată în Fig. 4 și Fig. 5. Compensatorul erorii K este de tip integral I și are funcția de transfer:

$$K(s) = \frac{K_c}{T_i s} = \frac{k_i}{s} \quad (6)$$

Blocul D care include acțiunea derivativă este de tip PD cu funcția de transfer:

$$D(s) = K_c \left(1 + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} \right) \quad (7)$$

În expresia funcției de transfer T_d este constanta de timp derivativ. Valoarea lui α este cuprinsă între 0,1 și 1..

Funcția de transfer a prefiltrului F din Fig. 4 este pentru regulatorul PID, de regulă, de forma

$$F(s) = b T_i s + 1 + c \frac{T_d T_i s^2}{\alpha T_d T_i s + 1} \quad (8)$$

sau echivalentul său numeric obținut prin aproximarea lui s .

O altă variantă de regulator PID cu două grade de libertate este prezentată în Fig. 5. Pentru ca regulatorul PID să aibă aceeași funcție de transfer cu regulatorul din Fig. 4 trebuie ca funcția de transfer a compensatorului feedforward F_1 să fie:

$$F_1(s) = K_c \left(b + c \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} \right) \quad (9)$$

Acordarea regulatorului PID cu două grade de libertate se face prin stabilirea constantelor K_c , T_i , T_d , b , c și α . Dacă $\alpha=0$, $b=1$ și $c=1$ se obține un regulator cu un singur grad de libertate, cu algoritmul PID ideal și cu acțiunea derivativă scoasă de pe calea directă.

Existența prefiltrului permite acordarea compensatorului PID numai pentru funcționarea în regim de atenuare a perturbației (reglare, stabilizare).

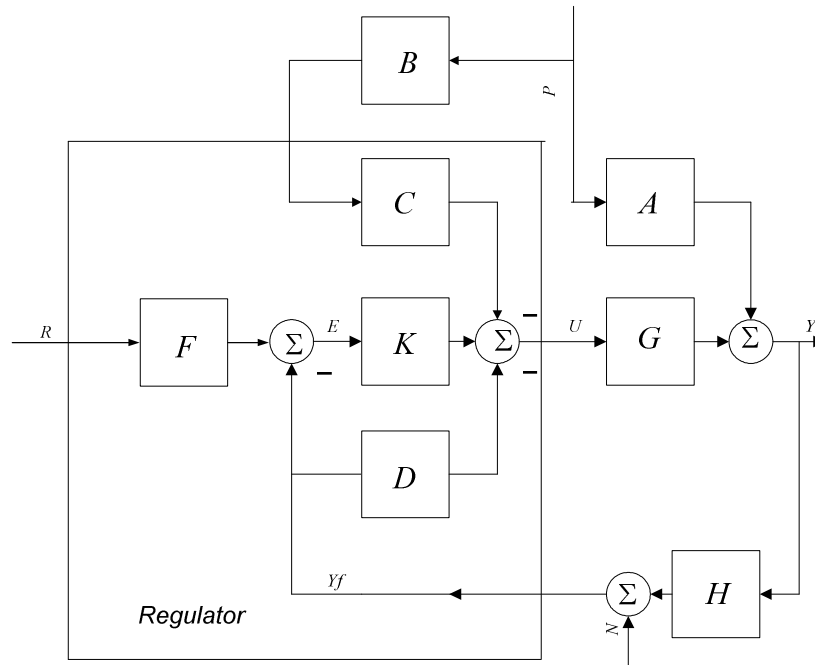


Fig. 4 Buclă cu regulator PID numeric cu două grade de libertate datorate prefiltrului F și cu componenta derivativă D acționând numai asupra ieșirii Y_f

Funcțiile de sensibilitate.

Metoda de proiectare propusă se bazează pe funcțiile de sensibilitate $S(s)$ și $T(s)$. Funcția de transfer $H_u(s)$ a sistemului automat din Fig. 3 în regim de urmărire este dată de relația următoare dacă se consideră traductorul ideal $H=1$.

$$H_u(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (10)$$

Funcția de sensibilitate $S(s)$ a sistemului automat arată cât de mult se modifică funcția de transfer în regim de urmărire $H_u(s)$ atunci când funcția de transfer a instalației automatizate $G(s)$ își schimbă puțin valoarea cu $dG(s)$.

$$S(s) = \frac{\frac{dH_u(s)}{H_u(s)}}{\frac{dG(s)}{G(s)}} = \frac{dH_u}{dG} \frac{G}{H_u} \quad (11)$$

Din relațiile (10) și (11) rezultă după derivare expresia funcției de sensibilitate $S(s)$.

$$S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (12)$$

în care $L(s) = K(s)G(s)$ este funcția de transfer cu bucla deschisă.

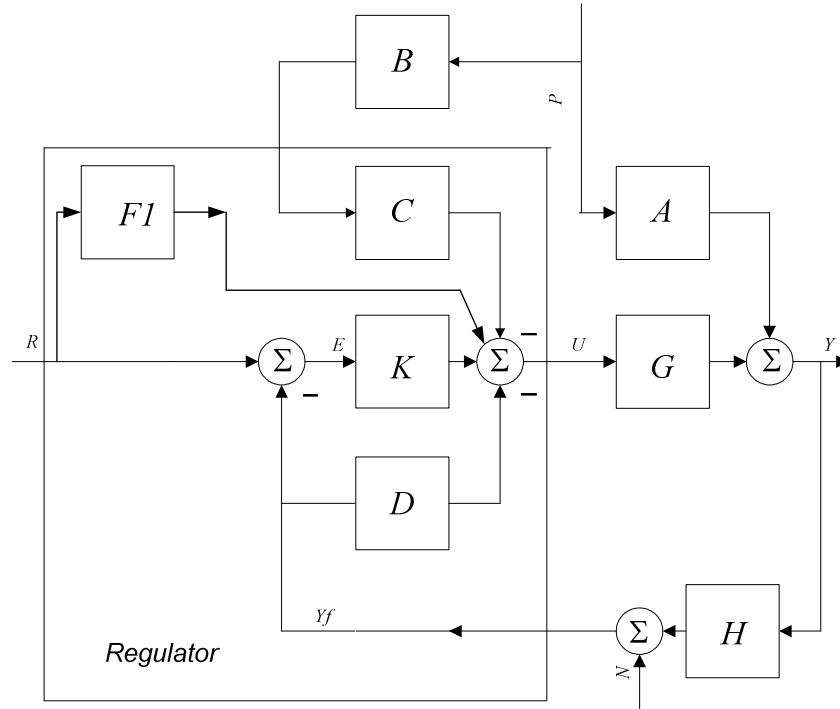


Fig. 5 Buclă cu regulator numeric PID cu două grade de libertate datorate compensatorului feedforward $F1$ și componentă derivativă acționând numai asupra ieșirii Y_f

Pe lângă funcția de sensibilitate $S(s)$ se definește și funcția de sensibilitate complementară $T(s)$ a sistemului automat din Fig. 3 Bucla de reglare standard cu ajutorul relației:

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (13)$$

în care $L(s) = K(s)G(s)$ este funcția de transfer cu bucla deschisă.

Din relația (13) se observă că pentru traductoarele ideale care au $H(s) = 1$ funcția de sensibilitate complementară $T(s)$ este identică cu funcția de transfer (10) a sistemului automat.

Între cele două sensibilități are loc relația: .

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (14)$$

Performanțele sistemului automat.

Folosind funcțiile de sensibilitate $S(s)$ și $T(s)$ se pot evalua performanțele sistemului automat prin determinarea ieșirii, erorii și comenzii pentru schema bloc din Fig. 3

$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)P(s) - T(s)N(s) \quad (15)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) - N(s) = S(s)[R(s) - P(s) - N(s)] \quad (16)$$

$$U(s) = K(s)E(s) = K(s)S(s)[R(s) - P(s) - N(s)] = \frac{T(s)}{G(s)} [R(s) - P(s) - N(s)] \quad (17)$$

Considerând relațiile (15), (16) și (17) se pot lua în considerare diferite performanțe referitoare la funcționarea în regim de urmărire a referinței R și de atenuare a perturbațiilor P, a zgomotului de măsurare N, a deficiențelor de modelare și a saturării elementului de execuție. Indicatorii standard de performanță se referă la sistemul de ordinul doi cu următoarele funcții de sensibilitate:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (18)$$

$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{s(s + 2\zeta\omega_0)}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (19)$$

Pentru sistemul automat standard din Fig. 3 funcția de sensibilitate complementară $T(s)$ definită de relația (13) reprezintă funcția de transfer intrare – ieșire. Dacă această funcție de transfer este de ordinul doi, așa cum se consideră la evaluarea performanțelor standard, atunci vârful M_t al diagramei Bode a modulului lui $T(s)$ se numește sensibilitatea maximă și are valoarea:

$$M_t = \sup_{\omega} |T(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (20)$$

în care ζ este fracțiunea de amortizare critică și are valori $\zeta \leq 0,7$. Dacă $\zeta > 0,7$ atunci sensibilitatea maximă $M_t = 1$.

Pulsăția la care apare sensibilitatea maximă este:

$$\omega_{mi} = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (21)$$

pentru $\zeta \leq 0,7$.

Suprareglarea răspunsului indicial, o performanță importantă pentru sistemele automate, depinde și ea de ζ :

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (22)$$

Din aceste relații se poate stabili o legătură între sensibilitatea maximă M_t și indicatorii de performanță standard. Câteva valori folosite frecvent sunt următoarele:

Tab. 1.2

$M_t =$	1,1 ... 1,5
$\zeta =$	0,54 ... 0,36
$\sigma =$	0,13 ... 0,29

În mod asemănător se determină pentru funcția de sensibilitate maximă valoarea maximă:

$$M_s = \sup_{\omega} |S(j\omega)| = \sqrt{\frac{8\zeta^2 + 1 + (4\zeta^2 + 1)\sqrt{8\zeta^2 + 1}}{8\zeta^2 + 1 + (4\zeta^2 - 1)\sqrt{8\zeta^2 + 1}}} \quad (23)$$

care apare la pulsația:

$$\omega_{ms} = \frac{1 + \sqrt{8\zeta^2 + 1}}{2} \omega_0 \quad (24)$$

Valorilor $\zeta = 0,3, 0,5$ și $0,7$ le corespund sensibilitățile maxime $M_s = 1,99, 1,47$ și $1,28$ respectiv.

Stabilitatea sistemului automat

Gradul de stabilitate poate fi determinat în planul Nyquist în funcție de marginea de fază P_m , marginea de amplificare G_m .

Abordarea modernă în proiectarea inginerescă a sistemelor automate consideră un indicator mai bun stabilității care depinde de sensibilitatea $S(j\omega)$. Acesta este o distanță minimă, numită margine de modul M_m , dintre hodograful Nyquist al lui $L(j\omega)$ și punctul critic de coordonate $(-1,0)$.

Marginea de modul M_m este raza cecului cu centrul în punctul critic $(-1, j0)$ și tangenta la hodograful lui $L(j\omega)$. Vectorul care unește punctul critic $(-1, j0)$ cu punctul cel mai apropiat de pe hodograful lui $L(j\omega)$ are modulul dat de relația:

$$M_m = |1 + L(j\omega)|_{\min} \quad (25)$$

O nouă definiție a marginii de modul M_m rezultă din relațiile (12) și (25).

$$M_m = \frac{1}{|S(j\omega)|_{\max}} = \frac{1}{M_s} \quad (26)$$

în care $M_s = |S(j\omega)|_{\max}$ este valoarea¹ cea mai mare dintre vârfurile modului lui $S(j\omega)$. Reducerea sensibilității maxime va conduce la creșterea marginii de modul.

Un exemplu pentru procesul

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)^4} \quad (27)$$

și un regulator PID cu două grade de libertate având structura din Fig. 5

$$U(s) = K_c \left\{ [bR(s) - Y(s)] + \frac{1}{T_i s} [R(s) - Y(s)] + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} [cR(s) - Y(s)] \right\} \quad (28)$$

cu $K_c = 1, T_i = 4, T_d = 1, b = 1, N = 10$ și $c = 0$ este prezentat în Fig. 6.

La proiectarea regulatorului [3], [11] se impune o anumită a **stabilitate** prin condiția ca hodograful funcției de transfer în buclă deschisă $L(j\omega) = K(j\omega)G(j\omega)$ să treacă prin anumite puncte determinate de P_m, G_m și M_s . Dacă se cunoaște procesul

$$G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega) \quad (29)$$

și se impune ca hodograful lui $L(j\omega)$ pentru un regulator PI să treacă printr-un punct din planul diagramei Nyquist determinat de marginea de fază, de amplificare sau modul de coordonate $u+jv$ se obține:

¹ Această valoare corespunde normei H_∞ a modulului lui $S(j\omega)$ și se notează cu M_s .

$$L(j\omega) = K(j\omega)G(j\omega) = (k - j\frac{k_i}{\omega})(a(\omega) + jb(\omega)) = u + jv \quad (30)$$

Din această relație se pot determina parametrii regulatorului PI în funcție de proces și coordonatele punctului din planul diagramei Nyquist.

$$k = \frac{a(\omega)u + b(\omega)v}{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (31)$$

$$k_i = \frac{[a(\omega)v - b(\omega)u]\omega}{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (32)$$

Pentru diferite valori ale lui ω rezultă o curbă trasată automat [11] în planul K_c , $k_i = K_c/T_i$. În Fig. 7 se prezintă două curbe corespunzătoare condițiilor de margine de fază P_m și margine de amplificarea G_m din Fig. 6. Toate punctele din interiorul unui domeniu delimitat de o curbă satisfac condiția de stabilitate corespunzătoare punctului P_m , G_m sau M_s . Un punct care se găsește pe ambele curbe corespunde unei funcții de transfer în buclă deschisă $L(j\omega)$ care trece prin ambele puncte P_m și G_m . Punctul A are coordonatele $(K_c, k_i = K_c/T_i)$ care determină regulatorul PI. Constanta T_d a regulatorului PID se determină cu relația $T_d = 0,25T_i$.

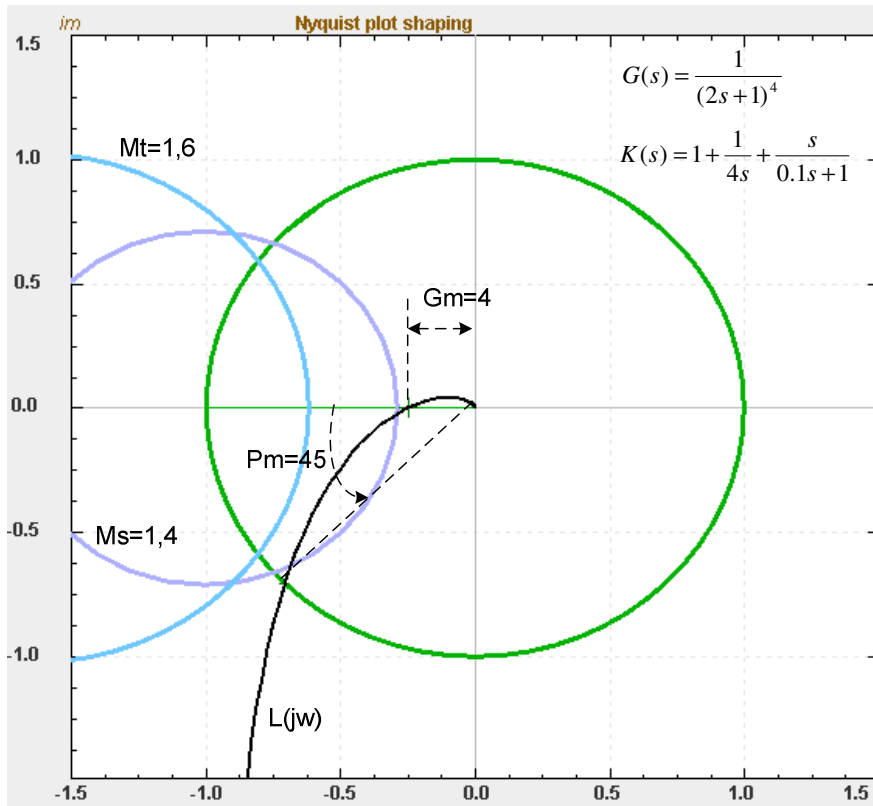


Fig. 6 Robuștețea stabilității în planul Nyquist

Impunerea condiției ca $L(j\omega)$ să treacă prin anumite puncte conduce la o anumită formă pentru hodograful lui $L(j\omega)$ care la rândul ei determină regulatorul. Această operație este denumită pe scurt în literatura de specialitate **formarea buclei**².

Robuștețea stabilității.

În afară de stabilitate formarea buclei permite și asigurarea altor trăsături ale sistemului de reglare automată. O caracteristică importantă a sistemelor de reglare automată o reprezintă capacitatea lor remarcabilă de a-și păstra relativ stabilitatea la variațiile ΔG ale procesului $G(s)$. Dacă funcția de transfer a procesului se schimbă de la G la $G + \Delta G$ atunci funcția de transfer a buclei L se schimbă de la KG la $KG + K\Delta G$. Din Fig. 8 rezultă că distanța de la punctul critic $(-1, 0)$ la un punct de pe hodograful lui L este $|1 + L|$. Pentru ca sistemul automat să fie stabil robust este necesar ca hodograful L să aibă o formă care ocolește cât mai departe punctul critic $(-1, 0)$. Aceasta se întâmplă dacă

$$|K\Delta G| < |1 + L| \quad (33)$$

Rezultă condiția

$$|\Delta G| < \left| \frac{1 + KG}{K} \right| \quad (34)$$

care poate fi pusă sub forma:

$$\left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad (35)$$

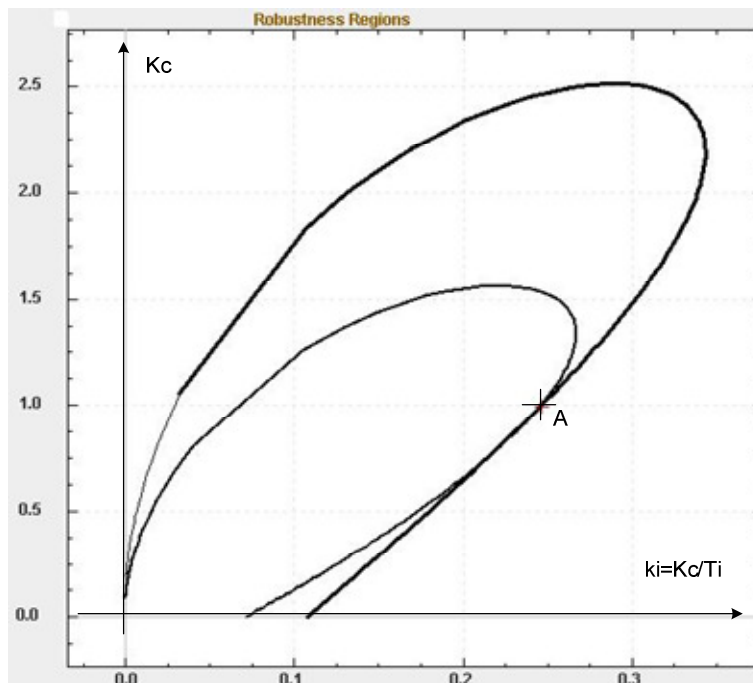


Fig. 7 Regiunile de robuștețe ale stabilității pentru punctele P_m și G_m din Fig. 6

² Loop shaping.

O estimare conservatoare permite variații relative ale procesului³ astfel încât sistemul automat să nu devină instabil numai dacă este îndeplinită condiția:

$$\left| \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| < \frac{1}{M_r} \quad (36)$$

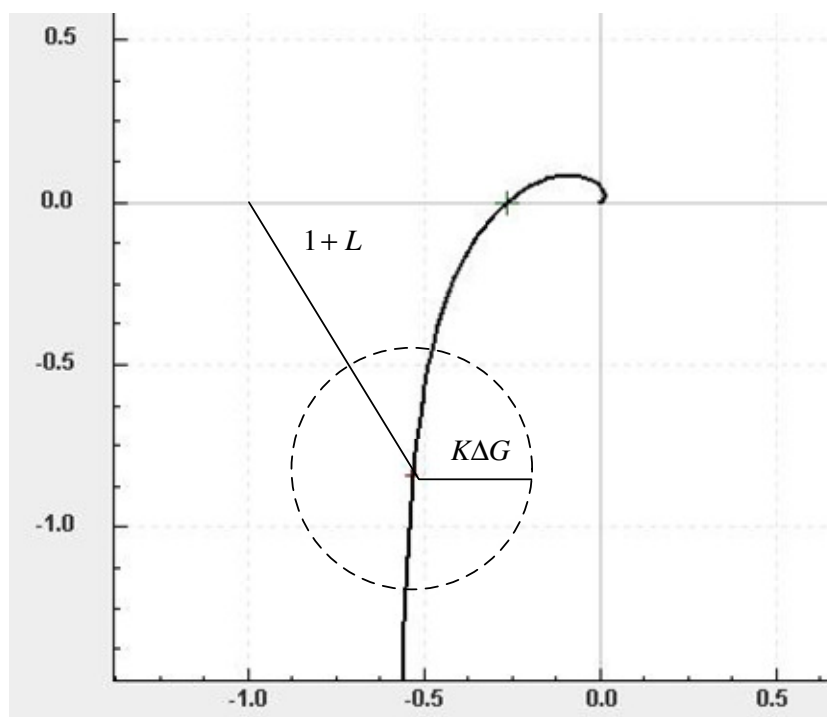


Fig. 8 Determinarea condiției de păstrare a robusteții stabilității atunci când procesul se modifică cu $\Delta G(j\omega)$

Robustețea performanțelor.

Riscul tehnic la sistemele automate implică în afară de riscul instabilității și riscul deteriorării performanțelor. Robustețea performanțelor va fi evaluată pe baza uneia dintre cele mai importante performanțe care apreciază modul în care sistemul automat înlătură sau atenuează efectul perturbațiilor.

Referința $R(s)$, perturbația $P(s)$ și zgomotul $N(s)$ pot fi generate cu ajutorul aceluiași model caracterizat de relația:

$$v(s) = W(s)v^*(s) \quad (37)$$

în care $v^*(s)$ este transformata Laplace a unui semnal tip,

$W(s)$ – o funcție de transfer proprie fiecărui semnal $R(s)$, $P(s)$ sau $N(s)$.

De exemplu, dacă semnalul tip este impulsul Dirac $\delta(t)$, atunci transformata sa Laplace este $v^*(s)=1$. Pentru $W(s)=1/s$ modelul (37) generează un semnal treaptă iar pentru $W(s)=1/(as+1)$ generează un semnal exponențial.

³ Aceste variații ΔG ale procesului G pot apare datorită variației în timp a parametrilor procesului sau a erorilor de cunoaștere teoretică și experimentală a procesului.

Dacă se consideră separat regimul de urmărire, reglare și filtrare atunci eroarea poate fi exprimată într-un mod foarte general prin relația.

$$E(s) = S(s)W(s)v^*(s) \quad (38)$$

Pentru cazul $v^*(s)=1$, analizat mai înainte, eroarea este:

$$E(s) = S(s)W(s) \quad (39)$$

în care $S(s)$ și $W(s)$ sunt funcții de transfer.

O măsură matematică a erorii se poate face cu ajutorul normei H_∞ .

$$\|e(t)\|_\infty = \sup_t |e(t)| \quad (40)$$

Norma H_∞ a erorii este egală cu valoarea celui mai mare vârf posibil. Se folosește \sup în loc de \max pentru că acest vârf poate apare la infinit.

Pentru perturbații diferite eroarea poate fi exprimată, într-un mod foarte general, cu ajutorul relației (39). Deoarece se consideră că perturbația este unitară rezultă că răspunsul sistemului automat la perturbație, adică eroarea, trebuie să fie mai mic decât unu. Folosind norma H_∞ aplicată relației (39) rezultă condiția de performanță nominală:

$$\|SW\|_\infty = \sup_\omega |S(j\omega)W(j\omega)| < 1 \quad (41)$$

în care \sup – supremum înseamnă că se consideră valoarea cea mai mare a modulului funcției de sensibilitate $S(j\omega)$ ponderate cu $W(j\omega)$, pentru toate valorile lui ω .

Se observă în Fig. 8 că pentru orice frecvență funcția de transfer în buclă deschisă cu valoare incertă $L_m = G_m K$, în care $G = G_m + \Delta G_m$ se va găsi în interiorul discurilor care reprezintă regiunea de incertitudine. Din această cauză există următoarea relație pentru toate valorile posibile ale lui $G(j\omega)$:

$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \geq |1 + G_m(j\omega)K(j\omega)| - |K(j\omega)\Delta G_m(j\omega)| \quad (42)$$

Cu această condiție rezultă din definițiile (12) și (13) ale funcțiilor de sensibilitate S_m și sensibilitate complementară T_m : ale modelului incert

$$|S| = \left| \frac{1}{1 + GK} \right| \leq \frac{|S_m|}{1 - |T_m| \frac{\Delta G}{G_m}} \quad (43)$$

Înlocuim pe (43) în (41) și condiția de **performanță robustă** pentru toate pulsațiile ω devine:

$$\frac{|S_m W|}{1 - |T_m| \frac{\Delta G}{G_m}} < 1 \quad (44)$$

sau

$$\left| T_m \frac{\Delta G}{G_m} \right| + |S_m W| < 1 \quad (45)$$

Se observă că condiția de **performanță robustă** (45) implică condiția de **stabilitate robustă** (35) și condiția de **performanță nominală** (41). Îmbunătățirea stabilității robuste, adică creșterea insensibilității la incertitudinea modelului procesului, provoacă o deteriorare a performanței nominale și viceversa. Soluția constă în asigurarea performanțelor nominale la frecvențe joase și satisfacerea condiției de stabilitate robustă la frecvențe înalte.

Pe de altă parte funcția de sensibilitate $S(s)$ a unui sistem automat, fără poli în semiplanul drept, trebuie să îndeplinească și condiția integrală a lui Bode pentru a fi realizabilă fizic.

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)|d\omega = 0 \quad (46)$$

Această relație spune că dacă funcția de sensibilitate este mică pentru unele frecvențe trebuie să fie mare la celelalte frecvențe. Acesta este efectul cunoscut sub numele pat de apă

O altă limitare a posibilităților de alegere a regulatorului este dată de relația (17). Dacă banda de frecvențe a funcției de sensibilitate complementară $T(s)$ este mai mare decât banda de frecvențe a procesului $G(s)$ atunci comanda $U(s)$ devine foarte mare și iese din domeniul posibilităților fizice ale regulatorului.

Metoda de proiectare

Se propune ca regulatorul PID cu două grade de libertate [28] să fie proiectat printr-un proces iterativ prin formarea buclei cu ajutorul programului prezentat în [11]. Metoda de proiectare propusă are următoarele etape.

1. Se proiectează regulatorul PID cu un grad de libertate ($b=1, c=0$) în regim de rejecție a perturbațiilor prin formarea buclei astfel încât să treacă aproximativ prin punctele determinate de $P_m=45$ și $G_m=4$. Pentru procesul (27) bucla este formată ca în Fig. 6 și rezultă pentru punctul A din Fig. 7 regulatorul cu parametrii $K_c=1, T_i=4, T_d=1, N=10, b=1, c=0$.

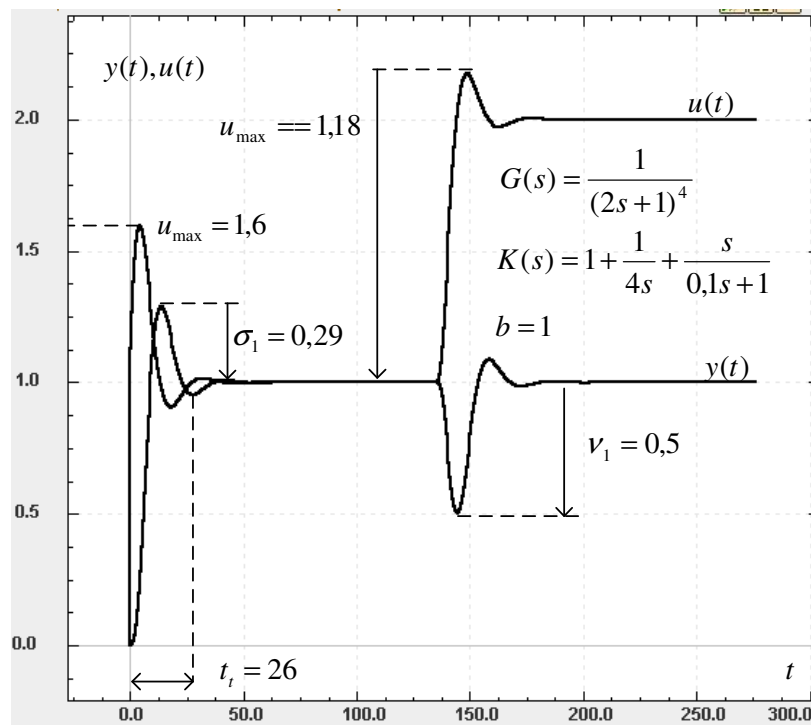


Fig. 9 Ieșirea și comanda în regim de urmărire și în regim de rejecție a perturbației pentru o intrare unitară în cazul regulatorului cu un grad de libertate.

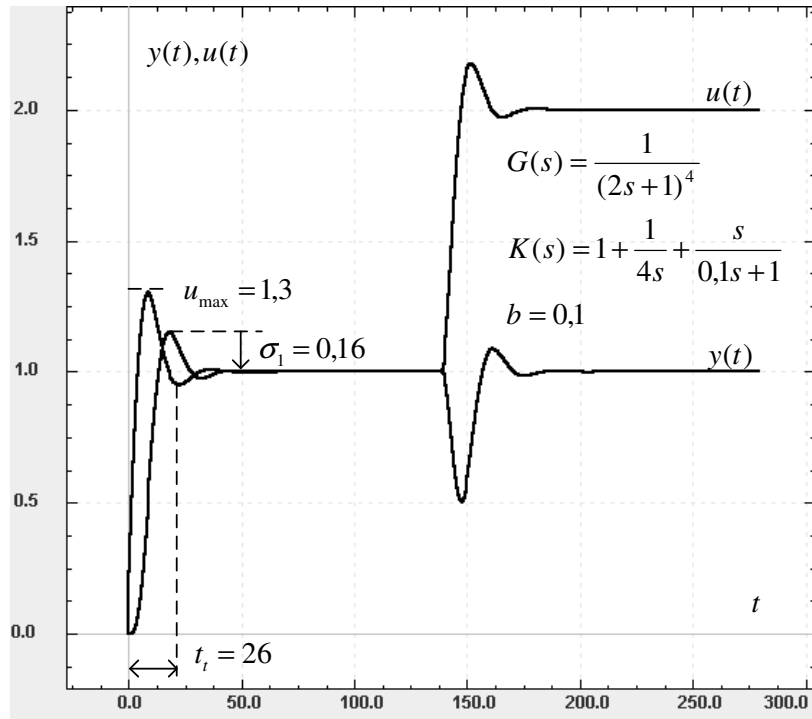


Fig. 10 Ieșirea și comanda în regim de urmărire și în regim de rejecție a perturbației pentru o intrare unitară în cazul regulatorului cu două grade de libertate

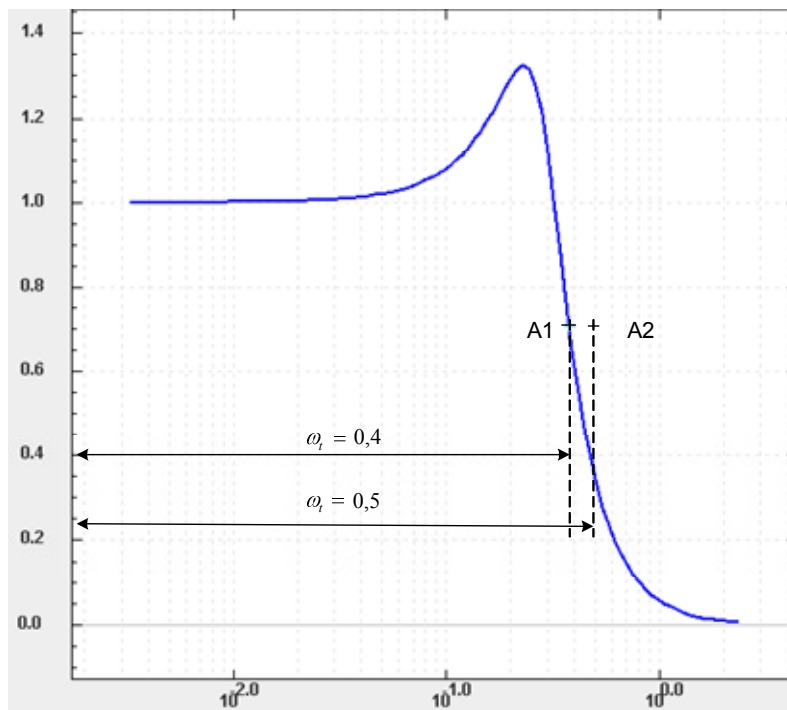


Fig. 11 Funcția de sensibilitate complementară și banda de trecere $\omega_i=4$. Punctul A_2 corespunde benzii mărite dorite.

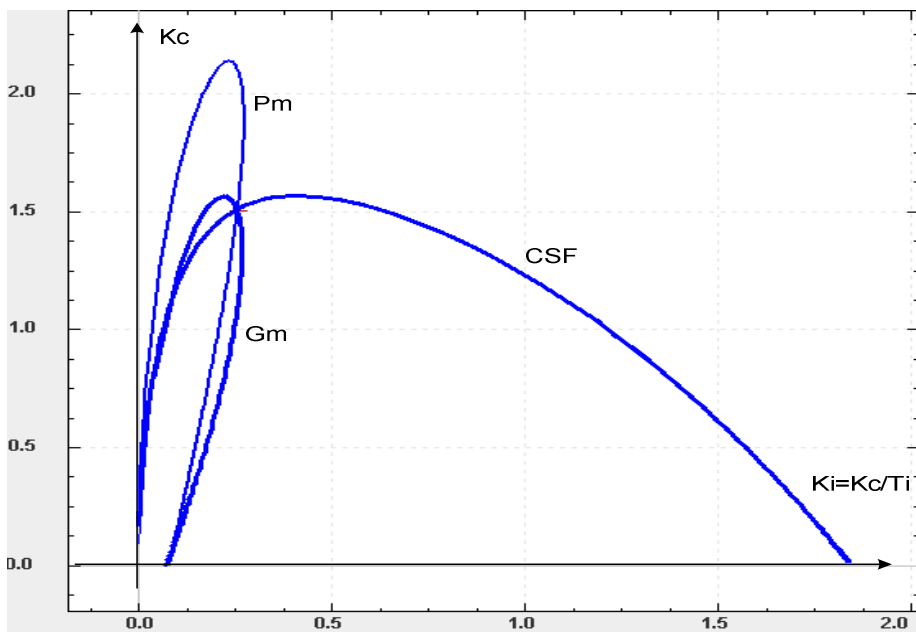


Fig. 12 Regiunile de robustețe pentru $P_m=56$, $G_m=4$ și funcția de sensibilitate complementară CSF cu banda de trecere $\omega_t=5$.

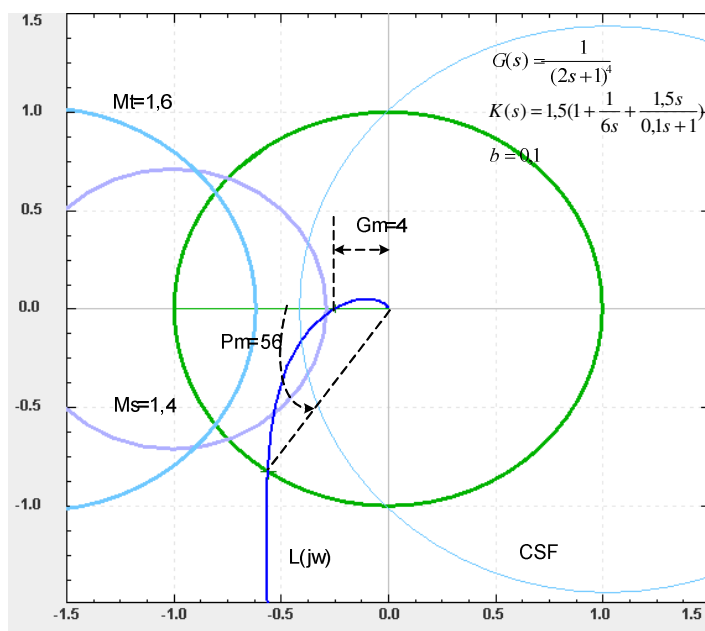


Fig. 13 Formarea buclei pentru o funcție de sensibilitate complementară cu banda de trecere extinsă $\omega_t=5$

2. Se proiectează regulatorul PID cu două grade de libertate prin micșorarea parametrului b . În Fig. 10 se observă că pentru $b=0,1$ suprareglarea în regim de urmărire s-a micșorat substanțial de la $\sigma_1=0,29$ la $\sigma_1=0,16$, regimul de rejecție a perturbațiilor rămânând neschimbat.

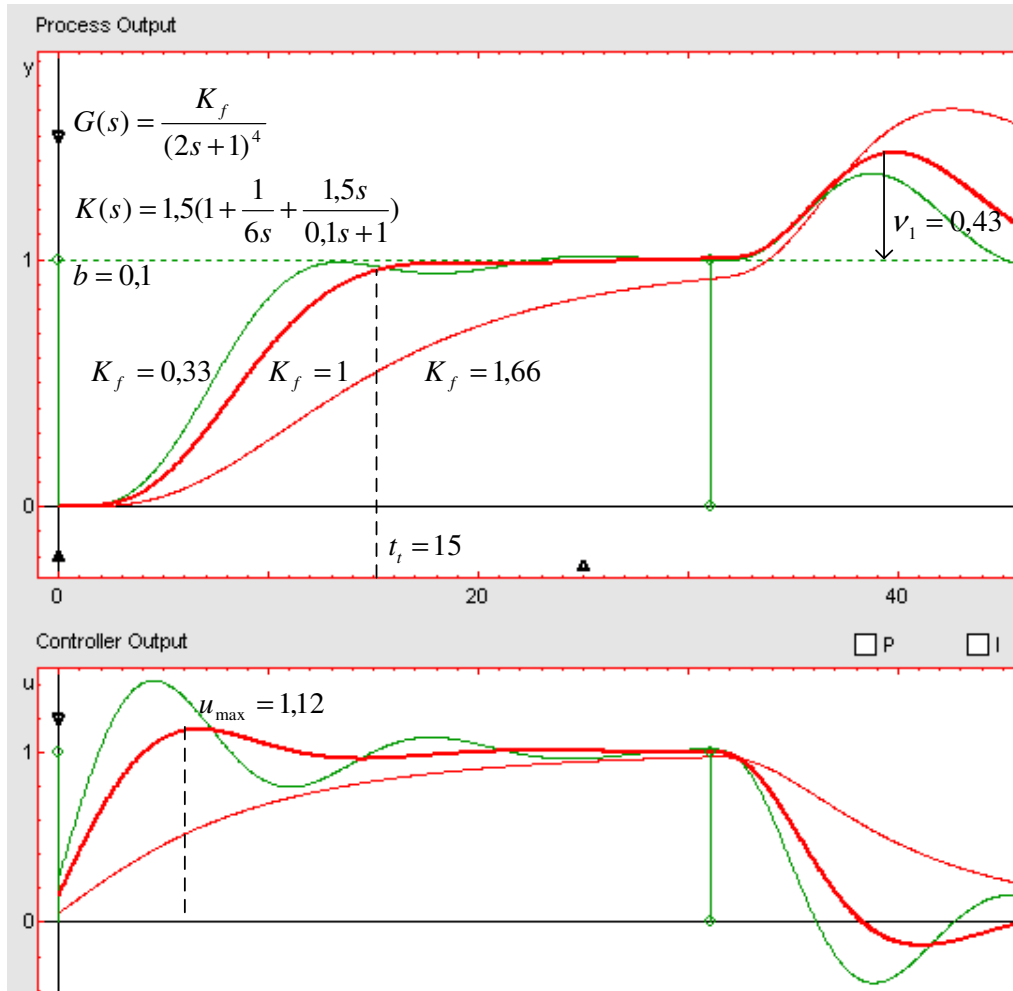


Fig. 14 Ieșirile și comenzile pentru un sistem automat cu funcția de transfer a procesului $G(s)$ incertă și cu un regulator PID cu două grade de libertate după formarea buclei pentru o bandă de trecere extins

3. Formarea buclei poate fi continuată pentru îmbunătățirea performanțelor. În Fig. 11 se prezintă funcția de sensibilitate complementară a sistemului de reglare automată. Valoarea maximă este $M_t = 1,32$ iar banda de trecere $\omega_t = 0,4$ rad/s. Funcția de sensibilitate are valoarea maximă $M_s = 1,8$. Dacă se impune ca curba să treacă prin punctul A_2 banda de trecere crește la $0,5$ rad/s. În planul regiunilor de robustețe din Fig. 12 se definește o nouă curbă, denumită CSF, care corespunde tuturor funcțiilor de sensibilitate complementară care trec prin punctul A_2 din Fig. 11. Dacă se modifică rezerva de fază la valoarea $P_m = 56$ pentru ca toate cele trei curbe din Fig. 12 să se intersecteze într-un singur punct se obține noua formă a funcției de transfer cu bucla deschisă $L(s)$ din Fig. 13. Aceasta corespunde unui nou regulator PID cu două grade de libertate și parametrii $K_c = 1,5$, $T_i = 6$, $T_d = 1,5$, $b = 0,1$, $N = 10$. Funcțiile de sensibilitate au valorile maxime $M_t = 1,06$ și $M_s = 1,65$ mult mai bune decât în cazul precedent. Performanțele în domeniul timp pot fi determinate din răspunsul indicial din Fig. 14. Suprareglarea este zero iar durata procesului tranzitoriu s-a micșorat la $t_t = 15$ față de 26 din etapa precedentă a proiectării. În regim de respingere a perturbației durata procesului tranzitoriu se micșorează tot la $t_t = 15$ iar suprareglarea se modifică puțin la valoarea $v_1 = 0,46$

față de 0,5 în cazul precedent. Mai mult, datorită valorii mici a lui $M_t = 1,06$ sistemul este foarte robust la incertitudinea valorii funcției de transfer a procesului $G(s)$. Din Fig. 14 rezultă că variații de 66% în valoarea constantei de proporționalitate K_f a procesului nu provoacă o deteriorare pronunțată a stabilității.

Față de alte metode de proiectare a reguletoarelor, de exemplu metoda locului rădăcinilor, metoda formării buclei exemplificată în lucrare permite luarea în considerare în mod explicit a incertitudinii cunoașterii procesului și a robusteții performanțelor sistemului de reglare automată. Regulatorul cu două grade de libertate implementat ușor în varianta numerică permite îmbunătățirea puternică a performanțelor în regim de urmărire a referinței.

Bibliografie

- [1] Astrom K. J., **Control System Design**, Lund Institute of Technology, 2002.
- [2] Astrom K. J., **Model Uncertainty and Robust Control Design**, COSY Valencia Workshop, Sept., 1999.
- [3] Guzmán J. L., Åström K. J., Dormido S., Hägglund T., Pigué Y., **Interactive Learning Modules for PID Control**, <http://www.calerga.com/contrib/1/index.html>.
- [4] Dorf R., C., Bishop R., H., **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, New York, 1998.
- [5] Dutton K., Thompson S., Barraclough., **The art of control engineering**, Addison-Wesley, New York, 1997.
- [6] Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E., **Control System Design**, Prentice Hall, N.Y., 2000.
- [7] Larionescu S., **Accente noi în analiza și proiectarea sistemelor automate**, A XXXVI-a Conferință națională de instalații, Sinaia, 2-5 oct.2001, Vol. 2,p.57-65
- [8] Larionescu S., **Aprecierea robusteții sistemelor automate**, Măsurări și Automatizări, Nr. 2, 2001, p.55-56.
- [9] Larionescu S., **Aspecte moderne în proiectarea inginerescă a sistemelor automate**, A XXXVII-a Conferință națională de instalații, Sinaia, 1-4 oct., 2002, p.5-18.
- [10] Larionescu S., **Teoria sistemelor**, Matrix Rom, Buc., 2006
- [11] Martin C., Milos S., **PID controller design on Internet**, www.PIDlab.com, 2006