

MODUL-5 SOLUSI UMUM DAN KHUSUS PERSAMAAN SCHRÖDINGER

1. Pendahuluan

Fungsi diri (eigen function) yang dapat memberikan informasi tentang perilaku suatu zarah yang sedang ditinjau/ diamati merupakan solusi khusus persamaan Schrödinger. Solusi yang pertama kali diperoleh dari persamaan Schrödinger masih merupakan solusi umum. Setelah diberlakukan beberapa syarat batas dan syarat normalitas terhadap solusi umum sehingga bentuknya mengalami perubahan, barulah mejadi solusi khusus.

2. Persamaan Schrödinger Tidak Bergantung Waktu

Persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu dalam tiga dimensi (3-D) dituliskan seperti berikut:

$$\nabla^2 y(\mathbf{r}) + \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V(\mathbf{r})] y(\mathbf{r}) = 0 \dots\dots\dots(01)$$

Penulisannya dalam satu dimensi (1-D) adalah:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V(x)] y(x) &= 0 \\ \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V(x)] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(02)$$

Apabila  $y(x) = A \exp [- i k(x) x]$ , maka dari (02) dapat diperoleh persamaan ciri (karakteristik) tentang perilaku zarah:

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V(x)] \\ \frac{(k \hbar)^2}{2m_0} &= [E - V(x)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(03)$$

Dalam tinjauan mekanika klasik persamaan (03) merupakan kuantitas energi kinetik pada ruas kanan, dan selisih antara energi total dengan energi potensial pada ruas kiri. Dalam tinjauan mekanika kuantum ruas kiri berhubungan dengan angka gelombang, dan ruas kanan merupakan penentu perilaku gerak zarah, tergantung pada mana yang lebih besar apakah energi total yang dimiliki oleh zarah atau apakah energi potensial yang merupakan pengaruh luar terhadap gerak zarah.

2.1. Gerak Zarah Bebas [ $V(x) = 0$ ]

Salah satu solusi yang paling sederhana menurut persamaan (03) adalah gerak zarah bebas, yaitu gerakan yang tidak dipengaruhi oleh potensial, sehingga angka gelombang akan memiliki bentuk seperti:

$$k = \pm \sqrt{\frac{2m_0 E}{\hbar^2}}; \quad V(x) = 0 \dots\dots\dots(04)$$

Solusi umum dari persamaan Schrödinger seperti ini akan berbentuk:

$$y(x) = A \exp[+ikx] \dots\dots\dots(05)$$

Timbul pertanyaan: bagaimana perilaku angka gelombang  $k$  ?\*) Pertanyaan itu dapat dijawab dari keberlakuan syarat keberkalaan bagi sebuah angka gelombang yang ditulis seperti:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{2m_0 E}{\hbar^2}} &= \frac{2p}{l} n \rightarrow E_n = \left( \frac{2p^2}{l^2} \right) \frac{\hbar^2}{m_0} n^2 \\ E_n &= \frac{\hbar^2}{2m_0 l^2} n^2; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(06)$$

Perilaku angka gelombang memberikan spektrum nilai bagi energi total  $E$  yang sebenarnya hanya merupakan energi kinetik (karena lepas dari pengaruh energi potensial) yang boleh berharga menurut kelipatan pangkat dua dari nilai  $n$ . Pernyataan (06) itu tidak lain merupakan nilai diri (eigen value) untuk setiap angka bilangan bulat (integer)  $n$ . Sedangkan solusi umum dan pasangannya yang dipilih, misalnya ditulis seperti:

$$y_n(x) = A \exp\left[+i \frac{2p}{l} n x\right] \rightarrow y_n^*(x) = A^* \exp\left[-i \frac{2p}{l} n x\right] \dots\dots\dots(07)$$

Syarat batas sekaligus menjadi syarat normalitas digunakan untuk membentuk solusi umum menjadi solusi khusus, dengan transformasi integrasi dalam ruang- $x$  dari  $-\infty$  sampai  $+\infty$

---

\*) Sesuai dengan namanya angka gelombang itu [ $k = 2p(l/l)$ ] merupakan jumlah gelombang dalam suatu bentangan ruang, atau hasil bagi antara bentangan ruang dengan panjang gelombangnya dikali dengan  $2p$ . Sedangkan panjang gelombang ( $l$ ) sendiri merupakan keberkalaan gelombang dalam dimensi ruang. Serupa dengan itu, periode ( $T$ ) adalah keberkalaan gelombang dalam dimensi waktu dan frekuensi [ $f = 2p(l/T)$ ] adalah jumlah gelombang dalam suatu bentangan waktu, atau hasil bagi antara bentangan waktu dengan periodanya dikali dengan  $2p$ .

menjadi dalam ruang- $q$  ( $= kx$ ) dari 0 sampai  $2p$ . Prosesnya dapat dilihat dalam urutan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} y_n^*(x) y_n(x) dx = 1 \rightarrow \int_0^{2p} AA^* \left( \frac{1}{k} \right) d(kx) = 1 \\ AA^* \left( \frac{1}{2p} \right) (2p) = 1 \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{I}} \rightarrow y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{I}} \exp \left[ i \frac{2p}{I} nx \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(08)$$

Pernyataan akhir dari persamaan (08) itulah yang merupakan solusi khusus dari persamaan Schrödinger bagi zarah yang bergerak bebas dan disebut sebagai fungsi diri (eigen function). Hasil telaah terhadap nilai petala  $n$ , nilai diri  $E_n$ , dan fungsi diri  $y_n$  dimuat dalam Tabel-1.

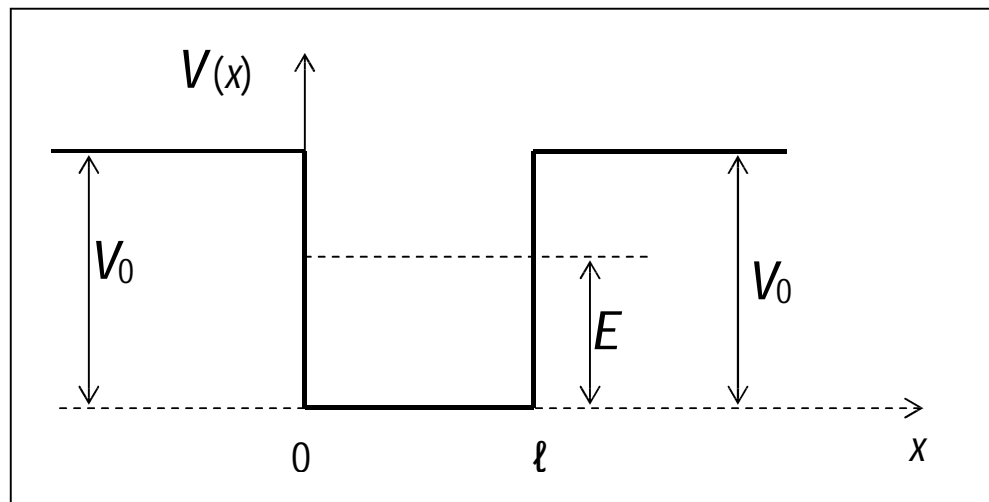
Tabel-1 Solusi persamaan Schrödinger beserta petala (tingkatan energi) gerak zarah bebas

Petala (aras)	Nilai Diri	Fungsi Diri
$n = 1$	$E_1 = \frac{h^2}{2m_0 I^2}$	$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{I}} e^{i \frac{2p}{I} x}$
$n = 2$	$E_2 = \frac{4h^2}{2m_0 I^2}$	$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{I}} e^{i 2 \left( \frac{2p}{I} \right) x}$
$n = 3$	$E_3 = \frac{9h^2}{2m_0 I^2}$	$y_3(x) = \frac{1}{\sqrt{I}} e^{i 3 \left( \frac{2p}{I} \right) x}$
$n = 4$	$E_4 = \dots\dots\dots$	$y_4(x) = \dots\dots\dots$

Barisan petala  $n$  menjelaskan bahwa energi gerak zarah bebas, tidak lagi bersifat kontinyu, tetapi hanya boleh yang bernilai sesuai dengan urutan pembesaran bilangan bulat: 1, 2, 3, 4, dst. Tidak ada energi yang diperbolehkan di antara selang selang bilangan bulat itu. Kondisi seperti inilah yang merupakan gambaran kwantisasi energi tercatu (diskrit) dalam mekanika kuantum, sehingga berbeda dengan gambaran energi total dalam mekanika klasik yang bersifat kontinyu.

## 2.2. Gerak Zarah Dalam Potensial Sumur [ $V(x) \neq 0$ ]

Potensial yang berpengaruh pada gerak zarah berenergi  $E$  terbagi menurut tiga bentangan, yaitu: bentangan tengah tidak memiliki potensial, sedangkan bentangan kiri dan kanan memiliki potensial  $V_0$  yang lebih besar dari nilai  $E$ . Gambaran potensial yang dimaksud dapat dilihat pada Gambar-1 dan Tabel-2.



Gambar-1 Potensial bergantung pada  $x$  (potensial sumur) yang berpengaruh pada gerak zarah

Tabel-2 Bentangan potensial sumur pada sumbu  $x$  yang berpengaruh pada gerak zarah

Selang Bentangan	Potensial	Penamaan Bentangan
$-\infty < x < 0$	$V(x) = V_0$	Wilayah-I
$0 < x < l$	$V(x) = 0$	Wilayah-II
$l < x < +\infty$	$V(x) = V_0$	Wilayah-III

Berdasarkan Gambar-1 dan Tabel-2 dapat dituliskan persamaan Schrödinger dengan rincian persamaan ciri dan solusi umumnya pada setiap wilayah. Tampak jelas gelagat solusi umum untuk wilayah-2 dan wilayah-3 memperlihatkan kemiripan, yaitu akan berupa fungsi-fungsi eksponensial, sedangkan untuk wilayah-2 solusi umumnya akan berbentuk fungsi osilator. Apabila nilai keberlakuan potensial  $V_0$  yang berpengaruh dan energi zarah  $E$  dalam tinjauan ini memenuhi kriteria  $0 < E < V_0$ , maka gambaran penurunan solusi umumnya dapat dilihat pada Tabel-3.

Tabel-3 Persamaan Schrodinger beserta solusi umumnya pada tiga wilayah potensial

Wilayah-1 $-\infty < x < 0$	Wilayah-2 $0 < x < \ell$	Wilayah-3 $\ell < x < +\infty$
$y_1'' + k_1^2 y_1 = 0$	$y_2'' + k_2^2 y_2 = 0$	$y_3'' + k_3^2 y_3 = 0$
$k_1^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V_0]$	$k_2^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E$	$k_3^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V_0]$
$k = \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} [V_0 - E]}$	$k = \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} E}$	$k = \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} [V_0 - E]}$
$y_1 = A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx}$	$y_2 = A_2 \sin kx + B_2 \cos kx$	$y_3 = A_3 e^{kx} + B_3 e^{-kx}$

Syarat batas bagi solusi umum pada wilayah-1 adalah apabila  $x \rightarrow -\infty$ , nilai  $y_1$  tetap harus berhingga, maka  $B_1$  harus bernilai 0. Sebaliknya syarat batas bagi solusi umum pada wilayah-3 adalah apabila  $x \rightarrow +\infty$ , nilai  $y_3$  tetap harus berhingga, maka  $A_3$  harus bernilai 0. Dengan persyaratan ini, maka solusi umum pada wilayah-1 dan wilayah-3 menjadi:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= A_1 \exp \left[ x \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} (V_0 - E)} \right] \\ y_3(x) &= B_3 \exp \left[ -(x - \ell) \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} (V_0 - E)} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(09)$$

Pencarian solusi khusus dalam kondisi seperti ini dapat dilanjutkan sendiri dengan menerapkan syarat kontinuitas pada  $x=0$  antara  $y_1$  dan  $y_2$ , dan pada  $x=\ell$  antara  $y_2$  dan  $y_3$ . Dalam modul ini akan difokuskan pada kasus  $x \rightarrow +\infty$ , dan  $V_0 \rightarrow +\infty$ , sehingga pernyataan (09) menjadi lenyap. Kelenyapan pernyataan (09) membentuk syarat batas baru bagi solusi umum pada wilayah-2, yaitu:

$$\left. \begin{aligned} y_2(x) &= A_2 \sin kx + B_2 \cos kx \\ y_2(x=0) &= B_2 \cos k \cdot 0 = B_2 = 0 \\ y_2(x=\ell) &= A_2 \sin k\ell = 0 \rightarrow \sin k\ell = 0; A_2 \neq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

Nilai diri (eigen value) dapat diperoleh dari persamaan (10), yaitu:

$$k\ell = n\pi \rightarrow k^2 = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \rightarrow \frac{2m_0 E}{\hbar^2} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \rightarrow E_n = \frac{1}{2m_0} \left(\frac{n\pi \hbar}{\ell}\right)^2 \dots\dots\dots(11)$$

Nilai bilangan bulat (integer)  $n = 1, 2, 3, 4, \dots\dots\dots$  Solusi umum pada wilayah-2 sehubungan dengan nilai diri pada pernyataan (11) menjadi:

$$y_n(x) = A_n \sin \left[ \left( \frac{np}{1} \right) x \right] \dots\dots\dots(12)$$

Dalam hal ini telah terjadi penggantian  $A_2$  oleh  $A_n$  dan  $y_2$  oleh  $y_n$  sesuai dengan nilai diri yang telah diperoleh dan sehubungan dengan tidak ada lagi  $y_1$  dan  $y_3$  sebagai solusi dari wilayah-1 dan wilayah-3. Satu buah syarat lagi yang dapat memberikan nilai terhadap  $A_n$  adalah syarat normalitas, yaitu:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 y_n^* y_n dx &= A_n^2 \int_0^1 \sin^2 \left( np \frac{x}{1} \right) dx = 1 \\ A_n^2 \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \cos(2np \frac{x}{1})) dx &= \frac{1}{2} A_n^2 \cdot 1 = 1 \rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

Dengan perolehan pada pernyataan (13), maka fungsi diri gerak zarah dalam sumur potensial dapat dituliskan menjadi:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{1}} \sin \left( np \frac{x}{1} \right) \dots\dots\dots(14)$$

Sampai di sini telah diperoleh sejumlah solusi khusus sebagai fungsi diri sesuai dengan nilai dirinya untuk setiap petala, setelah memenuhi serangkaian syarat batas dan normalitas. Hasil perolehan tersebut dapat dilihat pada Tabel-4.

Tabel-4 Petala nilai diri dan fungsi diri gerak zarah dalam sumur potensial

Petala (aras)	Nilai Diri	Fungsi Diri
$n = 1$	$E_1 = \frac{1}{2m_0} \left( \frac{p h}{1} \right)^2$	$y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{1}} \sin \left[ p \frac{x}{1} \right]$
$n = 2$	$E_2 = \frac{4}{2m_0} \left( \frac{p h}{1} \right)^2$	$y_2(x) = \sqrt{\frac{2}{1}} \sin \left[ 2p \frac{x}{1} \right]$
$n = 3$	$E_3 = \frac{9}{2m_0} \left( \frac{p h}{1} \right)^2$	$y_3(x) = \sqrt{\frac{2}{1}} \sin \left[ 3p \frac{x}{1} \right]$
$n = 4$	$E_4 = \dots\dots\dots$	$y_4(x) = \dots\dots\dots$

### 3. Penutup

Beberapa resume tentang perilaku fungsi diri dapat ditelusur ulang setelah melewati beberapa butir pointer seperti berikut:

- Suatu fungsi diri dikatakan terintegrasi secara kuadratis dalam selang ( $a < x < b$ ) apabila memenuhi rumusan:

$$\int_a^b y^* y \, dx \text{ bernilai berhingga } [ < \infty ]$$

- Jika  $y$  dan sejumlah turunannya mendekati nol pada tepi batas  $|x| \rightarrow \infty$  dan  $\int_{-\infty}^{+\infty} y^* y \, dx$  bernilai berhingga, maka  $y$  dikatakan sebagai fungsi yang dapat dinormalisasi (normalizable function).
- Jika  $y$  memenuhi  $\int_a^b y^* y \, dx = 1$ , maka  $y$  dikatakan sebagai fungsi normal, uniter (unitary), atau ternormalisasi dalam selang ( $a < x < b$ ).
- Jika  $y_1, y_2, y_3, \dots$  sebagai suatu himpunan merupakan fungsi ternormalisasi dalam selang ( $a < x < b$ ), maka himpunan tersebut dikatakan ternormalisasi.
- Jika suatu himpunan bersifat normal dan orthogonal dalam suatu selang, maka himpunan tersebut dikatakan orthonormal.

