

Problema timpului mort în proiectarea asistată de calculator a sistemelor.

Prof. dr. ing. Sorin Larionescu – UTCB

Timpul mort este un parametru foarte important al sistemelor. El are o interpretare fizică clară, caracterizând procesele de transport de material, energie sau informație. Adeseori și procesele distribuite în spațiu sunt caracterizate aproximativ tot cu ajutorul unui timp mort. În practica curentă identificarea unui proces se face cel mai simplu cu ajutorul următorului model de funcție de transfer:

$$H_F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{e^{-s\tau}}{1 + sT_F} \quad (1)$$

în care $U(s)$ și $Y(s)$ sunt intrarea și ieșirea sistemului,

K_F : constanta de proporționalitate,

τ : constanta de timp mort,

T_F : constanta de timp.

În domeniul timp modelul (1) se prezintă sub forma următoarei ecuații diferențiale:

$$T_F \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_F u(t - \tau) \quad (2)$$

Modelul în spațiul stărilor corespunzător lui (2) este:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) = \left[-\frac{1}{T}\right] \cdot [x_1(t)] + \left[\frac{K}{T}\right] \cdot u(t-\tau) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) = [1] \cdot [x_1(t)]\end{aligned}\quad (3)$$

în care $x(t)=[x_1(t)]$ este vectorul stărilor iar

A,B,C și D: matrici, parametrii modelului.

În toate cele trei modele ale sistemului timpul mort apare sub o formă necorespunzătoare. În domeniul frecvență modelul (1) conține timpul mort în componenta de tip exponențial:

$$H_m(s) = e^{-s\tau} \quad (4)$$

iar în domeniul timp modelele (2) și (3) depind de timpul mort în mod implicit. Eliminarea acestor dificultăți se face în mod frecvent prin două metode: aproximarea Pade și transformarea într-un model cu timp discret.

Folosirea aproximării Pade conduce la modele de tip fracție rațională pentru funcția de transfer (4) care conține timpul mort. Prezintă în continuare aproximațiile Pade de ordinul 1,2,3 și 4.

$$e^{-s\tau} = \frac{2-s\tau}{2+s\tau} \quad (5)$$

$$e^{-s\tau} = \frac{12-6s\tau+s^2\tau^2}{12+6s\tau+s^2\tau^2} \quad (6)$$

$$e^{-s\tau} = \frac{120-60s\tau+12s^2\tau^2-s^3\tau^3}{120+60s\tau+12s^2\tau^2+s^3\tau^3} \quad (7)$$

$$e^{-s\tau} = \frac{1680-840s\tau+180s^2\tau^2-20s^3\tau^3+s^4\tau^4}{1680+840s\tau+180s^2\tau^2+20s^3\tau^3+s^4\tau^4} \quad (8)$$

Aproximațiile Pade de ordinul doi și trei sunt cele mai folosite.

Deoarece în practica ingineriască modelul (1) utilizat frecvent, am încercat să determinăm condițiile în care aproximarea Pade este satisfăcătoare. Pentru aceasta am studiat în domeniul timp și frecvență funcțiile de transfer de tip (4) înainte și după aproximarea lor de tip Pade de ordinul 1...9. Un exemplu de răspuns indical și diagrama Bode a fazei sunt prezentate în figura 1. Modulul funcției de transfer (4) este egal cu unu pentru orice frecvență și nu a mai fost reprezentat grafic.

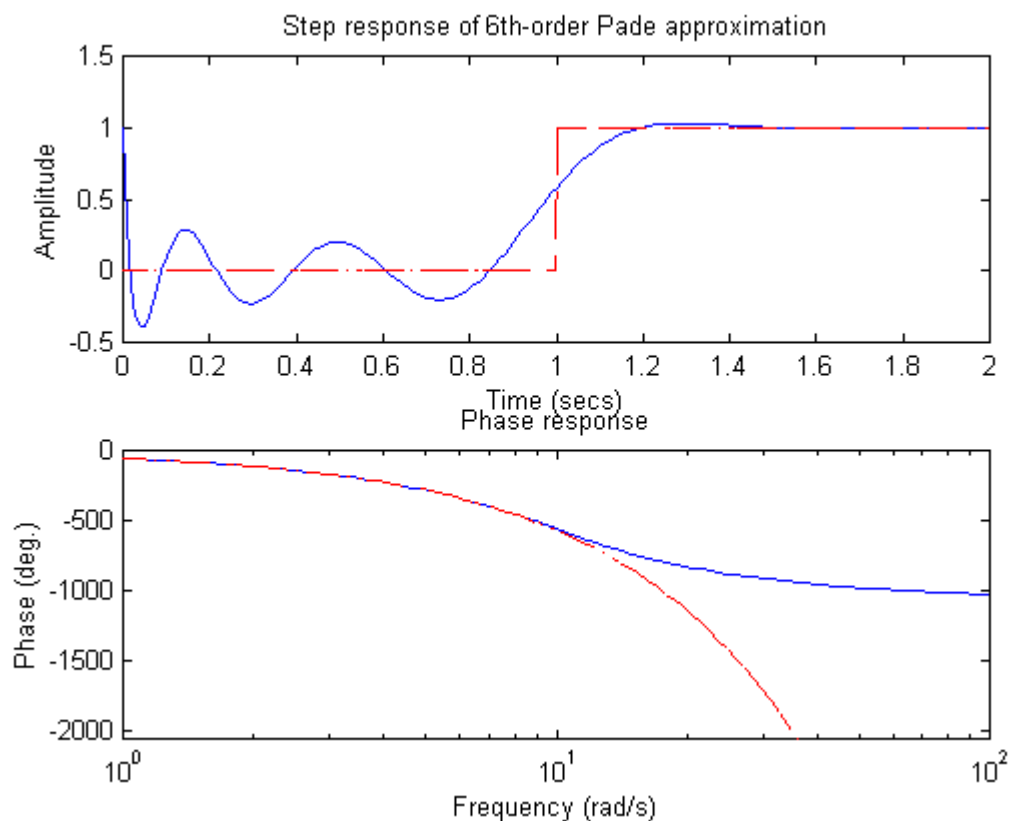


Fig. 1. Funcția de transfer cu timp mort aproximată Pade de ordinul 6 studiată în domeniul timp și domeniul frecvență.

Se observă că timpul mort considerat a fost $\tau=1$ secundă. În domeniul frecvență se observă că aproximarea este bună până la pulsația de 10 radiani/sec. În domeniul timp aproximația este nesatisfăcătoare datorită oscilațiilor care apar în perioada timpului mort de o secundă. Aceste oscilații au aproximativ amplitudinea de 0,3 și perioada de $T_0=0,4$ secunde.

Însă cel mai frecvent timpul mort apare în expresii de tipul (1). Aceasta înseamnă că oscilațiile din figura 1 provocate de aproximarea Pade pot fi atenuate de către filtrul trece jos reprezentat de funcția de transfer de ordinul unu cu care este înmulțită exponențiala cu timp mort. Pentru o atenuare de aproximativ 100 de ori prin filtrare este necesar ca:

$$\frac{100}{T_F} \geq \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (9)$$

Pentru exemplul considerat perioade oscilațiilor este de $T_0=0,4$ secunde și rezultă din (9) că constanta de timp a procesului este $T_F > 6,3$ secunde. În figura 2 se prezintă răspunsul indicial al sistemului cu funcția de transfer (1) în care $K=1$, $\tau=1$ s și $T_F=6,3$ s. Se observă că oscilațiile din perioada timpului mort (fig. 1) s-au micșorat de aproximativ 100 de ori.

Pentru timpi morți diferiți de 1 secundă perioada oscilațiilor poate fi exprimată cu următoarea relația determinată prin experimente simulate:

$$T_0 = (1 - 0,1n)\tau \quad (10)$$

în care $n = 2 \dots 9$ este ordinul aproximației Pade

Din relațiile (9) și (10) rezultă o relație orientativă pentru alegerea ordinului n a aproximației Pade în funcție de raportul între timpul mort τ și constanta de timp T_F a sistemului:

$$\frac{\tau}{T_F} = \frac{2\pi}{100(1 - 0,1n)} \quad (11)$$

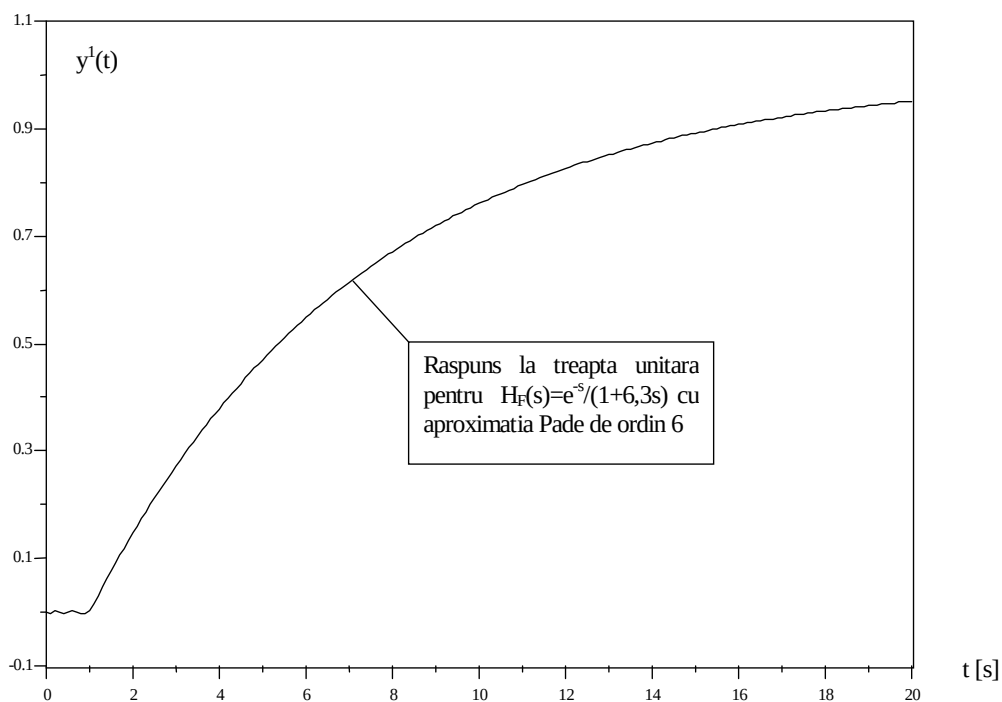


Fig. 2. Simularea unui model continuu cu timp mort. Verificarea relației (11) pentru $n=6$, $\tau=1s$ și $T_F=6.3s$.

Intr-un mod global și aproximativ relația (11) spune că aproximația Pade este utilă pentru funcțiile de transfer de tipul (1) dacă timpul mort nu depășește 10% din constanta de timp a sistemului. Aceasta este și limita pentru care sunt folosite reglatoarele PID pentru conducerea unor sisteme cu această funcție de transfer.

A doua metodă de reprezentare a timpului mort constă în folosirea modelelor cu timp discret. Pentru aceasta se introduce la intrarea blocului cu funcția de transfer (1) un eșantionor și un extrapolator de ordin zero, iar la ieșire un eșantionor, ca în figura 3.

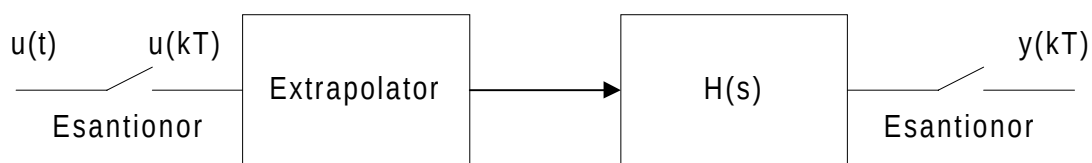


Fig. 3. Modelul numeric echivalent al unei funcții de transfer.

Raportul dintre transformata z a ieșirii discretizate și transformata z a intrării discretizate formează funcția de transfer discretă. Pentru cazul particular (1) se obține din tabele relația următoare:

$$H_F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = K_F z^{-n} \frac{1 - e^{-T/T_F}}{z - e^{-T/T_F}} \quad (12)$$

în care T este perioada de eșantionare iar n este determinat de relația:

$$n = \text{int}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (13)$$

Dacă $K_F=1$, $T_F=1s$ și $T=1s$ atunci (12) devine:

$$H_F(z) = z^{-1} \frac{0.63}{z - 0.37} \quad (14)$$

Răspunsul la semnal treaptă unitară pentru această funcție de transfer este prezentat în figura 4. Comparativ cu figura 2 se observă că timpul mort este reprezentat exact deși constanta de timp a sistemului T_F este mult mai mică, 1 secundă față de 6,3 secunde.

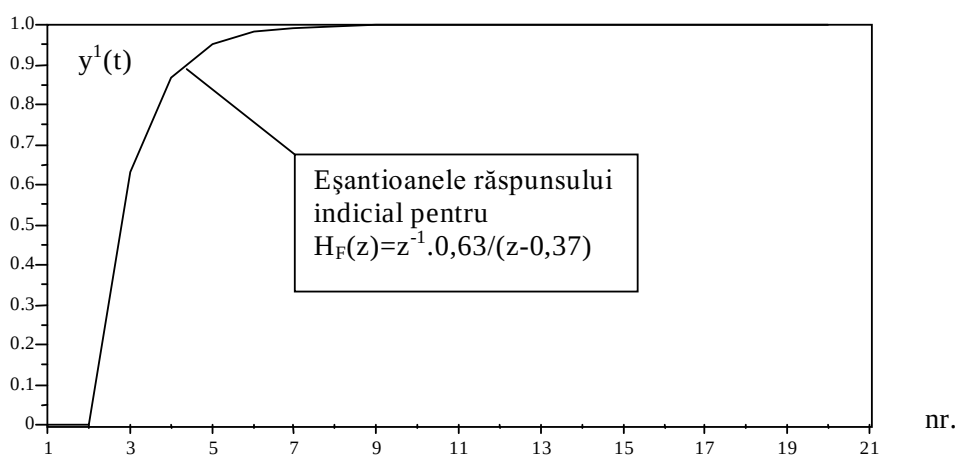


Fig. 4. Simularea unui model discret cu timp mort.

După cum se observă, în figura 4 valorile dintre eșantioane sunt interpolate liniar. Datorită perioadei mari de eșantionare, $T=1s$ comparativ cu constanta de timp $T_F=1s$, răspunsul indicial are un aspect foarte aproximativ. Se poate micșora perioada de eșantionare dar în acest caz crește ordinul modelului n determinat de relația (13).

O altă dificultate apare la folosirea modelului discret în cazul în care raportul dintre timpul mort τ și perioada de eșantionare T în relația (13) nu este un număr întreg. Soluția acestei probleme am găsit-o în aproximarea Pade de ordin unu (5) a restului.

Cele două metode de reprezentare a timpului mort le-am concretizat în două program Scilab prezentate în listele 1 și 2.

În concluzie, pentru sistemele obișnuite, întâlnite frecvent în practică, consider că metoda aproximației Pade este foarte utilă în analiza sistemelor iar metoda modelului discret în simularea sistemelor. Am folosit aproximația Pade de ordinul doi cu succes în analiza sistemelor automate prin metoda locului rădăcinilor. Programul de simulare KitSAS pe care l-am elaborat folosește metoda modelului discret fără aproximarea Pade a restului.

Bibliografie

1. Dorf R., Bishop R., Modern Control Systems, Addison-Wesley, New York, 1998.
2. Dumitrache I., Dumitru S., Miha I., Munteanu F., Musca Gh., Calcev C., Automatizări electronice, Ed. didactică și pedagogică, Buc., 1993.
3. Dutton K., Thompson S., Barraclough., The art of control engineering, Addison-Wesley, New York, 1997.
4. Ionescu C., Vlădeanu V., Larionescu S., Ionescu D., Automatizări, Ed. didactică și pedagogică, Buc., 1982.
5. Larionescu S., KitSAS – Simularea și Analiza Sistemelor, Matrix Rom, Buc., 1999.
6. Scilab Group, Introduction to Scilab, INRIA, Unite de recherche de Rocquencourt, Projjet Meta2, France, <http://www-rocq.inria.fr/scilab/>.

Lista 1. Programul Scilab pentru construirea unei funcții de transfer cu timp mort prin aproximarea Pade.

```
function [H]=pade(T,n)
a=[];b=[];
[nargout,nargin] = argn(0)
// PADE Aproximatia Pade a timpului mort.
// [H] = PADE(T,n) determina aproximatia
//Pade de ordin n a functiei de transfer exp(-T*s).
//H este un obiect tip functie de transfer.
ni = nargin;
no = nargout;
if ni==1 then
    n = 1;
elseif n<0|T<0 then
    error("T si N trebuie sa fie nenegative.");
end
n = round(n);
// Coeficientii aproximatiei Pade
// se determina recursiv
// h[k+1] = (N-k)/(2*N-k)/(k+1) * h[k], h[0] = 1
// exp(-T*s) ==
// Sum { h[k] (-T*s)^k } / Sum { h[k] (T*s)^k }
if T>0 then
    a = zeros(1,n+1);
    a(1) = 1
    b = zeros(1,n+1);
    b(1) = 1
    for k = 1:n
        fact = T*(n-k+1)/(2*n-k+1)/k;
        %v2 = (-fact)*a(k)
        a(1,k+1) = %v2(:).';
        %v2 = fact*b(k)
        b(1,k+1) = %v2(:).';
    end
```

```
%v1 = a/b(n+1)
a = %v1(:,$:-1:1);
%v1 = b/b(n+1)
b = %v1(:,$:-1:1);
else
    a = 1;
    b = 1;
end //if T>0
for k=1:n+1
    a1(k)=a(n-k+2)
    b1(k)=b(n-k+2)
end //for k
num=poly(a1, 's', 'coef')
den=poly(b1, 's', 'coef')
H=syslin('c', num/den);
```

*Lista 2. Programul Scilab pentru transformarea unui model **continuu** într-un model **discret** cu **timp mort**.*

```
function [Hz]=s2z(Hs, T, Tm)
// O functie de transfer in s
// este transformata intr-o functie de transfer in z
// Hz=s2z(Hs, T {,Tm})
// Hz - functie de transfer in z
// Hs - functie de transfer in s obtinuta cu syslin
// T - perioada de esantionare
// Tm - timpul mort, facultativ
[nargout,nargin] = argn(0)
ni = nargin;
no = nargout;
if ni == 3 then
// restul timpului mort care nu poate fi discretizat
nmort=Tm/T;
n=int(nmort);
Tr=Tm-n*T;
// aproximatia pade2 a restului
num=poly([2, -Tr], 's', 'coef');
den=poly([2, Tr], 's', 'coef');
pade2=syslin('c', num/den)
h=Hs*pade2;
ssd=dscr(h, T);
sd=ss2tf(ssd);
Hmort=1/(%z^n);
Hz=Hmort*sd;
else
ssd=dscr(Hs, T);
Hz=ss2tf(ssd);
end
```