Manual de Laboratorio

Este Manual ha sido diseñado para servir de apoyo en la realización de las practicas de laboratorio de Fisica I y II.

Parte del material utilizado para la confección de este Manual ha sido adaptado y traducido del libro *An Introduction to Error Analysis* de John R. Taylor (2da edición).

Bibliografía sugerida

Experimentación, por D.C. Baird (Prentice Hall Hispanoamericana, 1991).

An Introduction to Error Analysis, por J.R. Taylor (University Science Books, 1997).

Introducción

El proceso de medición es de fundamental importancia en la actividad científica, cualquiera sea la especialidad u orientación. En las ciencias aplicadas, por ejemplo, los ingenieros que trabajan en diseño deben conocer las características de los materiales que planean utilizar. Es decir, alguien debe caracterizar estos materiales a través de mediciones y, una vez realizadas estas mediciones, debe establecer su grado de incerteza, lo cual requiere un análisis de errores. Los ingenieros que están a cargo de la seguridad de los aviones, trenes o automóviles deben estimar, por ejemplo, las incertezas relacionadas con los tiempos de respuesta humanos, tanto en la distancia de frenado como en una gran variedad de otras cantidades. Una falla en el análisis de errores puede traer como consecuencia accidentes increíbles.

En las ciencias básicas, el proceso de medición y el análisis del error tienen una importancia aun mayor, pues están relacionados íntimamente con el método científico. El proceso o método científico funciona de la siguiente forma: en primer lugar, tratamos de describir alguna clase de fenómeno de la naturaleza a través de un modelo matemático simple. Analizamos el modelo ya sea analíticamente, con lápiz y papel, o a través de simulaciones numéricas, tratando de encontrar cuáles son las consecuencias o predicciones del modelo simple. Una vez obtenidas, las comparamos con experimentos y observaciones. Si existe un acuerdo entre lo predicho y lo observado, entonces decimos que hemos logrado, en algún sentido, comprender parte de la naturaleza. A pesar de que esta descripción simple del proceso científico es cruda y epistemológicamente criticable, nos muestra que tanto el surgimiento de nuevas teorías como la verificación de sus predicciones dependen de observaciones y mediciones.

Proceso de medición y errores

Aunque existen innumerables procesos de medición diferentes, todos ellos culminan con la obtención de un resultado, el cual es afectado por distintos errores que surgen de la interacción entre el aparato de medida, el observador y el sistema bajo estudio. Veamos con algunos ejemplos cómo es la interacción entre estos tres elementos. Supongamos, en primer lugar que Ud., joven de buena vista, desea medir con un calibre el diámetro de un postre de gelatina, o la altura de un bizcochuelo esponjoso, recién sacado del horno. Aunque el error asociado con el observador y el instrumento de medida es probablemente pequeño comparado con el valor que se desea medir, el objeto a medir se deformará al contacto con el instrumento, por lo cual el error final de la medición puede ser ostensiblemente mayor que la menor división en la escala del instrumento de medida.

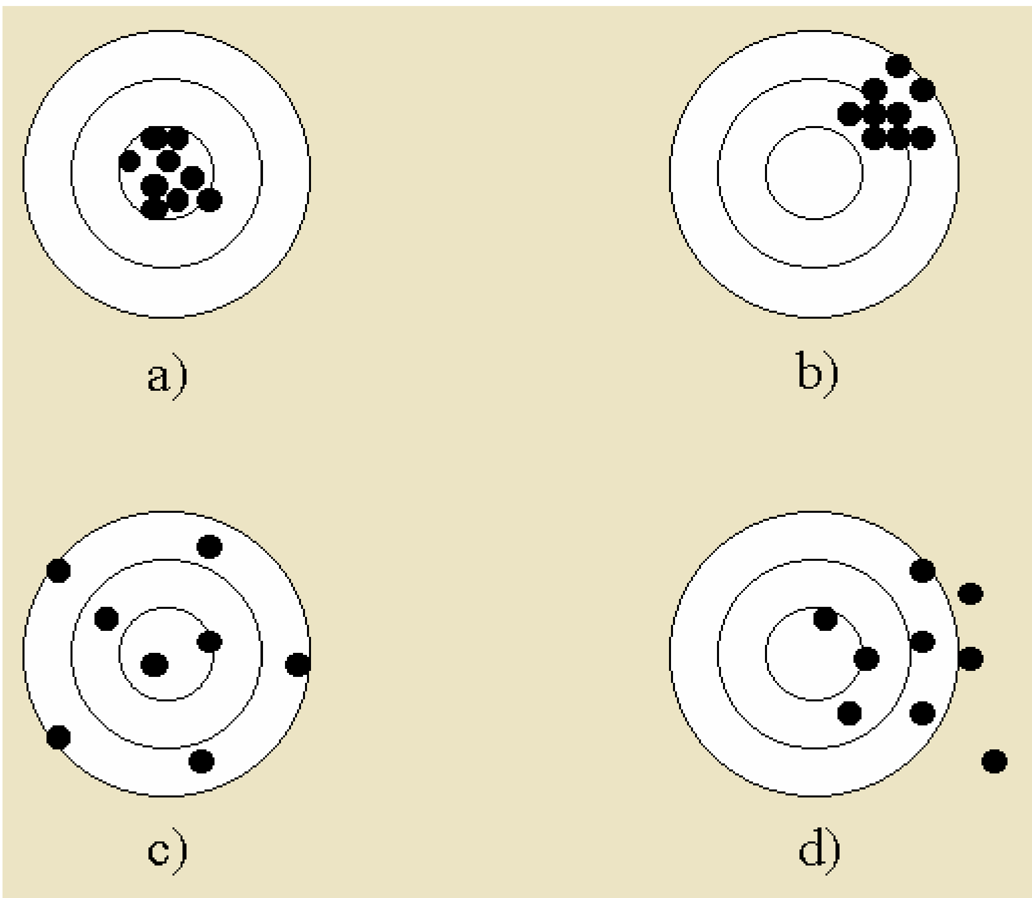
Veamos ahora otra situación: Ud. desea medir el diámetro de un cilindro de acero con un calibre, pero le son colocados unos anteojos de vidrio esmerilado. En este caso, aunque el objeto puede considerarse indeformable dentro de la precisión con que mide el calibre, el error de la medición será probablemente mayor que la mínima división en la escala del instrumento debido a limitaciones en la capacidad de observación. Por último, imagine que Ud., ahora sin los anteojos limitando su visión, trata de medir el diámetro del cilindro de acero usando un centímetro de costura. Está claro ahora que la limitación en la precisión de la medida estará dada por el instrumento de medición.

Los errores asociados a las mediciones pueden dividirse en dos grandes clases: a) errores sistemáticos, y b) errores aleatorios. Los errores sistemáticos, tal como su nombre lo indica, se cometen de una misma manera cada vez que se mide. Muchos errores sistemáticos pueden eliminarse aplicando correcciones muy simples. Un ejemplo de la vida diaria está en el ajuste de cero que Ud. encontrará en las balanzas de baño o cocina. Otro caso de error sistemático es, por ejemplo, el asociado a la medición de la presión atmosférica con un barómetro de mercurio. Allí debe corregirse la lectura por la diferencia en los coeficientes de expansión térmica del mercurio y del material con que está hecha la escala del barómetro. Estos errores son llamados también errores corregibles o determinados, a fines de distinguirlos de los errores aleatorios, los cuales se encuentran en toda medición y están fuera del control del observador.

Los errores sistemáticos no se manifiestan como fluctuaciones aleatorias en los resultados de las mediciones. Por lo tanto, dado que el mismo error está involucrado en cada medición, no pueden eliminarse simplemente repitiendo las mediciones varias veces [imagine, por ejemplo, que Ud. utiliza (sin darse cuenta) una regla a la que le faltan dos centímetros en el extremo del cero]. En cosecuencia, estos errores son particularmente serios y peligrosos, y pueden eliminarse sólo después de realizar cuidadosas calibraciones y análisis de todas las posibles correcciones. Algunas veces, los errores sistemáticos se manifiestan como un corrimiento en valores medidos consecutivamente o como un cambio en el valor experimental medido cuando se cambia la técnica experimental de medición.

La segunda clase de errores, los errores aleatorios o accidentales, aparecen como fluctuaciones al azar en los valores de mediciones sucesivas. Estas variaciones aleatorias se deben a pequeños errores que escapan al control del observador. Por ejemplo, si leemos varias veces la presión indicada por la escala de un barómetro, los valores fluctuarán alrededor de un valor medio. Estrictamente hablando, nunca podremos medir el valor verdadero de ninguna cantidad, sino sólo una aproximación. El propósito del tratamiento de los datos experimentales es justamente determinar el valor más probable de una cantidad medida y estimar su confiabilidad.

Para tener una visión más intuitiva de la diferencia entre errores aleatorios y sistemáticos, observe la analogía presentada en la siguiente figura:



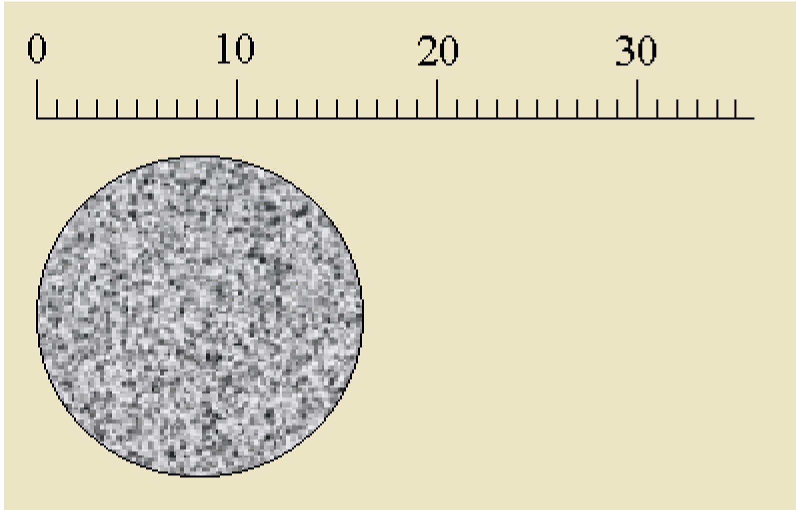
Errores aleatorios y sistemáticos en un ejercicio de práctica de tiro. a) Debido a que las marcas de los disparos están muy cerca unas de otras, podemos decir que los errores aleatorios son pequeños. Debido a que la distribución de disparos está centrada en el blanco, los errores sistemáticos también son pequeños. b) Los errores aleatorios son todavía pequeños, pero los sistemáticos son mucho más grandes –los disparos están sistemáticamente corridos hacia la derecha. c) En este caso, los errores aleatorios son grandes, pero los sistemáticos son pequeños –los disparos están muy dispersos, pero no están sistemáticamente corridos del centro del blanco. d) Aquí ambos errores son grandes.

En este caso, el experimento consiste en una serie de disparos hechos a un blanco de tiro. Aquí los errores aleatorios están producidos por cualquier causa que haga que los proyectiles lleguen aleatoriamente a distintos puntos. Por ejemplo, puede ser que las condiciones atmosféricas entre el arma y el blanco distorsionen la visión del blanco en forma aleatoria. Los errores sistemáticos ocurren cuando existe alguna causa por la cual los proyectiles impactan fuera del centro en una forma sistemática. Podría ser, por ejemplo, que la mira del arma estuviese desviada. A partir de esta figura también podemos definir con claridad dos palabras comúnmente utilizadas en el proceso de medición: precisión y exactitud. Diremos que una medición es precisa cuando la dispersión de los distintos valores obtenidos es pequeña, es decir, cuando los errores aleatorios son pequeños. Por otra parte, diremos que una medición es exacta cuando los errores sistemáticos asociados con ella son pequeños.

Aunque esta figura es una excelente ilustración de los efectos de los errores aleatorios y sistemáticos, es engañosa en cierto sentido. Debido a que hemos dibujado el blanco en cada una de las figuras, podemos ver fácilmente cuán exacto ha sido un disparo en particular. En particular, la diferencia entre los casos a) y b) es evidente: claramente el error sistemático es grande en el caso b). En el laboratorio, sin embargo, no tenemos la referencia del blanco. Nadie nos muestra la posición relativa de los disparos respecto a una referencia externa. Saber la posición de los disparos respecto del centro del blanco equivale en la práctica a conocer el verdadero valor de la cantidad a medir, valor que, por supuesto, nos es desconocido en la inmensa mayoría de los casos. Todo lo que podemos evaluar es la precisión de nuestras mediciones, que está relacionada con la dispersión de nuestros valores. La exactitud, dependiente de los errores sistemáticos que cometemos al medir, es más difícil de evaluar que la precisión. Como dijimos anteriormente, los errores sistemáticos pueden ser difíciles de encontrar, aunque tienen la ventaja de que una vez localizados pueden ser corregidos.

Cómo expresar las incertezas

La forma correcta de escribir el resultado de una medición es dar la mejor estimación del valor de la cantidad medida y el rango dentro del cual Ud. puede asegurar que este valor se encuentra. Convencidos de que no existe tal cosa como el valor *real* de una cantidad a medir, debemos conformarnos con saber dentro de qué intervalo estamos seguros que la cantidad a medir se encuentra. Supongamos, por ejemplo, que deseamos medir el diámetro de una esfera de granito con una regla, como lo muestra la figura.



Midiendo el diámetro de una esfera con una regla.

Observando la figura, podemos decir que el diámetro de la esfera es con seguridad mayor que 16 mm y menor que 17 mm, pero no es posible dar una lectura más precisa. En este caso, expresaremos el resultado como

mejor estimación de la longitud = 16.5 mm,

rango probable: 16 a 17 mm.

Este resultado puede escribirse en forma más compacta como:

valor medido de la longitud = 16.5 ± 0.5 mm.

En general, el resultado de una medición cualquiera se expresa como

$$(\text{valor medido de } x) = x_{\text{mejor}} \pm \Delta x.$$

III.a. Cifras significativas

Existen varias reglas usadas para expresar las incertezas que vale la pena enfatizar. En primer lugar, debido a que la cantidad Δx es una estimación de la incerteza, obviamente no debe establecerse con demasiada precisión. Si medimos la aceleración de la gravedad g, sería absurdo escribir el resultado como

$$(g \text{ medido}) = 9.82 \pm 0.02385 \text{ m/s}^2.$$

No hay forma de conocer la incerteza en la medición con cuatro cifras significativas! En trabajos de gran precisión, las incertezas se establecen a veces con dos cifras significativas, pero para nuestros propósitos podemos establecer la siguiente regla:

Regla para expresar las incertezas

Las incertezas experimentales deben ser redondeadas en la mayor parte de los casos a una sola cifra significativa.

Por lo tanto, si un cálculo resulta en una incerteza Δg = 0.02385 m/s^2, la respuesta debe redondearse a Δg = 0.02 m/s^2, y el resultado anterior debe escribirse

$$(g \text{ medido}) = 9.82 \pm 0.02 \text{ m/s}^2.$$

Esta regla tiene sólo una excepción significativa. Si el primer dígito en la incerteza Δx es un 1, entonces puede ser mejor mantener dos cifras significativas en Δx. Por ejemplo, supongamos que un cálculo resulta en una incerteza Δx = 0.14. Redondear este número a Δx = 0.1 resulta en una disminución substancial (del orden del 40%!), de forma tal que podemos afirmar que es más correcto en este caso retener dos cifras significativas, escribiendo la incerteza como Δx = 0.14.

Una vez que se ha estimado la incerteza en la medición, deben considerarse las cifras significativas del valor medido. Un resultado escrito como

$$\text{velocidad medida} = 6051.78 \pm 30 \text{ m/s}$$

es obviamente ridículo. La incerteza de 30 significa que el dígito 5 podría ser realmente tan pequeño como 2 o tan grande como 8. Claramente, los dígitos siguientes 1, 7 y 8 no tienen ningún significado y debieran ser redondeados. Es decir que la forma correcta de escribir este resultado es

$$\text{velocidad medida} = 6050 \pm 30 \text{ m/s}.$$

La regla general es esta:

Regla para escribir los resultados

La última cifra significativa del resultado debe ser del mismo orden de magnitud (estar en la misma posición decimal) que la incerteza.

Por ejemplo, la respuesta 92.81 con una incerteza de 0.3 debiera redondearse a

$$92.8 \pm 0.3.$$

Si la incerteza es 3, la misma respuesta debiera redondearse a

$$93 \pm 3,$$

y si la incerteza es 30, la respuesta debiera ser

$$90 \pm 30.$$

Tenga en cuenta que estamos refiriéndonos a cómo expresar el resultado final. Las reglas de redondeo obviamente no se aplican a cálculos intermedios.

III.b. Incerteza o error relativo

La incerteza Δx en una medición,

$$(x \text{ medido}) = x_{\text{mejor}} \pm \Delta x,$$

indica la precisión de la medición. Sin embargo, la incerteza Δx por sí misma no nos dice demasiado. Una incerteza de un centímetro en una distancia de un kilómetro indicaría una medición inusualmente precisa, mientras que una incerteza de un centímetro en una distancia de tres centímetros indicaría una estimación grosera. Obviamente entonces, la calidad de una medición no está dada sólo por la incerteza Δx sino también por el cociente entre Δx y x_{mejor}, lo cual nos lleva a definir el error o incerteza relativa:

$$\text{error relativo} = \Delta x \,/\, |x_{\text{mejor}}|.$$

En la mayoría de las mediciones medianamente cuidadosas, la incerteza Δx es mucho menor que el valor medido x_{mejor}. Debido a que el error relativo $\Delta x \,/\, |x_{\text{mejor}}|$ resulta ser entonces un número pequeño, es conveniente a veces multiplicarlo por 100 y referirse a él como el *error o incerteza porcentual*. Por ejemplo, la medición

$$\text{longitud } l = 50 \pm 1 \text{ cm}$$

tiene un error relativo

$$\Delta l \,/\, |l_{\text{mejor}}| = 1 \text{ cm} \,/\, 50 \text{ cm} = 0.02$$

y un error porcentual de 2%. Por lo tanto, el resultado puede escribirse también como

$$\text{longitud } l = 50 \text{ cm} \pm 2\%.$$

El error porcentual es una indicación aproximada de la calidad de la medición, cualquiera sea el tamaño de la cantidad medida. Errores porcentuales del 10% comúnmente caracterizan a las mediciones gruesas. (Una medición gruesa de 10 cm podría tener una incerteza del orden del cm; una medición gruesa de 10 kilómetros podría tener una incerteza del orden del kilómetro). Incertezas relativas del 1 o 2% son características de experimentos razonablemente cuidadosos y están cerca del mejor valor que puede obtenerse en experimentos de laboratorio de nivel introductorio. Errores relativos menores al 1% son difíciles de obtener y son raros de encontrar en el laboratorio de nivel introductorio.

Esta clasificación es, por supuesto, muy gruesa. Por ejemplo, una buena cinta métrica puede medir una distancia de 3 metros con una incerteza del orden de un tercio de milímetro, o aproximadamente 0.1%. En todo caso debemos recordar, sin embargo, que el proceso de medición involucra al aparato de medida, al observador y al sistema a medir, y existen errores asociados a cada uno de ellos. Aunque la cinta métrica de este ejemplo pueda permitir mediciones con una precisión del 0.1%, puede que los demás factores involucrados en la medición empeoren la precisión del resultado final.

Propagación de errores

Qué sucede cuando debemos combinar más de una medición para obtener el resultado buscado? Cómo estimamos la incerteza del resultado final? Veamos algunos casos simples para comenzar. Para estimar la incerteza en la suma $x + y$ o la diferencia $x - y$, tenemos que decidir cuáles son los valores probables más altos y más bajos del resultado. Los valores probables más alto y más bajo para x son $x_{\text{mejor}} \pm \Delta x$, y para y son $y_{\text{mejor}} \pm \Delta y$. Por lo tanto, el valor probable más alto de $x + y$ es

$$x_{\text{mejor}} + y_{\text{mejor}} + (\Delta x + \Delta y),$$

y el valor probable más bajo es

$$x_{\text{mejor}} + y_{\text{mejor}} - (\Delta x + \Delta y).$$

Por lo tanto, la mejor estimación para $q = x + y$ es

$$q_{\text{mejor}} = x_{\text{mejor}} + y_{\text{mejor}},$$

y su incerteza es

$$\Delta q \sim \Delta x + \Delta y\ .$$

Un argumento similar muestra que la incerteza de la diferencia $q = x - y$ está dada por la misma expresión, $\Delta q \sim \Delta x + \Delta y$. (Demuéstrelo!). Es decir que la incerteza en la suma $x + y$ o la diferencia $x - y$ es la suma $\Delta x + \Delta y$ de las incertezas en x e y. En caso de que tengamos varios números x, ..., w a ser sumados o restados, repitiendo el argumento anterior llegamos a la siguiente regla:

Incerteza en las sumas o diferencias

Si se miden varias cantidades $x, \dots, w$ con incertezas $\Delta x, \dots, \Delta w$, y se utilizan los valores medidos para calcular la cantidad

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w),$$

entonces la incerteza en el valor calculado de q es la suma

$$\Delta q \sim \Delta x + \dots + \Delta z + \Delta u + \dots + \Delta w,$$

de todas las incertezas originales.

Veamos ahora el caso de un producto $q = xy$. Sabiendo que el valor medido de x es $x_{\text{mejor}} \pm \Delta x$, y que el valor medido de y es $y_{\text{mejor}} \pm \Delta y$, podemos escribir

$$(\text{valor de } q) = (x_{\text{mejor}} \pm \Delta x)(y_{\text{mejor}} \pm \Delta y).$$

Desarrollando este producto obtenemos

$$(\text{valor de } q) = x_{\text{mejor}}\, y_{\text{mejor}} \pm (\Delta x\, y_{\text{mejor}} + x_{\text{mejor}}\, \Delta y +$$

$$+ \Delta x\, \Delta y).$$

En el caso generalmente encontrado en la práctica en que Δx y Δy son cantidades pequeñas, podemos despreciar el último término del paréntesis frente los dos primeros. Esto nos lleva entonces al siguiente resultado:

$$q_{\text{mejor}} = x_{\text{mejor}}\, y_{\text{mejor}},$$

$$\Delta q \sim \Delta x\, y_{\text{mejor}} + x_{\text{mejor}}\, \Delta y.$$

Es conveniente expresar la incerteza del producto como una incerteza relativa, es decir, dividir esta última expresión por $|q| = |q_{\text{mejor}}| = |xy|$:

$$\Delta q \,/\, |q| \sim \Delta x \,/\, |x| + \Delta y \,/\, |y|.$$

Concluimos entonces que la incerteza relativa del producto de dos cantidades x e y es igual a la suma de las incertezas relativas de x e y. Veamos ahora el caso de la incertidumbre relativa de un cociente $q = x \,/\, y$. En este caso podemos escribir

$$(\text{valor de } q) = x_{\text{mejor}}\,(1 \pm \Delta x/|x|)/[y_{\text{mejor}}\,(1 \pm \Delta y \,/\, |y|)] =$$

$$= (x_{\text{mejor}} \,/\, y_{\text{mejor}})\,[(1 \pm \Delta x \,/\, |x|) \,/\, (1 \pm \Delta y \,/\, |y|)],$$

donde

$$(\text{valor de } x) = x_{\text{mejor}} \pm \Delta x = x_{\text{mejor}}\,(1 \pm \Delta x \,/\, |x|).$$

Nuestro problema ahora es encontrar los valores probables extremos de la cantidad q. Esta cantidad es máxima cuando el numerador alcanza su valor máximo $1 + \Delta x \,/\, |x|$, y el denominador toma su mínimo valor, $1 - \Delta y \,/\, |y|$. Entonces, el valor máximo que puede tomar $q = x/y$ es

$$(\text{valor de } q) = (x_{\text{mejor}} \,/\, y_{\text{mejor}})\,[(1 + \Delta x \,/\, |x|) \,/\, (1 -$$

$$- \Delta y \,/\, |y|)].$$

El factor entre corchetes tiene la forma $(1 + a)/(1 - b)$, donde los números a y b son normalmente pequeños (es decir, mucho menores que 1). Este factor se puede simplificar usando dos aproximaciones. Primero, y teniendo en cuenta que b es pequeño, el teorema del binomio nos permite escribir

$$1 \,/\, (1 - b) \sim 1 + b.$$

Por lo tanto,

$$(1 + a) \,/\, (1 - b) \sim (1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab \sim 1 + a + b,$$

donde, por ser a y b números pequeños, hemos despreciado su producto ab frente a los demás términos de la suma. El valor probable más grande de la cantidad q puede escribirse entonces como

$$(\text{valor más grande de } q) = (x_{\text{mejor}} \,/\, y_{\text{mejor}})\,(1 + \Delta x \,/\, |x| + \Delta y \,/\, |y|).$$

Un cálculo semejante muestra que el valor probable más pequeño está dado por una expresión similar con dos signos negativos (demuéstrelo!). Combinando las dos, encontramos que

$$(\text{valor de } q) = (x_{\text{mejor}} \,/\, y_{\text{mejor}})\ [1 \pm (\Delta x \,/\, |x| + \Delta y \,/\, |y|)].$$

Comparando esta expresión con la forma común de expresar un resultado

$$(\text{valor de } q) = q_{\text{mejor}}\ (1 \pm \Delta q \,/\, |q|),$$

vemos que el mejor valor para q es $q_{\text{mejor}} = x_{\text{mejor}} \,/\, y_{\text{mejor}}$, como esperábamos, y que la incerteza relativa está dada por

$$\Delta q \,/\, |q| \sim \Delta x \,/\, |x| + \Delta y \,/\, |y|.$$

Concluimos entonces que cuando multiplicamos o dividimos dos cantidades medidas x e y, el error relativo de la respuesta es la suma de los errores relativos de x e y. Este resultado lleva a la siguiente regla:

Incerteza en productos y cocientes

Si se miden varias cantidades $x, \ldots , w$ con pequeñas incertidumbres $\Delta x, \ldots , \Delta w$, y los valores medidos se utilizan para calcular

$$q = (x \times \ldots \times z) \,/\, (u \times \ldots \times w), \text{q} = (x \times \ldots \times z) \,/\, (u \times \ldots \times w), \text{q} = (x \times \ldots \times z) \,/\, (u \times \ldots \times w),$$

entonces la incertidumbre relativa del valor calculado de q es la suma

$$\Delta q \,/\, |q| \sim \Delta x \,/\, |x| + \ldots + \Delta z \,/\, |z| + \Delta u \,/\, |u| + \ldots$$

$$\ldots + \Delta w \,/\, |w|$$

de las incertidumbres relativas en $x, \ldots , w$.

Esta regla contempla un par de casos particulares: la multiplicación de una cantidad medida por una constante, y la incerteza al calcular una potencia de una cantidad medida. En el caso de la multiplicación por una constante B, $q = Bx$, la incerteza relativa de este producto es la suma de las incertezas relativas de los factores. Como $\Delta B = 0$, entonces la incerteza relativa de q es igual a la incerteza relativa de x, o sea $\Delta q \,/\, |q| = \Delta x \,/\, |x|$. El resultado puede entonces escribirse como la siguiente regla:

Cantidad medida multiplicada por un número exacto

Si se mide una cantidad x con incerteza Δx y se utiliza para calcular el producto

$$q = Bx, \mathrm{q} = Bx, \mathrm{q} = Bx,$$

donde B no tiene incerteza, entonces la incerteza en q es $|B|$ veces la incerteza en x,

$$\Delta q = B\ \Delta x.$$

El segundo caso particular de la regla de adición de incertezas relativas para el producto contempla el caso de elevar a una potencia una cantidad medida. Por ejemplo, podemos medir la velocidad v de un objeto y luego calcular v^2 para encontrar su energía cinética. Debido a que $v^2 = v \times v$, la incerteza relativa de la cantidad v^2 es el *doble* de la incerteza relativa en v. La regla general para las potencias es entonces como sigue:

Incerteza en una potencia

Si se mide una cantidad x con una incerteza Δx y el valor medido se utiliza para calcular la potencia

$$q = x^n, \mathrm{q} = x^n, \mathrm{q} = x^n,$$

entonces el error relativo en q es n veces aquel en x, o sea

$$\Delta q \ / \ |q| = n\ \Delta x \ / \ |x|.$$

Aunque no lo hemos demostrado, esta regla vale para todo n real. Para el caso en que en exponente n es negativo, $\Delta q \ / \ |q| = |n|\ \Delta x \ / \ |x|$.

Interpretación a través de gráficos

No es extraño que la interpretación de una serie de mediciones sea más fácil a través de análisis de un gráfico bien confeccionado que a partir de una tabla construida con los resultados de las mediciones. La confección e interpretación de gráficos es de gran importancia tanto en el análisis teórico como en el experimental. En esta Sección trataremos brevemente el tema de la interpretación de gráficos. El Apéndice B trata con detalle el tema de su confección. Muchas leyes físicas implican una proporcionalidad entre dos cantidades medibles experimentalmente.

Por ejemplo, la ley de Hooke establece que el estiramiento de un resorte es proporcional a la fuerza que lo deforma, y la segunda ley de Newton establece que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta aplicada. Muchos experimentos de laboratorio están diseñados para verificar esta clase de proporcionalidad.

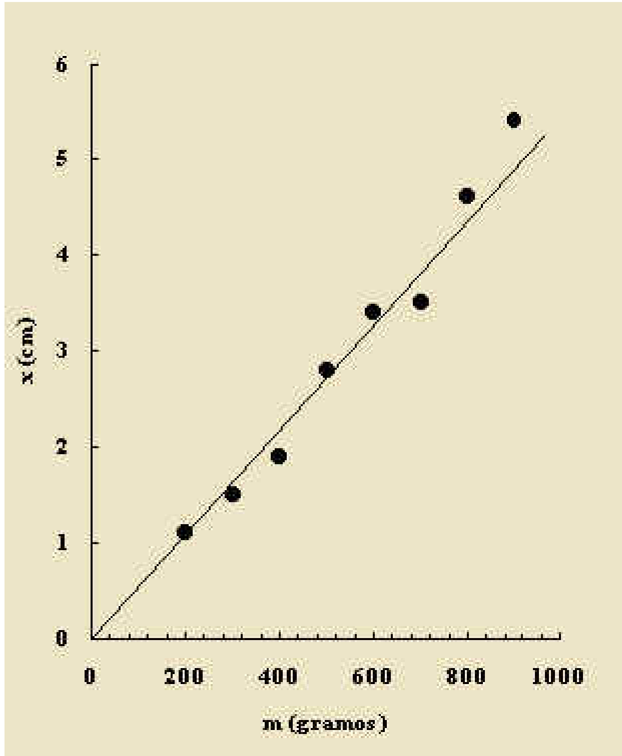
Si una cantidad y es proporcional a otra cantidad x, un gráfico de y versus x es una línea recta que pasa por el origen. Entonces, para averiguar si y es proporcional a x, Ud. puede graficar los valores medidos de y versus los valores de x y observar si los puntos resultantes yacen sobre una línea recta que pasa por el origen. Debido a que una línea recta es fácilmente reconocible, este método representa una manera simple y efectiva de evaluar proporcionalidad.

Para ilustrar este uso de los gráficos, imaginemos un experimento para verificar la ley de Hooke. Esta ley, expresada comúmente por $F = kx$, establece que la extensión x de un resorte es proporcional a la fuerza F que lo estira, o sea que $x = F/k$, donde k es la constante del resorte. Una forma simple de verificar esta ley es colgar un resorte verticalmente y suspender de él diferentes masas m. En este caso, la fuerza F es el peso de la masa suspendida, de tal forma que la extensión del resorte debiera ser $x = mg/k = (g/k)\ m$. Por lo tanto, la extensión x debiera ser proporcional a la carga m, y un gráfico de x versus m debiera dar como resultado una línea recta pasando por el origen.

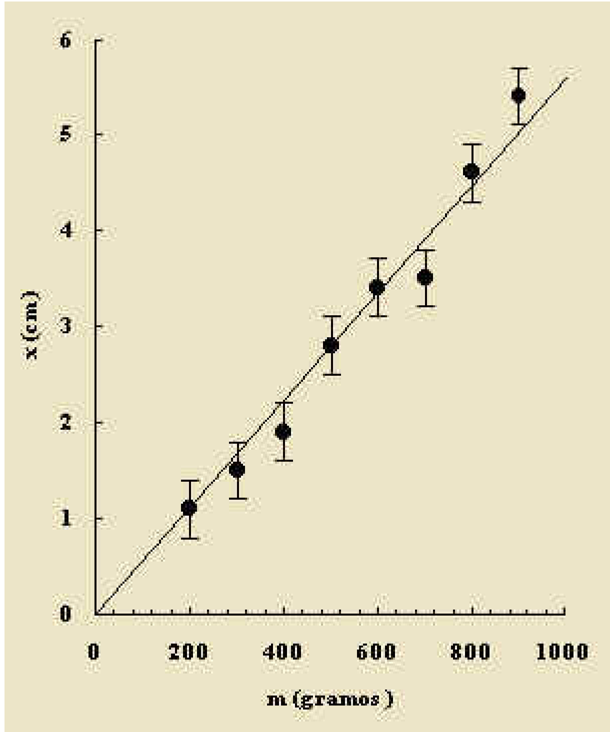
Si medimos x para una variedad de diferentes masas m y graficamos nuestros valores de x y m, los puntos resultantes casi con seguridad no yacerán *exactamente* sobre una línea recta. Supongamos, por ejemplo, que medimos la extensión x para ocho diferentes cargas m, obteniendo los resultados mostrados en la siguiente tabla:

Carga m (gr) ($\Delta\ m$ despreciable)	200	300	400	500	600	700	800	900
Extensión x (cm) ($\Delta\ x$ = 0.3 cm)	1.1	1.5	1.9	2.8	3.4	3.5	4.6	5.4

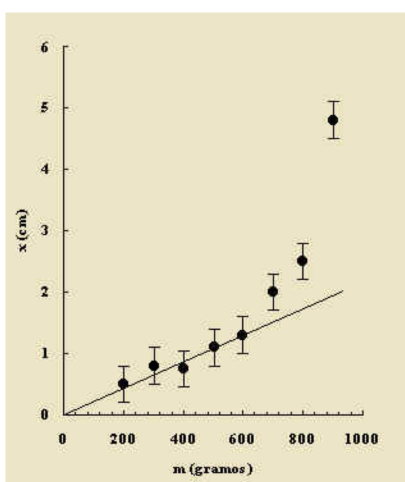
Estos valores están graficados en la siguiente figura, donde también se muestra una posible línea recta que pasa por el origen y está razonablemente cerca de todos los puntos.



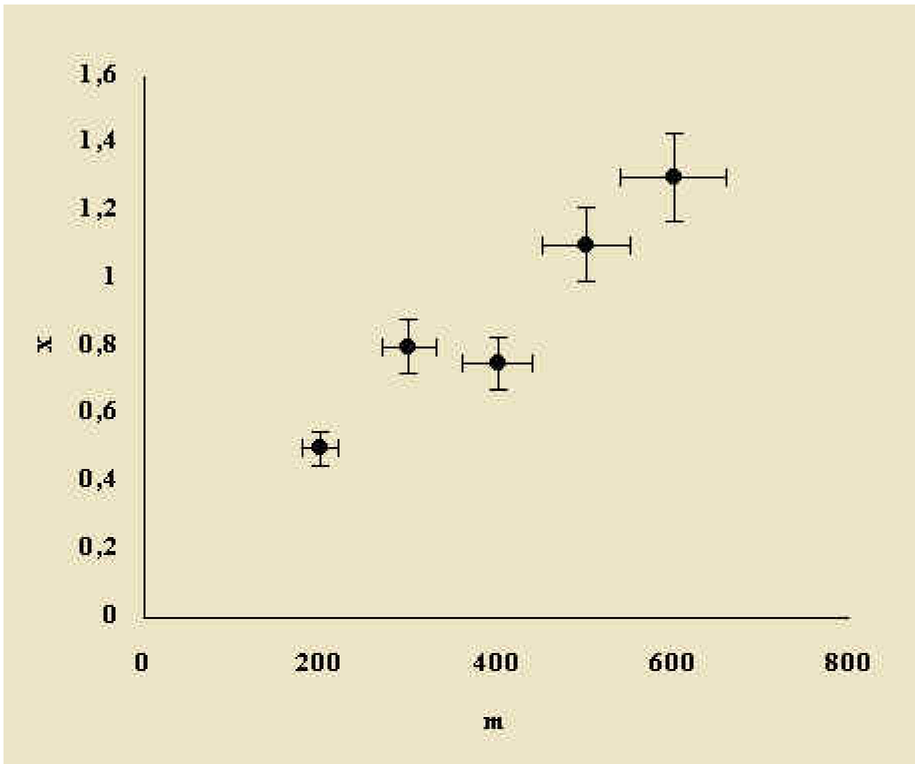
Como era de esperar, los ocho puntos no están exactamente alineados. La cuestión es ahora si este resultado es debido a las incertezas experimentales (como nosotros quisiéramos), a errores que hemos cometido, o a la posibilidad de que la extensión *x no sea* proporcional a *m*. Para contestar esa pregunta, debemos examinar nuestras incertezas. Como es común, las cantidades medidas, extensiones *x* y masas *m*, están sujetas a incertezas. Por simplicidad supondremos que las masas usadas son conocidas con gran exactitud, de forma tal que la incerteza en *m* es despreciable. Supongamos, por otra parte, que todas las mediciones de *x* tienen una incerteza de aproximadamente 0.3 cm. Para una carga de 200 gramos, por ejemplo, la extensión estará probablemente en el rango 1.1 ± 0.3 cm. Nuestro primer punto en el gráfico cae en la línea vertical m = 200 gramos, en algún lugar entre x = 0.8 y x = 1.4 cm. Este rango se indica en la figura de más abajo, donde se muestra una *barra de error* asociada a cada punto indicando cuál es el posible rango para esa medición. Obviamente, si la relación entre *x* y *m* es lineal, deberíamos poder encontrar una línea recta que pase por el origen y pase también *a través de todas o casi todas las barras de error*. La figura muestra que tal línea existe, de tal forma que podemos concluir que los datos son consistentes con una relación lineal entre *x* y *m*. Hemos visto que la pendiente del gráfico *x* versus *m* es g/k. Midiendo la pendiente de la línea recta podemos, por lo tanto, encontrar la constante *k* del resorte. Dibujando las líneas de máxima y mínima pendiente que se ajustan a los datos razonablemente bien, podemos también encontrar la incerteza de este valor de *k*.



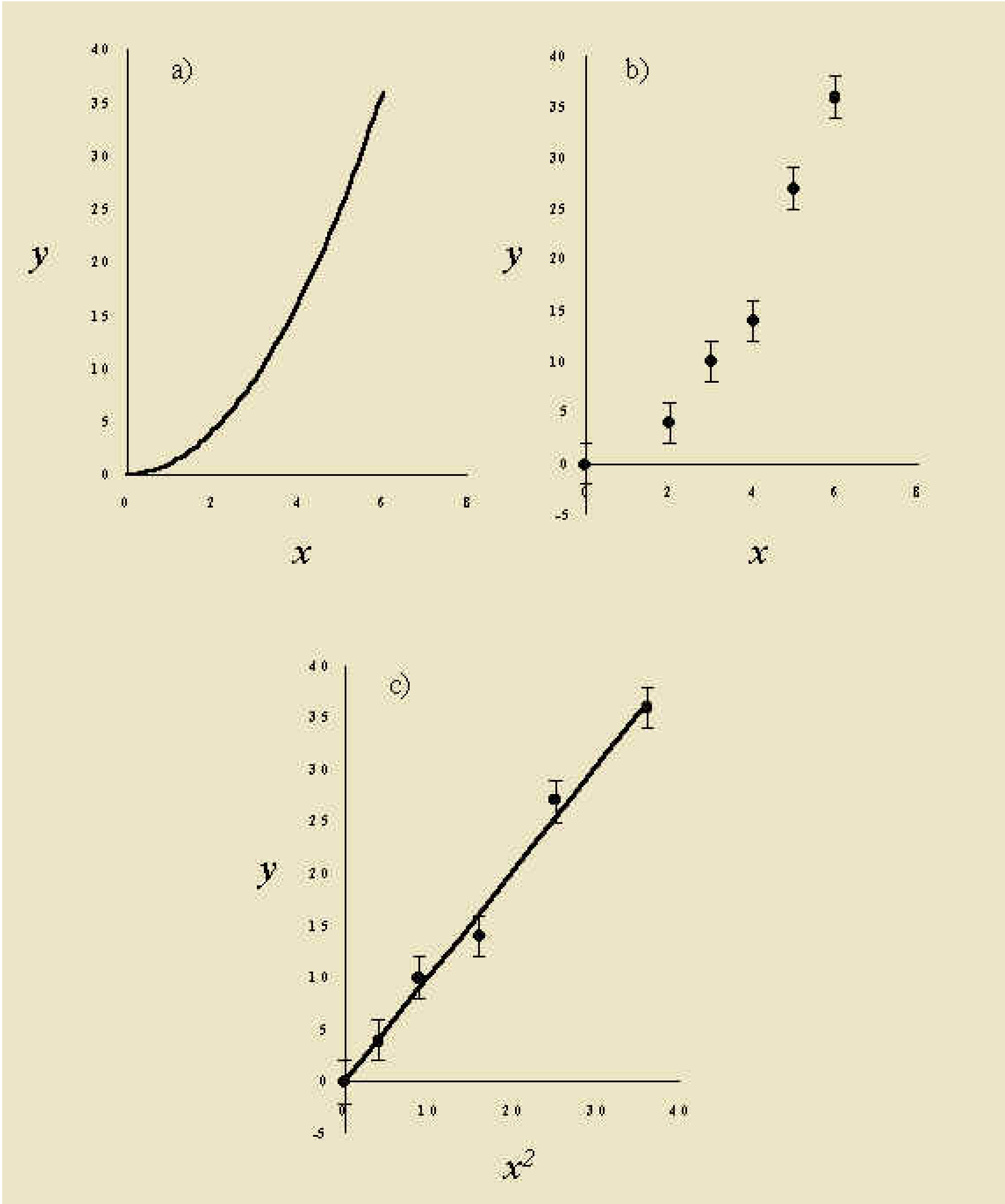
Si la mejor línea recta no pasa a través de un gran número de barras de error, o si los puntos están alejados una gran distancia respecto al tamaño de las barras de error, entonces nuestro resultados son inconsistentes con una relación lineal entre x y m. Esta situación se muestra en la figura siguiente. Con los resultados allí mostrados, tendríamos que comenzar por controlar nuestras mediciones y cálculos (incluyendo el cálculo de los errores) y considerar si x puede no ser proporcional a m por alguna razón. [En este caso, por ejemplo, los primeros cinco puntos pueden ajustarse a una línea recta pasando por el origen. Esta situación sugiere que x puede ser proporcional a m hasta aproximadamente unos 600 gramos, pero que la ley de Hooke deja de valer en ese punto y que a partir de allí el resorte comienza a estirarse más rápidamente.]



Hasta ahora hemos supuesto que la incerteza en la masa (que está graficada en el eje horizontal) es despreciable y que las únicas incertezas están en x, como lo indican las barras verticales. Si tanto x como m están sujetas a incertezas apreciables, la manera más simple de mostrarlas es dibujar barras de error verticales y horizontales, cuyas longitudes muestren las incertezas en x y m, respectivamente, como se muestra abajo. Cada cruz en este gráfico corresponde a una medición de x y m, en la cual x probablemente cae en el intervalo definido por la barra vertical y m cae en aquel definido por la barra horizontal.



Una posibilidad un poco más complicada ocurre cuando una cantidad puede ser proporcional a una *potencia* de otra. (Por ejemplo, la distancia recorrida por un objeto que cae un tiempo t es $d = \frac{1}{2} gt^2$ y es proporcional al cuadrado de t.) Supongamos que se espera que y sea proporcional a x^2. Entonces, $y = Ax^2$, donde A es alguna constante, y un gráfico de y versus x debería ser una parábola con la forma general de la figura (a) que se muestra más abajo. Si medimos una serie de valores (x, y) y graficamos y versus x, puede ser que obtengamos un gráfico como el que muestra la figura (b). Desafortunadamente, juzgar visualmente si un conjunto de puntos se ajusta a una parábola (o a cualquier otra curva, excepto una línea recta) es muy difícil. Una mejor forma de verificar que y es proporcional a x^2 ($y \propto x^2$) es graficar y versus *x al cuadrado*. Tal gráfico debiera ser una línea recta, y eso sí es fácilmente verificable, como se ve en la figura (c).



a) Si y es proporcional a x^2, un gráfico de y versus x debería mostrar una parábola con esta forma general. b) La bondad del ajuste parabólico es difícil de evaluar en un gráfico de y versus x. c) Por otra parte, un gráfico de y versus x^2 debería resultar en una línea recta pasando por el origen, lo cual es fácil de verificar visualmente. (En el caso que se muestra, podemos ver fácilmente que por los puntos pasa una recta.)

De la misma forma, si $y = A\,x^n$ (donde n es una potencia cualquiera), un gráfico de y versus x^n debiera ser una línea recta, y graficando los valores observados de y versus x^n deberíamos poder verificar fácilmente dicho ajuste. Existen muchas otras situaciones en las cuales una relación no lineal (es decir, una que resulta en un gráfico curvado, no lineal) puede convertirse en una relación linea mediante una hábil selección de las variables a graficar.

Por ejemplo, es común el caso en que una de las variables y depende exponencialmente de otra variable x, en la forma $y = A\ e^{Bx}$. Para esta clase de relaciones, se puede ver fácilmente que el logaritmo natural de y es lineal respecto de x, es decir, un gráfico de ln(y) versus x debería ser una línea recta en el caso de una relación exponencial. Más adelante veremos algunos ejemplos de estas operaciones de linealización.

El caso de múltiples mediciones

Hasta ahora hemos considerado procesos de medición donde cada una de las cantidades se medía una sola vez. Dejando de lado el caso de mediciones llevadas a cabo durante sucesos únicos, donde no puede medirse más que una vez, rara vez en el laboratorio el valor de una cantidad se define a partir de una sola medición. Una de las mejores maneras de evaluar la confiabilidad de una medición es repetirla varias veces y examinar los diferentes valores obtenidos. Tenga en cuenta, sin embargo, que no todas las incertezas experimentales pueden ser evaluadas mediante un análisis estadístico basado en mediciones reiteradas. Si existen en el proceso de medición errores sistemáticos, el análisis estadístico no ayudará a identificarlos, corregirlos o disminuirlos.

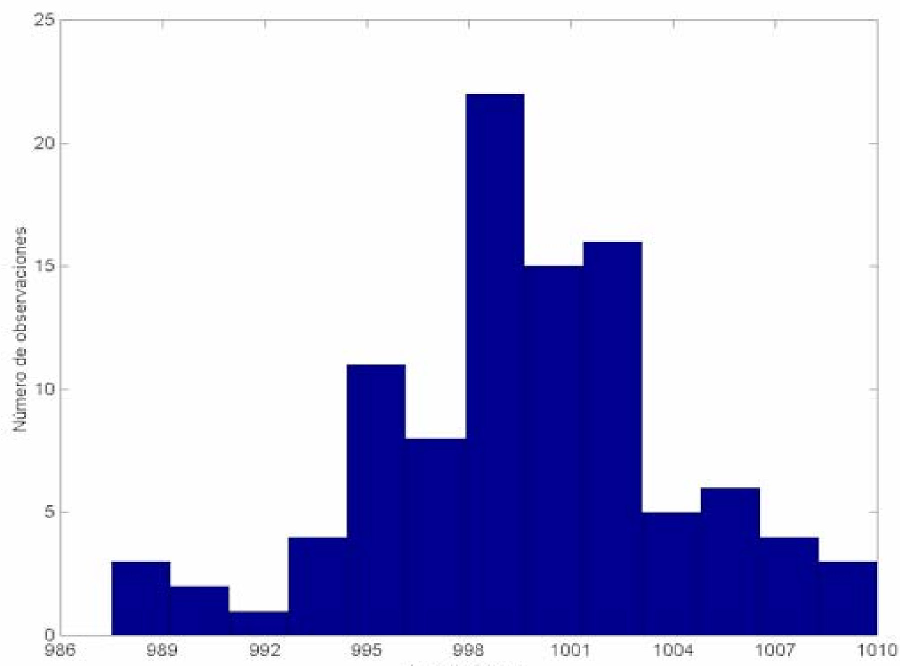
Supongamos que cuidadosamente hemos eliminado todas las fuentes de error sistemático, y que medimos entonces una misma cantidad 100 veces. Cómo reportaremos estos resultados? Haremos una lista de 100 números? Qué resultado particular caracteriza mejor al conjunto de mediciones? Cuál es el rango en donde es más probable encontrar el resultado de una medición en particular? Cuál es la probabilidad de que una medición resulte en un dado valor de la cantidad medida? Todas estas preguntas y algunas más pueden responderse a través de un análisis estadístico de los datos. Ahora que Ud. ha adquirido alguna práctica en la medición de cantidades en el laboratorio, y que ha leído atentamente este apunte y ha resuelto los problemas propuestos, le recomendamos estudiar el Capítulo 3 del libro *Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, especialmente las secciones 1-11. En esta sección de nuestro apunte pasaremos a desarrollar un caso particular de mediciones para que Ud. pueda ver cómo funciona el análisis estadístico en la práctica.

Ejemplo:

Al medir repetidas veces la longitud de un escritorio, un alumno obtiene la siguiente tabla de datos (expresados en milímetros):

999.0	993.0	1003.5	997.0	1002.0	994.5	1001.5	990.5
1001.0	996.0	1001.5	998.5	1000.5	998.5	998.5	999.5
996.5	992.5	1004.0	988.0	1007.5	994.5	1002.5	990.5
1000.5	999.5	996.0	1001.5	997.0	1002.0	996.5	1005.0
1004.0	999.0	999.5	1000.5	998.0	1001.5	997.0	1002.5
1002.0	998.0	999.5	999.5	999.5	1000.5	997.5	1000.5
1008.5	1006.0	993.0	1008.0	987.5	1007.5	994.5	1010.0
1008.0	1002.5	996.0	1001.5	995.0	1005.5	996.0	1005.5
1004.5	1004.5	998.0	1004.0	1001.0	999.5	1001.5	999.0
1001.5	999.0	999.0	1003.0	1003.0	996.0	997.0	1005.5
1001.5	996.5	1000.0	999.5	1000.0	999.5	998.5	1000.5
1000.0	993.5	1002.5	998.0	1001.0	995.0	1001.0	999.0

Para medir el escritorio, el estudiante usó una pequeña regla de 5 cm de longitud graduada en milímetros. Para cubrir la longitud total del escritorio, el estudiante fue trasladando la regla sobre el lado del escritorio, valiéndose de marcas que él mismo fue haciendo con una lapicera de fibra. Luego de cada medición, el estudiante borraba las marcas y volvía a repetir el proceso. Asumiremos que estas muestras fueron tomadas de un universo Gaussiano.



a. Dibuje el histograma de las observaciones.

Para construir el histograma dibujado arriba, se dividió el rango total sobre el cual se extienden las observaciones en 13 intervalos de igual ancho, comenzando por 986 mm y finalizando en 1010 mm. Cada barra indica el número de observaciones que se encuentran en el rango cubierto por su ancho.

b. Identifique la moda y la mediana.

La moda es el valor del rango horizontal para el cual se registra el máximo de la distribución. En este caso, la moda está entre 998.0 mm y 1000.0 mm. La mediana es aquel valor en el cual una línea recta divide a la distribución en dos partes de igual área. En esta caso, la mediana vale 999.5 mm.

c. Calcule la media.

La expresión para en cálculo de la media o promedio es $x_m = \Sigma x_i / N$. En este caso, x_m = 999.6 mm. Recuerde que la mejor estimación del verdadero valor X que Ud. puede calcular a partir de sus mediciones es justamente el valor medio x_m de sus N resultados.

d. Calcule la mejor estimación de la desviación estándard del universo.

La mejor estimación de la desviación estándard del universo es $\sigma_{N\text{-}1} = = [\Sigma(x_i - x_m)^2/(N - 1)]^{1/2}$. En este problema, $\sigma_{N\text{-}1}$ = 4.54 mm.

e. Calcule la desviación estándard de la media.

Este es un buen momento para revisar qué es lo que sabemos hasta el momento: en primer lugar, si las mediciones de x están sujetas sólo a errores aleatorios, su distribución límite es la función de Gauss $G_{X,\sigma}(x)$ centrada en el verdadero valor X y con ancho σ . El ancho σ es el intervalo de confianza del 68%, es decir que existe un 68% de probabilidades de que una medición *individual* cualquiera caiga dentro de una distancia σ del verdadero valor X. En la práctica, no conocemos el valor de X o σ . En su lugar, tenemos nuestros N valores medidos $x_1, ..., x_N$. Basados en estos N valores medidos, nuestra mejor estimación del verdadero valor de X es la media x_m, y nuestra mejor estimación del ancho σ de la distribución es $\sigma_{N\text{-}1}$.

Ahora surgen dos preguntas, una de las cuales es: cuál es la incerteza en x_m como estimación del verdadero valor de X? Es decir, si medimos varios grupos de N mediciones, cómo estarán distribuídas las medias x_m de los distintos grupos de mediciones respecto al verdadero valor X? La respuesta es que la incerteza en la estimación del verdadero valor X es la desviación estándard de la media, que vale σ_{xm}

$= \sigma_{N\text{-}1}/N^{1/2}$. En nuestro caso, este valor resulta $\sigma_{xm} = \sigma_{N\text{-}1}/10 = = 0.45$. Esto quiere decir que nuestra respuesta $x_m = 999.6$ mm está , con un 68% de probabilidad, a una distancia menor a 0.45 mm del valor real de X.

f. Calcule la desviación estándard de la desviación estándard.

La segunda pregunta que surge es: cuál es la incerteza en $\sigma_{N\text{-}1}$ como estimación del verdadero ancho σ ? Puede demostrarse que la *incerteza de la incerteza* está dada por $\sigma_\sigma = \sigma_{N\text{-}1}/\ [2(N - 1)]^{1/2}$. Este resultado muestra claramente la necesidad de realizar numerosas mediciones para lograr conocer la incerteza en forma confiable. Por ejemplo, con sólo tres mediciones de una cantidad ($N = 3$), este resultado muestra que la desviación estándard tiene una incerteza del 50%! En este problema, $\sigma_\sigma = 0.32$ mm, y la incerteza relativa en el valor de σ es $1\ /\ [2(N - 1)]^{1/2} = 1\ /\ [2(100 - 1)]^{1/2} = 0.07$, o sea del 7%.

g. Dentro de qué límites hay una probabilidad del 68% de que esté incluída una observación particular? Qué límites dan una probabilidad del 95%?

Los intervalos dentro de los cuales la probabilidad de que esté incluída una observación particular es del 68% y 95% son, respectivamente, $x_m \pm \sigma_{N\text{-}1}$ y $x_m \pm 2\sigma_{N\text{-}1}$. En este problema, estos intervalos expresados en milímetros son (995.1, 1004.1) y (990.5, 1008.7).

h. Dentro de qué límites la media tiene 1) una probabilidad del 68%, y 2) una probabilidad del 95% de estar incluída?

Note que ahora la pregunta es diferente, y se refiere al rango dentro del cual Ud. espera que el valor medio *de una muestra* se encuentre con cierta probabilidad. En 1), este rango está dado por $x_m \pm \sigma_{\mathrm{xm}}$, y en 2) está dado por $x_m \pm 2\sigma_{xm}$. En este caso, estos intervalos expresados en milímetros son (999.1, 1000.1) y (998.7, 1000.5).

i. Dentro de qué límites el verdadero ancho σ tiene 1) una probabilidad del 68%, y 2) una probabilidad del 95% de estar incluída?

Estos intervalos están definidos por 1) $\sigma_{N\text{-}1} \pm \sigma_\sigma$, y 2) $\sigma_{N\text{-}1} \pm 2\sigma_\sigma$. En nuestro caso, estos intervalos son, en milímetros, (4.22, 4.86) y (3.90, 5.18).

Discrepancia

Cuando dos mediciones de la misma cantidad se hallan en desacuerdo, decimos que existe una *discrepancia*. Numéricamente, definimos la discrepancia entre dos mediciones como su diferencia:

Discrepancia = diferencia entre dos valores medidos de la misma cantidad

Más específicamente, cada una de las dos mediciones consiste de un valor que es nuestra mejor estimación del verdadero valor, y una incerteza. Cada una de estas mediciones puede ser el resultado de largas series de medidas, las cuales fueron procesadas en la forma vista en la sección anterior. O pueden ser el resultado de dos mediciones individuales, con la incerteza calculada mediante las simples reglas de propagación del error vistas anteriormente. En cualquier caso, definimos la discrepancia como la diferencia entre las dos mejores estimaciones. Por ejemplo, si dos estudiantes miden la misma resistencia y obtienen los siguientes valores

Estudiante A: 15 ± 1 ohms; Estudiante B: 25 ± 2 ohms,

su discrepancia es

discrepancia = 25 – 15 = 10 ohms.

Note que una discrepancia puede o no ser *significativa*. Entre las dos mediciones que acabamos de comentar existe una discrepancia significativa, puesto que no encontramos ningún valor posible de resistencia que sea compatible con ambas mediciones. Obviamente, al menos una de las mediciones es incorrecta, y se necesita en este caso buscar cuidadosamente qué es lo que ha fallado.

Suponga ahora que otros dos estudiantes has reportado los siguientes resultados:

Estudiante C: 16 ± 8 ohms;

Estudiante D: 26 ± 9 ohms.

Aquí, nuevamente, la discrepancia es de 10 ohms. Sin embargo, la discrepancia aquí no es significativa, dado que los márgenes de error de ambos estudiantes se solapan confortablemente y ambas mediciones podrían ser igualmente correctas. La discrepancia entre dos mediciones de la misma cantidad debe ser evaluada entonces no por su tamaño, sino por cuán grande es comparada con las incertezas en las mediciones.

Promedios pesados

Frecuentemente, una cantidad física se mide varias veces, inclusive en diferentes laboratorios, y la pregunta que se suscita es cómo pueden combinarse estos resultados para dar una única mejor estimación. Supongamos, por ejemplo, que dos estudiantes A y B miden cuidadosamente una cantidad x y obtienen los siguientes resultados:

$$\text{Estudiante } A\text{: } x = x_A \pm \Delta_A$$

y

$$\text{Estudiante } B\text{: } x = x_B \pm \Delta_B.$$

Cada resultado es probablemente el resultado de varias mediciones, en cuyo caso x_A será la media de todas las mediciones de A y Δ_A la desviación estándard de la media (lo mismo se aplica a x_B y Δ_B). La cuestión es entonces cuál es la mejor forma de combinar x_A y x_B para obtener una sola estimación de x. Antes de examinar esta cuestión, note que si la discrepancia $|x_A - x_B|$ entre las dos mediciones es mucho más grande que ambas incertezas Δ_A y Δ_B, deberíamos sospechar que algo está mal en al menos una de las mediciones. En esta situación, diríamos que ambas mediciones son *inconsistentes*, y deberíamos examinar ambas mediciones cuidadosamente para ver si una (o ambas) ha estado sujeta a algún error sistemático desapercibido.

Supongamos que las mediciones son *consistentes*, es decir, que la discrepancia $|x_A - x_B|$ *no* es significativamente mayor que Δ_A y Δ_B. En ese caso sería muy razonable preguntar cuál es la mejor estimación del valor real X, basado en ambas mediciones. Un primer impulso nos lleva a pensar que este valor debería ser el promedio $(x_A + x_B)/2$ de ambas mediciones. Sin embargo, un poco de reflexión nos sugiere que este promedio es inadecuado en el caso que que las incertezas Δ_A y Δ_B sean diferentes. El simple promedio le da igual importancia a ambas mediciones, mientras que es más razonable pensar que a la medición más precisa (con menor Δ) debiera dársele más peso.

Puede demostrarse que la mejor estimación del verdadero valor de X está dado por el *promedio pesado* (al que llamaremos x_{pp}), dado por la siguiente expresión:

$$(\text{mejor estimación de } X) = x_{pp} = (p_A x_A + p_B x_B)/(p_A + p_B),$$

donde $p_A = 1/\Delta_A^2$ y $p_B = 1/\Delta_B^2$ son denominados *pesos*. Observe que si las dos mediciones son igualmente inciertas ($\Delta_A = \Delta_B$, y por lo tanto $p_A = p_B$), esta respuesta se reduce al simple promedio $(x_A + x_B)/2$. Esta ecuación es similar a la del centro de gravedad de dos cuerpos, donde p_A y p_B son sus pesos y x_A y x_B sus posiciones. Si las mediciones de A son más precisas que las de B, entonces $\Delta_A < \Delta_B$ y por lo tanto $p_A > p_B$, de forma tal que la mejor estimación está más cerca de x_A que de x_B, tal y como debiera ser.

Ajuste por cuadrados mínimos

Uno de los tipos más comunes e interesantes de experimento involucra la medición de varios valores de dos diferentes variables físicas a fines de investigar la relación matemática entre las dos variables. Ud. mismo ha realizado experimentos de esta clase en este curso. Sin embargo, en dichos experimentos el ajuste de los datos a una función propuesta, tal como una línea recta, fue realizada en forma *cualitativa*, es decir, a ojo. Existen formas *cuantitativas* de encontrar el valor de los parámetros que mejor representan a un conjunto de datos, y es precisamente este tema el que trataremos en esta Sección. Le recomendamos nuevamente que, además del breve desarrollo incluído en este apunte, consulte la bibliografía recomendada por la Cátedra.

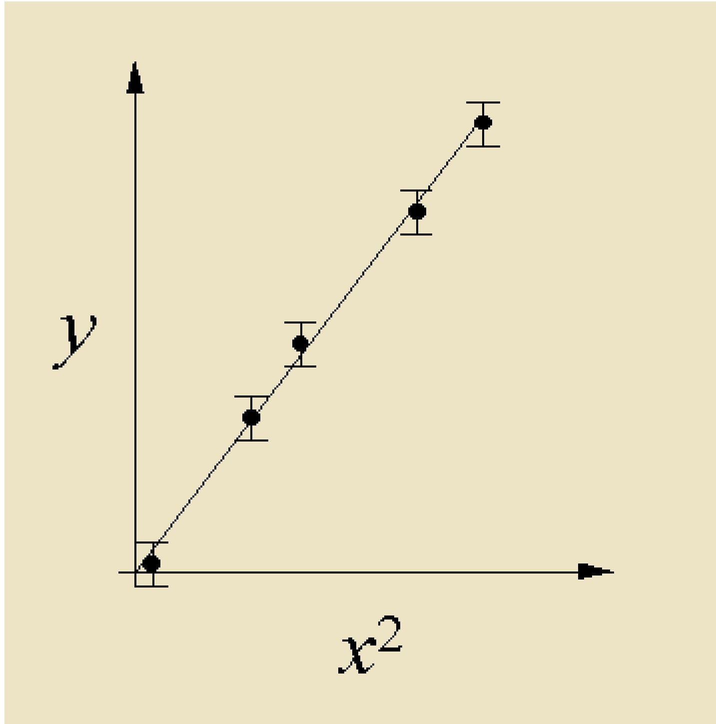
Probablemente, los experimentos más comunes del tipo descripto más arriba son aquellos para los cuales la relación esperada entre las variables es *lineal*. Por ejemplo, si creemos que un cuerpo está cayendo con aceleración constante g, entonces su velocidad v debería ser una función lineal del tiempo t,

$$v = v_0 + gt.$$

En forma más general, consideraremos un par cualquiera de variables físicas x e y de las cuales sospechemos que están relacionadas por una relación lineal de la forma

$$y = A + Bx,$$

donde A y B son constantes. Si las dos variables y y x están relacionadas de esta manera, entonces un gráfico de y versus x debiera resultar en una línea recta de pendiente B, que intersecta al eje y en $y = A$. Si medimos N diferentes valores de x y los correspondientes valores de y, y si nuestras mediciones no están sujetas a incerteza alguna, entonces cada uno de los puntos (x_i, y_i) caería exactamente sobre la línea $y = A + Bx$. En la práctica, *existen* incertezas, y lo mejor que podemos esperar es que la distancia entre cada punto y la recta sea razonable comparada con las incertezas, tal como en el caso de la siguiente figura:



Las inevitables incertezas experimentales se muestran a través de las barras de error, y sólo podemos esperar que los puntos estén razonablemente cerca de la recta. En este caso, sólo la variable y está sujeta a incertezas apreciables.

Cuando realizamos una serie de mediciones de este tipo, podemos hacernos dos preguntas. En primer lugar, si tomamos por garantido que y y x están relacionadas linealmente, entonces el problema es encontrar la recta $y = A + Bx$ que mejor se ajusta a las mediciones, es decir, las mejores estimaciones para los valores de A y B. Este problema puede tratarse gráfica o analíticamente. El método analítico de encontrar la mejor recta que se ajusta a una serie de datos experimentales es llamado *regresión lineal*, o *ajuste de mínimos cuadrados para una recta*.

La segunda pregunta que surge es si los valores medidos realmente llenan nuestras expectativas acerca de la linealidad entre y y x. Para contestar a esta pregunta, deberíamos primero encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos, y *además* encontrar alguna forma de medir qué tan bien esta línea se ajusta a los datos. Si conocemos las incertezas asociadas a los datos, como en el caso de la figura 5, podemos evaluar el ajuste visualmente. Si no tenemos una estimación confiable de las incertezas, entonces tenemos que analizar la bondad del ajuste examinando la distribución de los puntos mismos. Este problema, relacionado con los conceptos de *covarianza* y *correlación*, no será tratado en esta Sección. Vayamos a la cuestión de encontrar la recta $y = A + Bx$ que mejor se ajusta a un conjunto de puntos (x_1, y_1),..., (x_N, y_N). Para simplificar nuestra discusión, supondremos que sólo las incertezas de la variable y son apreciables. Esta suposición es frecuentemente muy razonable, porque es común el caso en que las incertezas en una variable son muchos más grandes que en la otra. Supondremos además que todas las incertezas en y tiene la misma magnitud. (Esta suposición es también razonable en muchos experimentos. Si las incertezas fueran diferentes, existen formas de generalizar el análisis dándole un peso adecuado a las distintas mediciones).

Si conociéramos las constantes A y B, entonces, para cualquier valor x_i podríamos calcular el verdadero valor y_i que le corresponde:

$$\text{(verdadero valor de } y_i\text{)} = A + B\, x_i.$$

La desviación de esta magnitud respecto al valor medido se puede escribir entonces como:

$$\delta y_i = y_i - (A + B\, x_i).$$

Intuitivamente, vemos que un criterio razonable para elegir la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales es elegir aquella que minimice la suma de los cuadrados de las desviaciones individuales d y_i. Esto significa que el valor de los parámetros A y B estará dado por las siguientes dos condiciones:

$$(\partial/\partial A)[\Sigma(\delta y_i)^2] = -2\ \Sigma\ (y_i - A - B\, x_i)^2 = 0$$

$$(\partial/\partial B)[\Sigma(\delta y_i)^2] = -2\ \Sigma x_i\ (y_i - A - B\, x_i)^2 = 0.$$

La resolución simultánea de estas ecuaciones resulta en las expresiones siguientes (demuéstrelo!):

$$A = (\ \Sigma x_i^2\, \Sigma y_i - \Sigma x_i\, \Sigma x_i\, y_i\ )/\Delta\ ,$$

$$B = (\ N\, \Sigma x_i\, y_i - \Sigma x_i\, \Sigma y_i\ )/\Delta\ ,$$

donde

$$\Delta = N\, \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i\ )^2\ .$$

Como vemos, la aplicación del criterio de minimización de la suma de los cuadrados de las desviaciones resulta en la obtención de resultados objetivos para los parámetros A y B. Además de que este criterio es intuitivamente razonable, se puede demostrar que si la medición de cada y_i está gobernada por una distribución Gaussiana, entonces la mejor estimación de los parámetros A y B es aquella que minimiza la suma $\Sigma(\delta y_i)^2$.

La desviación estándard de la pendiente y la ordenada al origen se calculan en términos de la desviación estándard s $_y$ de la distribución de valores de δy_i alrededor de la mejor recta (en el sentido de los cuadrados mínimos). Esta desviación estándard está dada por

$$\sigma_y = [\Sigma(\delta y_i)^2\ /\ (N - 2)]^{1/2}.$$

El factor (N – 2) obedece a razones que no demostraremos aquí, y que están ligadas al número de grados de libertad disponibles. (Para una justificación estadística más profunda refiérase a la bibliografía sugerida). Usando esta expresión para la incerteza de los valores medidos y_i , podemos usar propagación de errores para escribir las incertezas en las cantidades A y B:

$$\sigma_A = \sigma_y\, (\Sigma x_i^2 / \Delta\,)^{1/2}$$

$$\sigma_B = \sigma_y\, (N / \Delta\,)^{1/2}.$$

De esta forma, la aplicación del criterio de cuadrados mínimos nos ha permitido encontrar la mejor estimación de los parámetros A y B, así como también su incerteza. Es fácil demostrar que si por alguna razón tenemos motivos para suponer que la mejor recta *debe* pasar por el origen de coordenadas, o sea que es de la forma $y = Bx$, entonces la mejor estimación para la constante B es:

$$B = \Sigma x_i\, y_i \;/\; \Sigma x_i^2.$$

La incerteza en B está dada en este caso por:

$$\sigma_B = \sigma_y \;/\; (\Sigma x_i^2\,)^{1/2} = [\Sigma(y_i - Bx_i)^2 \,/\, (N - 1)]^{1/2} \;/\; (\Sigma x_i^2)^{1/2}.$$

Apéndice A

INFORMES DE LABORATORIO: ESTRUCTURA Y PREPARACIÓN

I. Introducción

Además de las habilidades analíticas y de diseño que le serán necesarias para convertirse en un ingeniero de éxito, existen un número de otras habilidades, llamadas transferibles, que Ud. necesitará en su carrera. Entre ellas, las habilidades de comunicación son de importancia primaria. La habilidad de comunicar sus ideas o hallazgos a otros es tan importante como el conocimiento mismo.

Uno de los elementos más utilizados en la comunicación de conocimientos es el reporte o informe. El propósito de un reporte es canalizar la información breve y claramente. La brevedad es importante, un reporte no es un ensayo. La claridad se alcanza subdividiendo el reporte en secciones, cada una jugando un rol determinado. Un informe de laboratorio bien pensado y bien escrito no sólo condensa el experimento en una forma fácil de recordar, sino que también ayuda al entendimiento de la experiencia de laboratorio.

Todo trabajo científico eventualmente encuentra expresión en un reporte escrito. En investigación y desarrollo industrial, los reportes informan a los supervisores y directores, pueden circular internamente dentro de la compañía, y pueden inclusive llegar a otros investigadores trabajando en el mismo campo en otros lugares del mundo. Algunos reportes son publicados en revistas científicas y técnicas. Aún el personal técnico escribe a veces reportes.

Muchos científicos e ingenieros descubren tardíamente que la gente juzga la calidad del trabajo experimental a partir de la calidad de los reportes. Reportes pobres pueden hacer que las personas encangadas de tomar las decisiones ignoren la línea de investigación misma y, en un nivel eminentemente práctico, pueden poner en peligro los fondos asignados a esas investigaciones.

El diseño de un reporte no es rígido. Sin embargo, a pesar de las variaciones que puedan encontrarse, el objetivo es el mismo: documentar sus hallazgos para comunicar el conocimiento que Ud. ha adquirido a través de la experiencia de laboratorio. Para escribir un buen reporte, Ud. no sólo tiene que presentar los datos claramente, sino que también tiene que demostrar su comprensión de los conceptos detrás de los datos. Por ejemplo, no es suficiente escribir simplemente los resultados esperados y observados en su experimento, Ud. debería también identificar el cómo y porqué de las diferencias observadas, explicar cómo han afectado su experimento, y mostrar su comprensión de los principios subyacentes al experimento que Ud. realizó.

Si bien es cierto que no existe una manera única de escribir un reporte, a través de los años ha evolucionado un formato conveniente de estructura que puede verse en trabajos publicados en revistas científicas, tales como el American Journal of Physics. La estructura que aquí se presenta es un formato general, usado en la mayoría de los trabajos de física experimental.

II. Estructura del informe

Los componentes típicos de un reporte o informe son los siguientes:

Título: El informe debe comenzar con un título. A continuación, deben especificarse el nombre de los autores y la fecha de realización y/o entrega.

Resumen: El resumen es el informe en miniatura. Está constituido por un párrafo corto, de unas tres a cinco oraciones, descriptivas del cuerpo del informe. Un buen resumen permite al lector reconocer inmediatamente los conceptos más importantes incluidos en el informe. El resumen no debe establecer los objetivos del trabajo. En cambio, debe establecer la naturaleza del experimento, resumir los resultados y los medios por los cuales fueron obtenidos, y resumir las conclusiones. Los datos y los cálculos no deben mencionarse en el resumen. El resumen debe ser autocontenido, no puede hacer referencia a tablas, figuras o partes posteriores de texto. Escriba el resumen como parte final de la escritura del informe, pero resistiendo la tentación de repetir trozos enteros del cuerpo del informe. Use esta sección para mostrar su visión integrada de toda la información contenida en el informe.

Introducción: La introducción debe cumplir con dos objetivos: debe establecer el propósito del reporte, y debe familiarizar al lector con el experimento. El propósito del reporte no es simplemente mostrar que Ud. obtuvo todas las respuestas correctas. ¿Porqué, ahora que el experimento está terminado, tengo que escribir todo esto? Ud. debería ser capaz de contestar esta pregunta claramente. ¿Cuál es el contexto dentro del cual el experimento se realiza? Luego de establecer el propósito del reporte y el propósito del experimento, la introducción debería proveer el material necesario acerca de teoría, resultados previos o fórmulas que el lector necesite para la lectura del reporte. Mucha de esta información está a veces en la guía de laboratorio, pero Ud. debería mostrar su comprensión de este material escribiendo esta sección con sus propias palabras.

Procedimiento: Esta sección debe describir breve y claramente el arreglo experimental y cómo fue usado. En particular, el autor debería explicar cómo este aparato en particular permite probar o verificar los principios o cuestiones que están siendo examinados. Éste es el lugar donde también se introducen y definen las cantidades medidas experimentalmente. Es aquí donde debe dirigirse la atención del lector hacia un diagrama que muestre el equipo experimental y su disposición. Este diagrama, así como los gráficos subsiguientes, son llamados figuras, y se numeran secuencialmente a medida que se mencionan en el texto. En esta sección, Ud. debería proveer suficiente información como para que otro investigador en su mismo campo pueda reproducir su experimento. Cuente lo que Ud. realmente hizo y cómo, no lo que se suponía que debería haber pasado o lo que los libros cuentan. Si Ud. se desvió del procedimiento especificado, describa los cambios que hizo y explique cómo estos cambios afectaron sus resultados.

Análisis de los datos: Aquí se describen cómo fueron calculadas las cantidades derivadas a partir de los datos crudos. Tenga en cuenta, sin embargo, que algunos ejemplos de cálculo debieran reservarse para los apéndices. El autor debe explicar en forma clara y concisa los pasos involucrados en el manejo de los datos. No se base en los resultados que debieran haberse obtenido, enuncie sus resultados reales. Aunque los resultados se presentan comúnmente en forma cuantitativa, Ud. debería siempre introducir cada bloque de información con un lenguaje claro y sencillo. Las figuras, gráficos y tablas pueden ayudar a sustentar sus resultados, pero no se apoye solamente en ellos para reunir la información esencial. Enuncie todos los resultados significativos explícitamente. Escribir las ecuaciones y mostrar las tablas, esperando que el lector las interprete sin ninguna guía, no es suficiente. Ud. debe describir todos los resultados importantes con palabras, clara y simplemente. No olvide que el trabajo debe incluir un análisis apropiado de las incertezas asociadas a cada cantidad.

Discusión: Esta sección es la parte más importante del informe. Aquí tendrá la oportunidad y el desafío de mostrar que entiende el experimento más allá del simple hecho de completarlo. Usted debe explicar, analizar e interpretar sus resultados. Sea particularmente cuidadoso en la consideración de errores o problemas. Como estudiante, Ud. debe presentar no sólo la información apropiada, sino también proveer evidencia que muestre que entiende el material que ha escrito. La cuestión subyacente a esta sección es la siguiente: Cuál es el significado de estos resultados? En particular, enfoque su atención en preguntas como ésta:

Qué resultados se esperaban? Qué resultados se obtuvieron? Si existen discrepancias, cómo explicarlas? Tiene alguno de sus resultados algún interés técnico o teórico en particular? Cómo se relacionan sus resultados con sus objetivos experimentales? Cómo se comparan sus resultados con aquellos obtenidos en experimentos similares? Cuáles son las ventajas y limitaciones de su diseño experimental? Si encontró dificultades en el experimento, cuáles fueron sus fuentes? Cómo podrían evitarse en futuros experimentos?

Conclusión: Extraiga conclusiones a partir de los resultados y la discusión, tratando de contestar la pregunta: Y entonces qué? Basado en la respuesta a esta pregunta, explique entonces sus conclusiones. Sus conclusiones deben relacionarse con los propósitos u objetivos que Ud. estableció al principio del informe. Muéstrele al lector hasta qué punto ha cumplido los objetivos. No trate de afirmar más de lo que los hechos le permitan. Respalde sus afirmaciones con evidencia, lógica, o referencias específicas de la literatura. Establezca claramente lo que Ud. ha logrado, junto con la incerteza asociada a sus resultados, pero no haga ninguna generalización amplia e infundada. Recuerde que no podrá explicar algo a alguien a menos que Ud. lo entienda primero. En esta sección puede también criticar el experimento y hacer recomendaciones para mejorarlo. Tales recomendaciones y críticas, sin embargo, deben enfocarse en el laboratorio como una experiencia de aprendizaje. Comentarios tales como quejas acerca de aparatos defectuosos o la cantidad de tiempo que tomó hacer la experiencia, etc., no son apropiados para esta sección.

Agradecimientos: Mencione aquí (cuando correspondan) a las personas que contribuyeron al trabajo y merecerían ser mencionadas.

Referencias: Escriba el detalle completo de las referencias usadas para preparar el trabajo.

Apéndices: En un reporte largo, es común que parte del material dificulte la lectura del trabajo si se lo incluye en el cuerpo del informe, por ejemplo, una larga deducción de una fórmula, el listado de un programa que usó en el análisis de los datos, etc. Este material debe incluirse en los apéndices.

III. Fecha de entrega

Propóngase entregar el informe dos o tres días antes de la fecha límite. Las fechas límite NO son fechas *alrededor* de las cuales debería presentarse el informe. Las fechas límite están colocadas para facilitar la evaluación de los informes, y corresponden al ÚLTIMO día en que se puede entregar el informe sin ser penalizado (recuerde que Ud. no es la única persona que entrega el reporte!). Informes tardíos serán penalizados con una reducción en el puntaje total. La penalizaciones pueden ser obviadas en caso de enfermedad o fuerza mayor. Las presiones normales del trabajo y la vida universitaria no son razones válidas para entregar tarde un informe.

IV. Notas generales

Un experimento real puede llevar meses o años. El registro del laboratorio puede consistir en varios cuadernos llenos de anotaciones, impresiones de computadora, fotografías, gráficos, etc. Usted debe destilar, reorganizar y empaquetar todo este material en un documento claro y conciso de unas pocas páginas. El reporte debe comunicar los resultados eficientemente. Debe tener una estructura lógica que permita al lector extraer fácilmente los puntos esenciales. Los lectores desean saber qué es lo que se ha logrado, y Ud. debe decirlo clara y efectivamente. Cada experimento tiene ciertos objetivos, y Ud. debe establecer hasta qué punto éstos fueron cumplidos. Si Ud. va a determinar la constancia de la aceleración debida a la gravedad, deberá, en su discusión de los resultados, establecer si su experimento ha demostrado esta constancia, y dentro de qué incerteza. Si Ud. va a determinar el valor de la aceleración debida a la gravedad, entonces Ud. deberá dar un valor único para esta cantidad, acompañado por la incerteza estimada. Estas afirmaciones deben constar en la sección de resultados, aún en el caso de que se mencionen en otras partes del texto.

El estilo del informe debería ser conciso, formal y escrito en pasado, especialmente en lo que se refiere al experimento. Éste es el estilo preferido para escribir reportes en el medio técnico o científico. Se espera que Ud. escriba legiblemente, con buena gramática, y sin faltas de ortografía. El uso de procesadores de texto es ciertamente recomendable, pero de ninguna manera obligatorio. Los diagramas, circuitos y gráficos debieran hacerse en computadora sólo si el detalle logrado es tan bueno como el de un buen dibujo hecho a mano. El objetivo no es hacer una presentación extremadamente elaborada. En esta etapa, debe concentrarse en la claridad de la escritura y la presentación.

Condense y recorte la presentación para remarcar los puntos importantes en forma efectiva. Cuando el reporte es corto, es a veces razonable condensar varias secciones en una, por ejemplo Resultados y Discusión. No sobrecargue el texto con cálculos, a menos que necesite explicar algo acerca de ellos. No "rellene" el texto: el informe va a ser evaluado por su contenido, no por su peso.

V. Trece pequeñas claves de escritura para estudiantes

Antes de escribir:

1. Planifique. Si puede, venga y muéstrenos un esquema y/o borrador de su informe. Pueden ser los diez minutos más productivos del cuatrimestre. Tenga en cuenta que nuestra capacidad de consulta es reducida, no venga a último momento.

2. Siga las instrucciones cuidadosamente. Sepa lo que se espera de Ud., e invierta su tiempo de manera acorde. Por ejemplo, evaluar un diseño toma más tiempo que simplemente describirlo, justificar una conclusión toma más tiempo que simplemente reportarla. Omitir o prestar poca importancia a una sección importante respecto de otra irrelevante puede afectar severamente su calificación.

3. Escriba un "esqueleto" del trabajo. Resista la tentación de comenzar llenando páginas con frases sin sentido tales como "Desde el principio de los tiempos, el hombre se ha sentado alrededor de las hogueras tribales, contemplando las estrellas y pensando acerca de {ponga su tema aquí}". Para tratar de evitar esta clase de problemas, especialmente la noche antes de la fecha de entrega, Ud. debería tener una idea clara de adónde quiere llegar antes de salir.

Mientras está escribiendo:

4. Haga un backup de sus archivos, y alimente a su perro con algo que no sea su informe de laboratorio. De esa forma, no tendrá que ofrecer una excusa lamentable por no entregar a tiempo.

5. Nunca se copie. Aún cuando no copie las palabras exactas del autor original, usar el trabajo de otra persona sin mencionarlo explícitamente es plagio. Recuerde que si Ud. se copia, nunca desarrollará la habilidad de escribir!

6. Organice su texto. Use una buena estructura de párrafos, prestando atención a la transición entre temas. Defina los términos antes de usarlos, partiendo de información conocida y yendo cuidadosamente hacia lo nuevo.

7. Use las ilustraciones apropiadamente. No importa cuán bellos sean sus gráficos y figuras, no podrán compensar una mala escritura. No deje que los gráficos le tomen demasiado tiempo, dedíquese a una escritura clara. Recuerde que debe describir con palabras toda información importante mostrada en los gráficos.

8. Recuerde que el reporte debe ser conciso, no lo rellene.

Después de escribir:

9. Verifique la cohesión del trabajo. Asegúrese que el título y la introducción que escribió originalmente todavía tienen sentido. Ud. será evaluado, en parte, por la claridad con que está tratando de decir las cosas. Si Ud. encuentra que al final el documento no muestra lo que prometió al principio, entonces cambie ligeramente la introducción para hacerla compatible. Recuerde no repetir la introducción en las conclusiones (o viceversa).

10. Controle cuidadosamente la gramática y la ortografía del texto.

11. Haga que el texto luzca bien. Elija un buen formato. Deje un par de centímetros de margen alrededor de la hoja y use doble espacio. Use tamaño de letra 12, tamaños más pequeños son difíciles de leer. Numere las páginas, aunque sea a mano. Todo el mundo juega con el formato una vez escrito el texto, pero tenga en cuenta que grandes espacios en blanco, títulos sobredimensionados e inmensos gráficos no engañarán a nadie.

12. Imprima la versión final con cuidado. Si parte del material está escrito en lápiz, presente un fotocopia.

13. Abroche sus páginas con cuidado. Use un broche en la esquina superior izquierda. Encuadernaciones con espiral, carpetas plásticas voluminosas y grandes broches metálicos dificultan la tarea de la persona que corrige, quien tiene que manejar decenas de estos informes. Piense además que una presentación impresionante puede ser contraproducente: resaltará más los errores que pueda contener el informe.

VI. Fuentes de este Apéndice

Partes de esta Sección fueron extraídas de las siguientes fuentes:

University of Toronto Engineering Writing Centre

MacQuarie University, School of Mathematics, Physics, Computing and Electronics

The University of Edinburgh, Department of Mechanical Engineering

Lock Haven University.

Apéndice B

NOTAS ACERCA DE LA CONFECCIÓN DE GRÁFICOS

Los gráficos tienen muchas ventajas que favorecen su uso en la representación de datos experimentales. Una de las ventajas más importantes es que un gráfico puede revelar máximos, mínimos, puntos de inflexión u otras características significativas en los datos que pueden no ser evidentes en otras formas de representación, como por ejemplo las tablas. Además, es posible por ejemplo derivar una curva directamente simplemente trazando su tangente en el punto de interés, o integrarla midiendo el área bajo la curva. El siguiente es un resumen de los pasos más importantes a seguir en la confección de un gráfico.

A pesar de que hacemos referencia explícita al proceso de graficación con lápiz y papel, su aplicación a la graficación usando PCs es inmediata. Una nota de precaución: NO utilice programas de graficación a menos de que esté absolutamente seguro que sabe manejarlos!

1) *Elección del papel para graficar:* El papel milimetrado o cuadriculado es suficiente para la gran mayoría de las aplicaciones. El papel semilogarítmico es conveniente cuando una de las coordenadas es el logaritmo de una de las variables observadas. Si ambas coordenadas serán logaritmos de las variables observadas, entonces puede usarse papel doble logarítmico o log-log. Las escalas logarítmicas son particularmente útiles cuando el rango de medición abarca varios órdenes de magnitud.

Cuando la relación funcional entre las variables observadas es desconocida, entonces se suelen utilizar los tres tipos de papel, pues en base a un proceso de prueba y error puede entonces encontrarse cuál de ellos da una mejor aproximación a una línea recta.

2) *Elección de las escalas:* Las siguientes son cinco reglas comúnmente usadas en la elección de las escalas de un gráfico:

i) La escala de la variable independiente debe ser graficada a lo largo del eje X (eje de las abscisas).

ii) Las escalas deben elegirse de tal forma que cualquier punto del gráfico pueda encontrarse rápida y fácilmente.

iii) Las escalas deben numerarse de forma tal que la curva resultante sea tan grande como lo permita la hoja, incluyendo las barras de error correspondientes a las incertezas en los puntos experimentales.

iv) A iguales condiciones, las variables deben ser elegidas de forma tal que el gráfico resultante se aproxima lo mejor posible a una línea recta.

v) Las escalas deberán elegirse de forma tal que la curva tenga, dentro de lo posible, una pendiente geométrica cercana a la unidad.

3) *Nombres de los ejes:* Los ejes principales de coordenadas deben llevar los nombres de las cantidades representadas, así como las unidades en que estas cantidades están medidas.

4) *Representación de los datos:* Cada punto debe indicarse con un símbolo adecuado, tal como un pequeño cuadrado o círculo. Además, cada punto debe acompañarse por barras indicativas de las incertezas experimentales presentes en la obtención de los datos. Frecuentemente sucede que varias curvas tomadas en distintas condiciones se dibujan en el mismo gráfico. En este caso se aconseja utilizar distintos símbolos y/o colores para cada una de las distintas curvas.

5) *Ajuste de curvas a los datos experimentales:* Cuando se han tomado suficientes datos y la relación funcional entre las dos variables está bien definida, entonces es costumbre dibujar una curva suave a través de los puntos. Cuando la curva es diferente a una línea recta, pueden utilizarse herramientas como splines, etc., para obtener una curva suave. En general no se enfatizarán las inflexiones o las discontinuidades, a no ser que su magnitud sea mayor que el error experimental. La curva debiera pasar tan próxima a los puntos experimentales como sea razonablemente posible, sin que haya una necesidad de que pase por todos y cada uno de los puntos. Existe una tendencia natural a sobreestimar la importancia de los puntos extremos, sin tener en cuenta que éstos son, en general, los puntos menos exactos del gráfico.

6) *Leyenda:* La nota explicativa que acompaña a la figura, o leyenda, debe contener una descripción más o menos completa de qué es lo que el gráfico intenta mostrar. No escriba "T vs. L" o "Período vs. Longitud". Escriba, en cambio, algo más descriptivo, como por ejemplo: "Período del péndulo en función de la distancia al centro de masas"

Listado de experiencias

Experiencia No. 1: Mediciones y errores

Experiencia No. 2: Estudio de una ley experimental

Experiencia No. 3: Resistencia

Experiencia No. 4: Puente de hilo

Experiencia No. 5: Elementos óhmicos y no óhmicos

Experiencia No. 6: Transformador - Circuitos RLC

Experiencia No. 7: Batidos y ondas estacionarias

Experiencia No. 8: Interferencia y difracción

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 1
MEDICIONES Y ERRORES

Esta primer experiencia de laboratorio lo introducirá a un aspecto común a todo experimento: el problema de la medición y cálculo de errores. Luego de realizar las mediciones, Ud. deberá reportar su actividad de laboratorio escribiendo un informe. Si Ud. nunca ha escrito un informe de laboratorio, encontrará útil leer en primer lugar el Apéndice A de este manual.

NOTA IMPORTANTE!: LAS EXPERIENCIAS DE LABORATORIO SON *ABIERTAS*, EN EL SENTIDO QUE SU ACTIVIDAD Y EL ANÁLISIS DE SU EXPERIMENTO VAN TAN LEJOS COMO UD. QUIERA LLEGAR. LAS GUÍAS DE LABORATORIO SON TÁN SÓLO ESO: GUÍAS QUE MUESTRAN LOS PROCEDIMIENTOS BÁSICOS. NO LE AYUDARÁN A ANALIZAR SUS DATOS, A VERIFICAR LA CORRECTITUD DE SUS SUPOSICIONES, A CONTROLAR SU ARREGLO EXPERIMENTAL, O A ESCRIBIR SUS CONCLUSIONES. TODAS ESTAS COSAS QUEDAN A SU CRITERIO. EL APÉNDICE A LE AYUDARÁ A IDENTIFICAR CUÁLES SON LAS PARTES BÁSICAS DE UN INFORME, LÉALO CON ATENCIÓN. LAS HERRAMIENTAS MÁS VALIOSAS EN LA REALIZACIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE LABORATORIO SON LA RIGUROSIDAD, LA AUTOCRÍTICA Y EL SENTIDO COMÚN.

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

En el Laboratorio se le entregará un conjunto de elementos e instrumentos necesarios para realizar las mediciones que se indican a continuación y completar las planillas adjuntas. Las planillas lo ayudarán en la confección de su primer informe de Laboratorio. Ud. deberá entregar como parte de dicho informe copia de las tablas I y II. Las mediciones que Ud. debe realizar son las siguientes:

1) Mediciones Directas
   - a) Masa, diámetro y altura de un cilindro,
   - b) Espesor, lado mayor y lado menor de una hoja de papel,
   - c) Espesor de 30 hojas de papel, usando dos instrumentos diferentes, y
   - d) Longitud de un péndulo y tiempo de 1, 10 y 30 oscilaciones.

2) Mediciones Indirectas
   - a) Volumen y densidad del cilindro,
   - b) Área y espesor de una hoja,
   - c) Valor del período del péndulo, en base al tiempo de 1, 10 y 30 oscilaciones, y
   - d) Valor de la aceleración de la gravedad, en base al tiempo de 1, 10 y 30 oscilaciones.

Nota: Observe que la división más pequeña del cronómetro es, en general, menor que el tiempo de respuesta típico del ser humano. Por lo tanto, no es correcto asignarle a la medición el error que se desprende de la lectura del instrumento. Aunque tampoco es completamente correcto suponer que el error de la medición es igual al tiempo de respuesta, esta es una estimación en todo caso un poco pesimista. Para estimar cuál es su tiempo de respuesta, realice la siguiente experiencia: separe sus dedos índice y pulgar un pequeña distancia, justo lo suficiente como para que entre ellos pueda deslizarse una pequeña regla plástica. Haga que uno de sus compañeros sostenga la regla verticalmente de tal forma que el cero esté aproximadamente entre sus dedos. Ahora su compañero debe dejar caer la regla sin decirle a Ud. cuándo lo hará, y Ud. debe tratar de atraparla entre sus dedos con la mayor rapidez posible. La regla caerá varios centímetros antes de que Ud. pueda detenerla. A partir de esta distancia, y usando el valor conocido de la aceleración de la gravedad, Ud. puede calcular cuál es su tiempo de respuesta.

TABLA I: MEDICIONES DIRECTAS

MED. NO.	**OBJETO Y CANTIDAD A MEDIR**	**INSTRUMENTO**		**RESULTADO DE LA MEDICIÓN**		
		Nombre	Resolución	Valor medido	Error absoluto	Error relativo
	CILINDRO					
1	Masa	Balanza				
2	Diámetro	Calibre				
3	Altura	Calibre				
	UNA HOJA					
4	Espesor	Micrómetro				
5	Lado mayor	Cinta Métr.				
6	Lado menor	Cinta Métr.				
	30 HOJAS					
7	Espesor	Calibre				
8	Espesor	Micrómetro				
	PÉNDULO					
9	Longitud	Cinta Métr.				
10	Tiempo (1 osc.)	Cronómetro				
11	Tiempo (10 osc.)	Cronómetro				
12	Tiempo (30 osc.)	Cronómetro				

TABLA II: MEDICIONES INDIRECTAS

Volumen del Cilindro $V_0 \pm \Delta V$	
Densidad del Cilindro $\delta_0 \pm \Delta\delta$	
Área de 1 hoja $A_0 \pm \Delta A$	
Espesor de 1 hoja (30 hojas, calibre) $e_0 \pm \Delta e$	
Espesor de 1 hoja (30 hojas, micr.) $e_0 \pm \Delta e$	
Período del péndulo (1 osc.) $T_0 \pm \Delta T$	
Período del péndulo (10 osc.) $T_0 \pm \Delta T$	
Período del péndulo (30 osc.) $T_0 \pm \Delta T$	
Aceleración de la gravedad (1 osc.) $g_0 \pm \Delta g$	
Aceleración de la gravedad (10 osc.) $g_0 \pm \Delta g$	
Aceleración de la gravedad (30 osc.) $g_0 \pm \Delta g$	

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 2
ESTUDIO DE UNA LEY EXPERIMENTAL

En esta experiencia Ud. tratará de encontrar la expresión del período de dos distintos péndulos físicos a partir de mediciones experimentales de longitudes y tiempos. Esta parte de la práctica será desarrollada en dos niveles: primero se tratará simplemente de un ejercicio de obtención de datos y graficación para determinar cómo el período T depende de la longitud L. En una segunda etapa, luego de refrescar lo visto en la teoría, Ud. deberá deducir una expresión para el período T y comparar sus resultados teóricos con sus datos experimentales.

PRIMERA ETAPA: ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE EL PERÍODO Y LA LONGITUD

A) PÉNDULO FÍSICO DE VARILLA:

Entre los elementos que le han sido provistos para este Laboratorio, Ud. encontrará 9 varillas de hierro de sección cuadrada y distintas longitudes. Suspenda cada una de las varillas de longitud L_0, hágalas oscilar y tome el tiempo t de 10 oscilaciones completas. A partir de estas mediciones, complete la siguiente tabla:

L_0	ΔL	t_0	Δt	T_0	ΔT

Observe ahora la primera y quinta columna: puede inferir algún tipo de relación entre estas cantidades? Tal vez un gráfico le ayude a encontrar la respuesta. Analice las siguientes posibilidades:

1) $T = a\,L + b$; 2) $T = a\,b^L$; 3) $T = a\,L^b$.

Caso 1: $T = a\,L + b$. Grafique T versus L usando papel milimetrado. No olvide las barras de error!! Es éste el gráfico de una función lineal? Si es así, no tendrá dificultad alguna en determinar el valor de las constantes a partir del gráfico.

Caso 2: $T = a\,b^L$. En este caso, se cumplirá que $\log T = \log a + L \log b$. Para comprobar si ésta es la respuesta más acertada, llene la siguiente tabla:

L_0	ΔL	$T_0 + \Delta T$	$T_0 - \Delta T$	$\log (T_0+\Delta T)$	$\log (T_0 -\Delta T)$	$\log (T_0)$

Grafique ahora $\log T = f(L)$ usando papel milimetrado. Es éste el gráfico de una función lineal? Si es así, obtenga el valor de la ordenada al origen y de la pendiente y exprese la relación entre T y L como $T = a_0\, {b_0}^L$. Observe que la construcción de la tabla anterior no es necesaria si Ud. utiliza papel simple logarítmico.

Caso 3: $T = a\,L^b$. En este caso, debe cumplirse que $\log T = \log a + b \log L$. Grafique $\log T$ versus $\log L$ utilizando papel doble logarítmico. Es éste el gráfico de una función lineal? Si es así, obtenga el valor de las constantes a partir del gráfico y exprese la relación entre T y L como $T = a_0\, L^{b_0}$.

B) PÉNDULO FÍSICO DE VARILLA Y MASA DESLIZANTE:

Este péndulo consta de una varilla de longitud fija L (mídala!) y una esfera o cilindro cuya posición sobre la varilla puede ajustarse mediante un tornillo prisionero. La masa de la varilla y la esfera o cilindro son iguales. Suspenda la varilla y mida el tiempo de 10 oscilaciones para diferentes posiciones x de la masa deslizante. Construya a partir de estos datos una tabla semejante a la que utilizó anteriormente para el péndulo físico de varilla. Grafique T versus x. Cuáles son las características de esta curva que la distinguen de la curva correspondiente para el péndulo físico de varilla? Puede inferir algún tipo de relación entre estas cantidades?

SEGUNDA ETAPA: COMPARACIÓN TEÓRICO-EXPERIMENTAL

En esta etapa Ud. deberá encontrar las expresiones analíticas que relacionan el período con la longitud de la varilla y la posición de la masa deslizante, y comparar las curvas obtenidas a partir de estas expresiones con los datos que ha obtenido experimentalmente. Para ello, comience por dibujar en un mismo gráfico sus datos experimentales (incluyendo barras de error) y la curva correspondiente a la expresión analítica. Use en todos los casos escalas lineales. En el caso del péndulo de varilla, verifique si el valor calculado analíticamente para a y b se encuentra dentro del rango de posibles valores que Ud. extrajo de sus datos en el primer informe. En el caso de la varilla y la masa deslizante, suponga para sus cálculos que la masa de la varilla y de la esfera son iguales. Para este caso, comience por hallar la posición de mínimo período y aquella donde el período resulta ser igual al de la varilla sola.

El informe deberá contener estos elementos y todo otro análisis que Ud.considere valioso en la interpretación del experimento. Recuerde que las experiencias de laboratorio y sus informes son abiertos, es decir, no hay pautas exhaustivas para su elaboración. Como en todas la experiencias de laboratorio que realice en los cursos de Física de nuestro Departamento, Ud. será evaluado en este caso por la completitud, profundidad y originalidad de su informe.

REFERENCIAS:

[1] *Determinación de una ley a partir de resultados experimentales,* A. Periello, M. Pagna, R. Ferrazzo, H. Cassic, R. Pequeroles, y M. Basile, Memorias de la X Reunión Nacional de Educación en Física, pág. 1b-02 (Mar del Plata, Noviembre de 1997).

[2] *A counterintuitive physical pendulum lab,* J. Sherfinski, The Physics Teacher **35**, 252 (1997).

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 3
RESISTENCIA

Esta experiencia de laboratorio le mostrará, en un caso particularmente simple, cómo trabajar utilizando múltiples mediciones. En el Laboratorio se le entregará un conjunto de cintas de papel conductor negro, marcadas en centímetros, un óhmetro digital y contactos. Utilizando estos elementos, Ud deberá descubrir cómo se relaciona la resistencia de un conductor con su ancho.

Comience por medir la resistencia de una de las cintas para un dado largo (elíjalo Ud.). Verá que el valor que obtiene al medir fluctúa como resultado de factores que Ud. no puede controlar muy bien, tales como la resistencia de contacto, etc. Como resultado de estas fluctuaciones, Ud. no obtendrá un único valor de la resistencia. Sin embargo, cuantas más veces mida bajo las mismas condiciones, mejor será la estimación que Ud. podrá hacer del verdadero valor de R y de su incerteza, representada por el valor de la desviación estándard de la media.

Sólo para una de las cintas, mida la resistencia 30 veces. Grafique el valor de la desviación estándard para 3, 4, ..., 30 mediciones. Cómo evoluciona el valor de esta cantidad a medida que se toma un mayor número de datos?

Ahora proceda a medir todas las cintas. Para esta experiencia, se requiere que la incerteza relativa en el valor de la desviación estándard sea del 25%. Cuántas mediciones deberá hacer Ud. en cada cinta para lograrlo? Una vez que haya medido todas las cintas, condense todas sus mediciones en 10 valores y sus correspondientes incertezas y muestre los puntos experimentales en un gráfico de resistencia versus ancho (haga un gráfico en escala lineal y otro en escala doble logarítmica). A partir de este gráfico, y haciendo un ajuste apropiado de los datos, determine el exponente b y la constante k en la ecuación $R = k\, l\, a^b$, donde k es una constante dimensional, l es el largo y a es el ancho de la cinta. Por último, suponga que puede escribir $k = q/e$, donde q es otra constante dimensional y e es el espesor del papel. Mida el espesor del papel con un micrómetro y calcule el valor de la constante q. Cuál es el nombre y significado de esta esta constante?

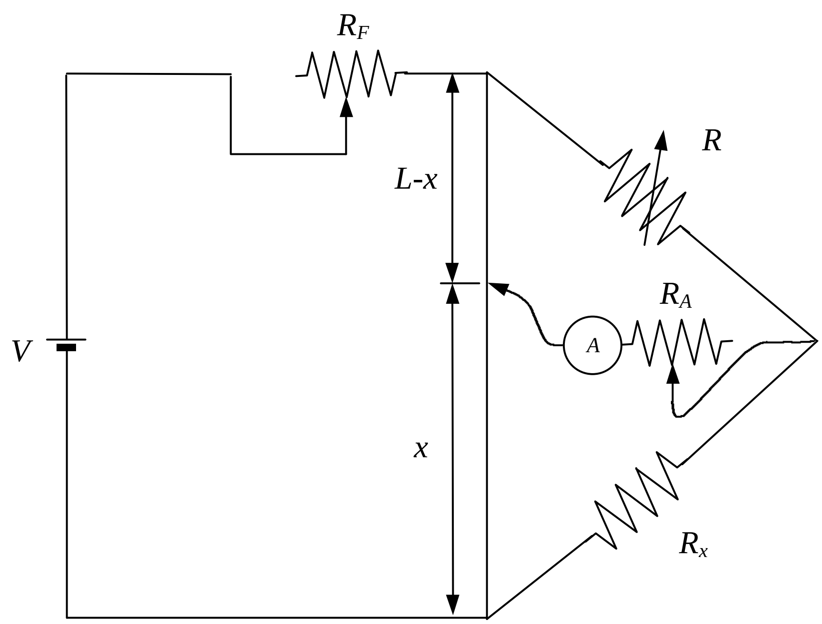
Asegúrese de tomar un número suficiente de puntos para cada ancho. Calcule los errores asociados a todas sus mediciones y resultados. Qué errores sistemáticos piensa Ud. que están involucrados en sus mediciones? Averigüe qué es la curva de calibración de un instrumento.

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 4
PUENTE DE HILO

En esta experiencia de laboratorio Ud. utilizará un circuito de puente hilo para medir un par de resistencias desconocidas. Los circuitos de tipo puente son utilizados ampliamente en la medición de cantidades tales como resistencia, inductancia, capacidad y otras.

CARACTERÍSTICAS DEL PUENTE DE HILO

El puente de hilo constituye una simplificación del puente de Wheatstone en la cual dos de las resistencias han sido sustituídas por un hilo conductor tenso de sección constante. El esquema de conexiones es el siguiente:



Al apoyar el cursor conectado al miliamperímetro, el alambre queda dividido en dos resistencias de valor $R_1 = \rho\, x / s$ y $R_2 = \rho\, (L\text{-}x) / s$, donde ρ es la resistividad del alambre y s su sección transversal. Recordando que cuando el puente está en equilibrio la corriente a través del miliamperímetro es cero, obtenemos la siguiente expresión para el valor de R_x (demuéstrelo!):

$$R_x = R\, x / (L - x).$$

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

- Conecte la resistencia incógnita y deslice los cursores de R_F y R_A de modo de obtener la mayor resistencia entre sus terminales.

- Ubique el cursor conectado al miliamperímetro aproximadamente a la mitad del puente (donde logrará reducir el error relativo. Por qué?).

- Acerque el puente a la situación de equilibrio mediante la resistencia variable R, usando el cursor para llegar al equilibrio final.

- Ya en equilibrio, proceda a reducir el valor de resistencia de R_A hasta llevarlo a cero. Esta operación producirá un desequilibrio en el puente, el cual puede ser compensado fácilmente mediante el cursor.

- Disminuya el valor de R_F. Con valores pequeños de R_F el puente se torna inestable. Trabaje con atención, pues la más mínima variación del cursor hará que la lectura del miliamperímetro varíe bruscamente. El aumento de sensibilidad obtenido de esta forma tiene como desventaja el calentamiento del hilo debido al aumento de la corriente que circula por él. Por lo tanto, se debe disminuir R_F sólo en el instante de la medición.

- Una vez efectuadas las mediciones, permute las conexiones en el puente (con esto logrará atenuar el error debido a la falta de uniformidad que pueda tener el hilo) y repita la medición. Compare cuidadosamente los valores obtenidos antes y después de invertir el puente. Recuerde que la respuesta a sus mediciones es sólo una.

Sugerencia: Deduzca la expresión de la resistencia R_x en función de R y x y calcule el error asociado a la medición de R_x (usando propagación de errores) <u>antes</u> de realizar la experiencia. De ese modo sabrá cuáles son los errores experimentales que intervienen en el cálculo del error en sus resultados.

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 5
ELEMENTOS ÓHMICOS Y NO ÓHMICOS

En esta experiencia de laboratorio Ud. observará el comportamiento de elementos óhmicos y no óhmicos dentro de un circuito. Además, tendrá la oportunidad de utilizar sus conocimientos para construir un modelo teórico simple que reproduzca el comportamiento del circuito experimental.

EXPERIENCIA NO. 1: ESTUDIO DE ELEMENTOS ÓHMICOS

Como recordará de lo visto en teoría, un elemento óhmico es aquel en el cual existe una relación lineal entre la tensión que se le aplica y la corriente que lo atraviesa. Como ejemplo de lo dicho, Ud. trazará las curvas tensión corriente (curva V-I) de dos resistores. A partir de estas curvas, deducirá el valor de sus resistencias. Para construir la curva V-I, Ud. deberá armar alguno de los circuitos de la figura 1 (cuál es la diferencia entre ellos?). Dado que Ud. no conoce aún el valor de la resistencia a medir, escoja cualquiera y a posteriori evalúe si el método adoptado fue el más conveniente.

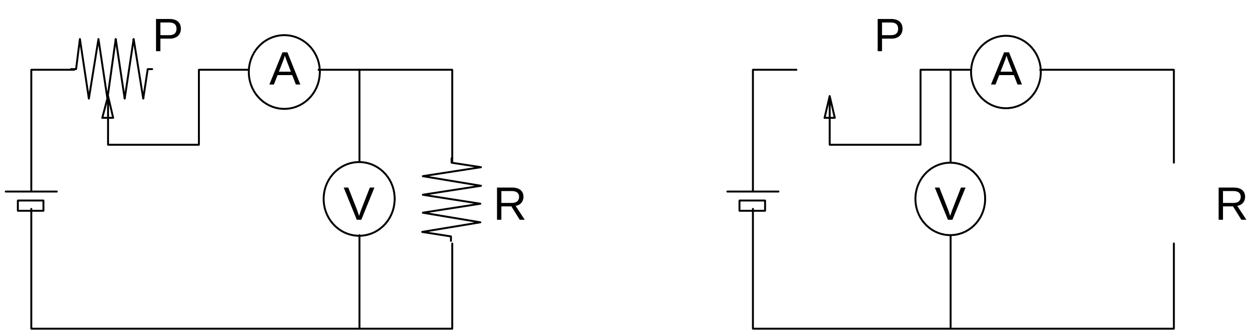


Fig. 1. Dos configuraciones diferentes para medir corriente y caída de tensión en una resistencia.

Observe las siguientes precauciones:
* Asegúrese que el potenciómetro se encuentre en la posición de máxima resistencia.
* Ponga el tester en una escala adecuada de medición de tensión continua **antes de medir.**
* Vaya disminuyendo la resistencia del potenciómetro de modo que la tensión medida varíe en pasos de 0.30 V o menos.
* Construya una tabla con los valores de tensión y corriente.
* Grafique, verifique que se trata de un elemento óhmico y encuentre el valor de su resistencia.
* **El voltímetro y el amperímetro no deben excederse de su rango** (pueden dañarse en forma permanente!).

EXPERIENCIA NO. 2: ESTUDIO DE ELEMENTOS NO ÓHMICOS

Los elementos no óhmicos son aquellos en los cuales existe una relación no lineal entre la tensión aplicada sobre ellos y la corriente que los atraviesa. En esta sección, Ud. debe medir la curva característica V-I de la *caja negra* de la figura 2, de manera similar a lo realizado en la experiencia No. 1. Utilice el mismo método (corto o largo) que empleó anteriormente.

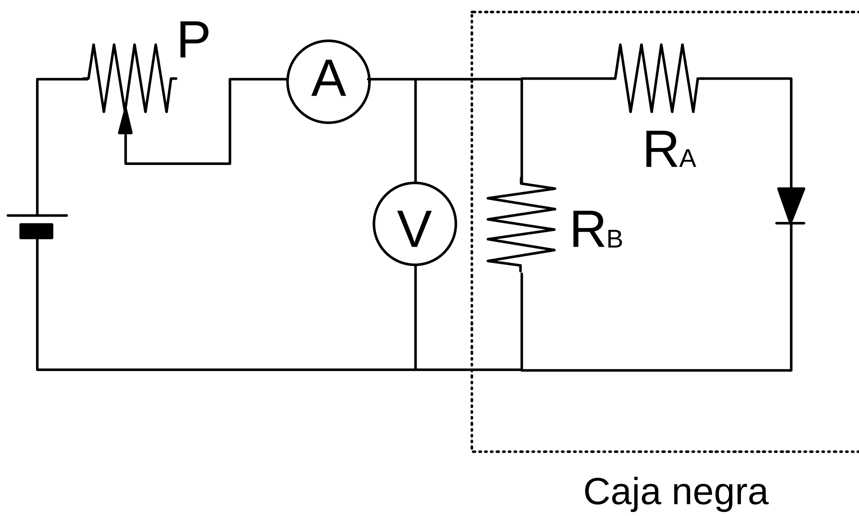


Fig. 2. Circuito para la medición de la característica V-I de la caja negra usando el método corto (ejemplo).

La caja negra tiene en su interior algunos diodos y los dos resistores que Ud. midió en la experiencia No.1. Justamente los diodos son los que le confieren la característica no lineal.

Discusión de los resultados y modelado del circuito:

Analizando las tres curvas que ha medido, discuta los resultados y conteste las siguientes preguntas:

* Cómo funciona el circuito de la caja negra?
* Por qué se produce el cambio de pendiente <u>en el valor de tensión</u> en que lo hace?
* A qué se debe el cambio de pendiente?
* Qué relación hay entre las pendientes de la curva de la caja negra y las pendientes de las curvas de los resistores?
* Por qué no se ve quebrada (abrupto cambio de derivada) la curva del elemento no lineal?

Después de contestar estas preguntas, trate de modelar el sistema físico sobre el cual estuvo realizando las mediciones (la caja negra) utilizando sus conocimientos sobre circuitos de CC y haciendo suposiciones sobre el funcionamiento de los diodos. Una primer aproximación al funcionamiento de los diodos es tratarlos como llaves que se abren y cierran a una tensión determinada. Usando esta hipótesis, dibuje un circuito y resuélvalo, incorporando toda la información posible recogida en el experimento y comparando las curvas V-I de su modelo con las medidas experimentalmente. Qué tan buena es la aproximación de tratar al diodo como una llave? Ahora suponga que el diodo puede modelarse como una llave de tensión *más* una batería ideal de valor conveniente colocada en serie. Realice en este caso el mismo análisis y comparación que hizo en el caso anterior. Qué tan satisfactorio es el ajuste de su modelo a los datos recogidos?

EXPERIENCIA NO. 3: RESISTENCIA DE UNA BOMBILLA ELÉCTRICA

El objetivo de esta experiencia es que Ud. mida la resistencia de una bombilla eléctrica de las comúnmente utilizadas en las linternas.

* Mida la resistencia de la bombilla utilizando un tester.
* Arme nuevamente el circuito de medición de las experiencias anteriores reemplazando la caja negra por la bombilla. Tome las mediciones correspondientes y obtenga la curva V-I. Analícela y discuta el comportamiento de este elemento.

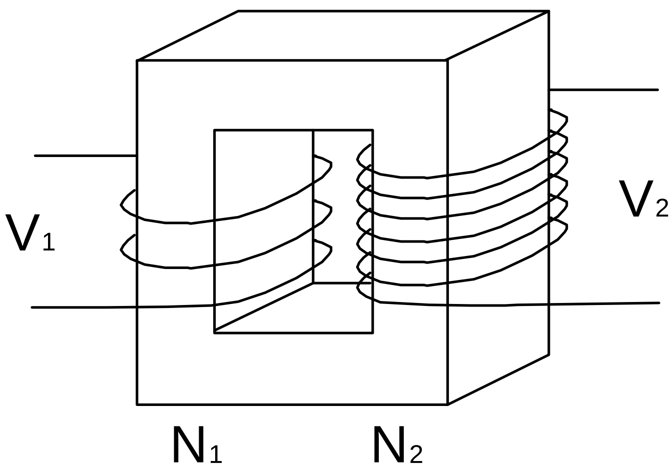
EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 6
TRANSFORMADOR - CIRCUITOS RLC

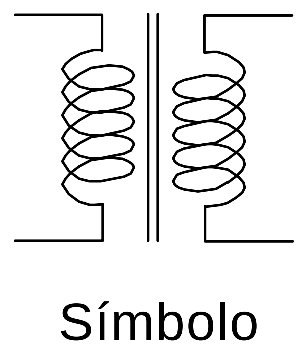
En esta experiencia de laboratorio Ud. realizará mediciones en circuitos de corriente alterna que involucran transformadores ó circuitos RLC.

1) TRANSFORMADOR

INTRODUCCIÓN

El transformador es un dispositivo que permite modificar la amplitud de una onda de tensión alterna sin pérdidas apreciables. Básicamente, el transformador consiste en dos bobinados aislados eléctricamente el uno del otro y montados sobre un mismo núcleo de hierro. La relación de tensiones entre primario y secundario en el transformador ideal, tal como lo ha visto Ud. en la teoría, es precisamente la relación entre espiras entre los devanados primario y secundario.





PRECAUCIÓN:

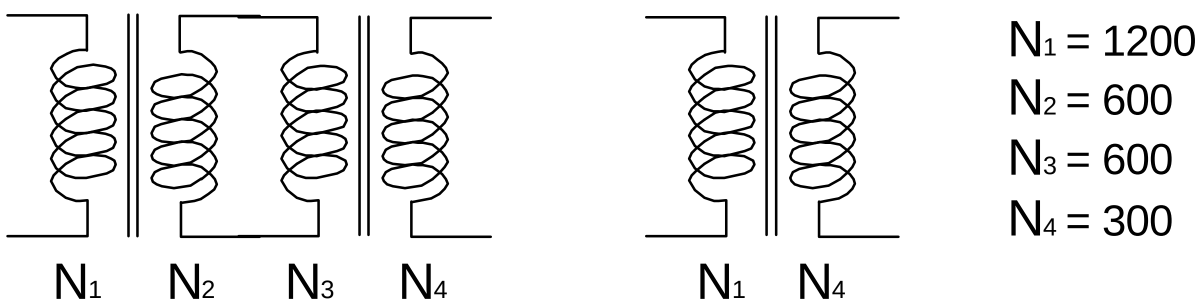
DEBIDO A QUE LA TENSIÓN DE ALIMENTACIÓN A UTILIZAR ES 220 V, NO SE DEBE MANIPULAR EL CIRCUITO SIN ANTES DESCONECTAR EL CIRCUITO DE LA RED.

ELEMENTOS NECESARIOS PARA EL DESARROLLO DE LA PRÁCTICA:

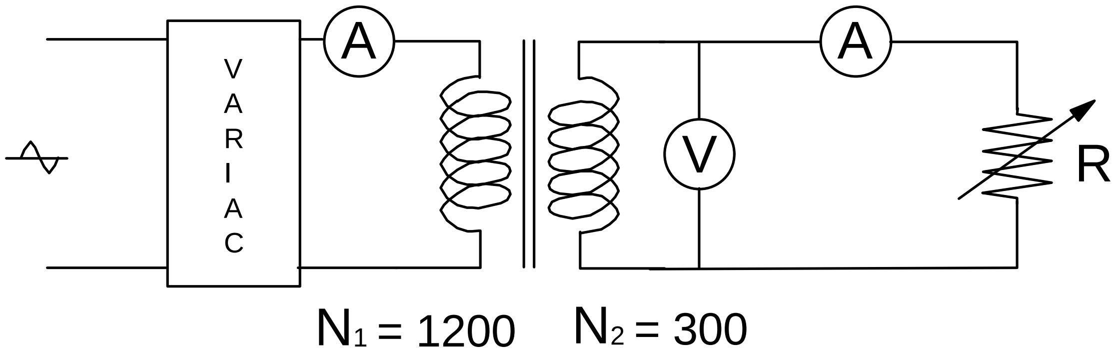
1 arrollamiento de 300 vueltas
2 arrollamientos de 600 vueltas
1 arrollamiento de 1200 vueltas
2 núcleos de hierro
2 amperímetros
1 multímetro
1 reóstato 0-100 Ohms
2 fijadores de núcleos
1 juego de cables

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

Se desea armar un transformador que reduzca la tensión de entrada en un factor 4. Se propone al alumno armar los siguientes circuitos:



En todo transformador la tensión de salida debe mantenerse constante, tanto cuando el transformador se encuentra funcionando en vacío ($I_{sec} = 0$), como cuando funciona a plena carga ($I_{sec} = I_{nominal}$). La curva de regulación de un transformador, $V_{sec} = f(I_{sec})$ cuantifica la variación de la tensión en el secundario en función de la corriente en el secundario. Para las dos configuraciones dibujadas más arriba, Ud. obtendrá las curvas de calibración. El circuito a utilizar es el siguiente:



- Utilizando el tranformador variable, fije la tensión del primario en 40 Volts.

- Varíe R de modo de obtener valores de I_{sec} separados aproximadamente 50 mA (Nota: para obtener el valor de V_{sec} para I_{sec} = 0 desconecte la resistencia variable y deje el secundario abierto).

- Grafique las curvas de V_{sec} vs. I_{sec} para las dos configuraciones.

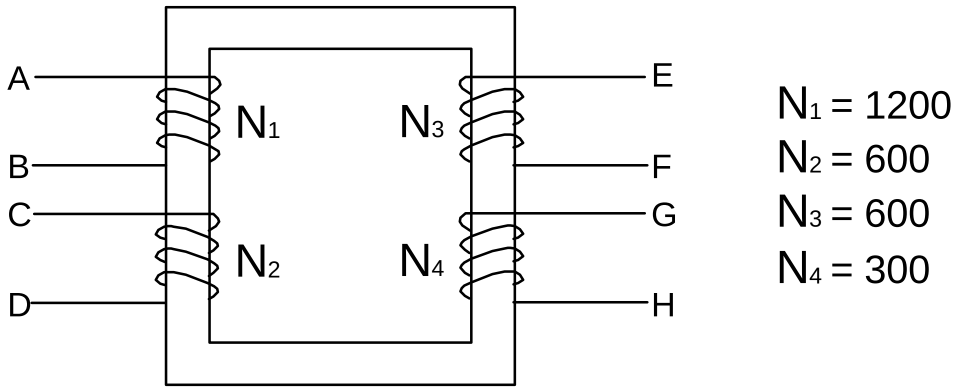
- Indique, a partir de los valores que obtuvo, cuál de las dos soluciones es la óptima y enumere sus ventajas.

- De acuerdo a lo anterior, qué características deduce que debe tener un transformador para que su rendimiento sea óptimo?

- Si se desea una tensión de salida mínima igual al 80% de la tensión del secundario en vacío, cuál es el valor máximo de corriente en el secundario que no puede ser sobrepasado en cada caso?

- Encuentre la función $V_{sec} = f(I_{sec})$ para un transformador sin pérdidas resistivas. Cómo se compara esta función con la relación medida experimentalmente para el caso N_1 = 1200, N_2 = 300? Ahora suponga que el bobinado secundario tiene una resistencia parásita de aproximadamente 1 Ohm. Encuentre la relación analítica $V_{sec} = f(I_{sec})$ para este caso. Cómo se compara esta nueva función con sus datos experimentales? Es suficiente considerar la resistencia del bobinado para explicar sus mediciones? Asumiendo que las pérdidas que aparecen son puramente resistivas, grafique $R_{pérdidas} = f(I_{sec})$ descontando el efecto de la resistencia parásita de 1 Ohm.

Dado el siguiente transformador



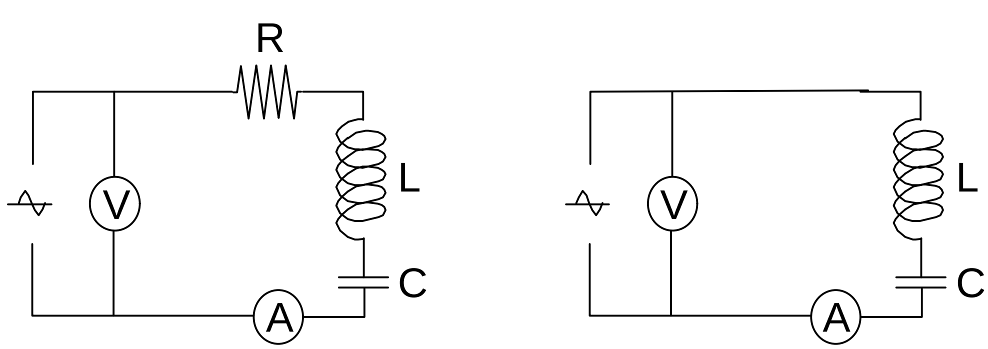
- Explique cómo conectar (o no) los bornes A-H para obtener las siguientes relaciones de transformación (indique primario y secundario)

1- $V_2/V_1 = 2$
2- $V_2/V_1 = 0.125$
3- $V_2/V_1 = 1.5$
4- $V_2/V_1 = 4/3$
5- $V_2/V_1 = 0.75$
6- $V_2/V_1 = 0.5$
7- $V_2/V_1 = 8$
8- $V_2/V_1 = 3$

- Tiene importancia el sentido en que están arrollados los bobinados?
- Verifique, armando el circuito, los incisos 1, 3 y 7.

2) CIRCUITO RLC SERIE

En esta práctica Ud. medirá la corriente y la tensión eficaz en función de la frecuencia en un circuito RLC serie alimentado con un generador senoidal. Los conexionados típicos se muestran en la siguiente figura:



Para cada frecuencia deberá registrar el valor de la tensión en los bornes del generador y la corriente que circula por el circuito. El rango de frecuencias sobre el cual deseamos caracterizar el comportamiento del circuito es 10 Hz < f < 20 kHz. En el rango 10 Hz < f < 150 Hz, mida usando pasos de 5 Hz. En el rango 150 Hz < f < 1200 Hz, mida usando pasos de 25 Hz. Finalmente, en el rango 1200 Hz < f < 20 kHz, mida usando pasos de 500 Hz. Suponga un 1% de incerteza en la lectura de las frecuencias.

- Analice en primer lugar el comportamiento teórico esperado en un circuito RLC serie. Obtenga las expresiones analíticas para la impedancia Z y la admitancia Y. Sólo a modo de ejemplo, analice un circuito donde C = 4 µF, L = 0.01 H, y R = 150 Ohm y grafique el módulo de Z y de Y para el rango 10 Hz < f < 20 kHz, tanto en escala lineal como doble logarítmica. Estudie el comportamiento de ambas funciones. Cómo se comporta la impedancia para frecuencias altas? Cómo se comporta la admitancia para frecuencias bajas? Reconoce qué significan las pendientes del gráfico de la admitancia para frecuencias muy altas y muy bajas? Qué ocurre cuando el circuito se halla en resonancia? Cuál es el valor de la impedancia en ese punto?

- Basado en sus mediciones, Ud. deberá calcular el valor de R, L y C de su circuito experimental. Comience por graficar la impedancia y la admitancia en función de la frecuencia, tanto en escala lineal como doble logarítmica. Cómo haría para extraer los parámetros del circuito a partir de la curva experimental? Evalúe sus curvas para la frecuencia de resonancia. Qué parámetro(s) puede extraer de ese punto? Ahora analice el comportamiento a bajas frecuencias. De cuál de sus curvas se extrae claramente el valor de la capacidad? Cuánto vale entonces la inductancia? Con el valor de los parámetros que acaba de encontrar, compare la curva teórica generada por su modelo con sus datos experimentales. Qué ocurre en la zona de altas frecuencias? Analice el factor de calidad de su circuito. Compare el valor calculado a partir de sus parámetros con el valor leído directamente a partir de los gráficos.

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 7
BATIDOS Y ONDAS ESTACIONARIAS

La presente práctica le permitirá tomar contacto con fenómenos típicamente ondulatorios, tales como batidos y ondas estacionarias. Podrá apreciar el fenómeno de batidos en ondas sonoras de frecuencias muy próximas, y percibir la diferencia entre sonidos con igual frecuencia fundamental pero diferente contenido armónico. Observará las ondas estacionarias en cuerdas y en columnas de aire. Por último, observará los fenómenos los fenómenos ondulatorios en un tubo con gas, y tendrá la oportunidad de medir la velocidad del sonido en el aire.

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

El arreglo experimental necesario para llevar a cabo esta práctica es muy sencllo. Para generar batidos, Ud. dispondrá de dos generadores de señales capaces de entregar formas de onda periódicas, tanto senoidales como cuadradas y triangulares. Las señales producidas pueden combinarse, amplificarse y ser enviadas a un parlante.

En cuanto al estudio de las ondas en un tubo lleno de aire, se utilizará el denominado Tubo de Kundt. Consta de un tubo de vidrio cerrado en uno de sus extremos por un tapón fijo en el cual se encuentra montado un micrófono. Por el extremo abierto del tubo se introduce un pistón deslizable provisto de un parlante. El parlante transforma las señales producidas por el generador de funciones en ondas sonoras, y el micrófono detecta estas ondas y las transforma en señales eléctricas que son observadas en el osciloscopio.

El parlante produce entonces dentro del tubo una onda sonora de frecuencia determinada por el generador de señales. Cuando esta onda llega al extremo cerrado aparece una onda reflejada, que se suma a la incidente. Si la posición del pistón que contiene al parlante es adecuada, se produce una onda estacionaria entre ambos extremos el tubo.

Note que si la vibración de la membrana del parlante es de pequeña amplitud, y si el micrófono se deforma una cantidad despreciable ante la onda de presión en el tubo, ambos extremos serán aproximadamente nodos de desplazamiento y, por lo tanto, máximos de la onda de presión. Esta onda de presión se traduce en el micrófono en una señal eléctrica que puede observarse en el osciloscopio.

EXPERIENCIAS A REALIZAR

1. Observación de ondas de igual frecuencia fundamental y con diferente forma (triangular, cuadrada, senoidal).

2. Formación de batidos entre dos ondas de frecuencia diferente: se observará la capacidad del oído para discriminar las dos frecuencias cuando la diferencia entre las mismas aumenta. En la

pantalla del osciloscopio podrán observarse los batidos para frecuencias de aproximadamente 400 y 800 Hz.

3. Observación cualitativa de ondas estacionarias en el tubo de Kundt: conecte el generador de señales al parlante y el micrófono a la entrada del osciloscopio. Coloque el pistón junto al micrófono y retírelo lentamente, observando la señal en el osciloscopio. Determine a partir de estas observaciones el orden de magnitud de la distancia entre máximos o entre nodos, para evaluar con qué instrumento conviene medir esta distancia.

4. Medición de la velocidad de propagación: en esta parte de la práctica repetirá lo realizado en la observación anterior, pero midiendo ahora la frecuencia f y la distancia entre nodos d para varios valores de f. A partir de estas cantidades, Ud. deberá hallar el valor de la velocidad de propagación c. Es conveniente en este caso medir, para cada frecuencia, la distancia entre varios nodos o máximos y luego calcular su valor medio. Sabiendo que la distancia entre nodos será $d = \lambda / 2$, y utilizando la expresión que relaciona la velocidad de propagación, la frecuencia y la longitud de onda se obtiene la expresión $c = 2\, d\, f$, la cual relaciona la velocidad de propagación con las cantidades d y f medidas experimentalmente.

El informe de laboratorio debe referirse específicamente a los puntos 1 a 4. En los casos en que haya realizado mediciones experimentales, incluya un análisis detallado de los errores cometidos en las determinaciones experimentales y en el cálculo de las magnitudes derivadas. No olvide las conclusiones!

EXPERIENCIA DE LABORATORIO No. 8
INTERFERENCIA Y DIFRACCION

La presente práctica le permitirá experimentar con fenómenos de interferencia y difracción entre fuentes luminosas coherentes. Tendrá oportunidad de observar estos fenómenos en distintas configuraciones y medir cantidades como la longitud de onda del láser y las dimensiones de distintos objetos.

PRECAUCIÓN: NO OBSERVE EL HAZ EN FORMA DIRECTA!

Los láseres que Ud. utilizará en la presenta práctica de laboratorio están clasificados según el American National Standard for Safe Use of Lasers (ANSI: Z136.1-1993) como de Clase 2 y 3a:

Láser de clase 2: Es un láser visible de baja potencia que emite con potencias por encima del límite de la Clase 1 (0.4 µW) pero no por encima de 1 mW. La respuesta automática humana a la luz brillante protege a la mayoría de la gente de esta clase de láser.

Láser de clase 3a: Es un láser de potencia intermedia (emisión continua entre 1.0 y 5.0 mW). Es peligroso sólo si se mira en la dirección del haz.

Los láseres de He-Ne pertenecen a la Clase 2 y los de estado sólido a la Clase 3a.

INTRODUCCIÓN

Láser es un acrónimo proveniente de "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation". El funcionamiento del láser se basa en excitar electrones de los átomos a niveles superiores de energía y luego producir su descenso en forma coherente (es decir, de manera absolutamente coordinada). Cuando en un átomo un electrón que absorbió energía retorna a su primitivo nivel de menor energía emite un fotón de longitud de onda λ dada por:

$$\Delta E = h\, c \,/\, \lambda,$$

donde ΔE es la diferencia de energía entre los dos niveles. La luz así emitida tiene entonces una longitud de onda que es característica de la transición.

En 1917 Einstein predijo que un átomo energizado puede ser desexcitado por la presencia, en su entorno, de una onda con la misma frecuencia que es capaz de emitir. La onda emitida se une con la que estimuló su emisión teniendo ambas no sólo la misma frecuencia sino tambíen la misma fase, la misma dirección y el mismo plano de polarización. Las ondas emitidas por todos los átomos que se desexcitan de esta manera se suman interfiriendo constructivamente y reforzándose entre sí. De allí la gran intensidad que se logra a la salida de un láser (o en el caso de las microondas, un máser).

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

1- Interferencia de Fraunhofer entre fuentes coherentes:
Entre los materiales disponibles para esta experiencia, Ud. encontrará un conjunto de diapositivas con distinto número de rendijas. Haga pasar el haz láser a través de las distintas diapositivas y observe el patrón resultante en cada una de ellas. Analice teóricamente el problema y determine cuáles deberían ser los diagramas de intensidad resultantes y compárelos con los observados experimentalmente.

2- Difracción de Fraunhofer para aberturas circulares:
En el caso de aberturas circulares, los diagramas serán anillos concéntricos. Obtenga teóricamente el diagrama de intensidad y compárelo con los resultados experimentales.

3- Difracción de Fresnel para una abertura circular (Demostrativa – No realizar):
Haga incidir el haz láser sobre una abertura circular y observe el diagrama de intensidad luminosa a corta distancia (difracción de Fresnel). Analice teóricamente el efecto de acercar o alejar la abertura de la pantalla de observación.

4- Medición de la longitud de onda del láser empleado:
Haga incidir el haz del láser sobre una red de constante conocida y mida la posición de los máximos principales sobre la pantalla. Observe que los máximos secundarios no son visibles, por qué? Mida las distancias entre los máximos y entre la red y la pantalla y calcule la

longitud de onda del láser empleado. (Suponga que el dato de la constante de red es exacto y que la velocidad de la luz es $3x10^8$ m/s).

5- Medición de la separación y ancho de varias rendijas:
Haga incidir el haz láser sobre una de las diapositivas indicadas como "Coarse Grating". A partir del diagrama observado en la pantalla, y teniendo en cuenta la longitud de onda del láser que Ud. calculara en el inciso anterior, calcule el ancho y separación de las rendijas.

6- Medición del diámetro de un cabello:
Consiga un cabello suficientemente largo como para fijarlo en uno de los soportes provistos e ilumínelo con el haz láser. A partir del patrón de difracción, y suponiendo que el cabello es plano, calcule su diámetro aproximado.

Las experiencias 1-3 pueden realizarse en cualquier orden. Dado que existe un número limitado de diapositivas para estas experiencias, optimice el uso del material de labotatorio con los demás grupos. El informe de laboratorio debe referirse específicamente a los puntos 1 a 6. En los casos en que haya realizado mediciones experimentales, incluya un análisis detallado de los errores cometidos en las determinaciones experimentales y en el cálculo de las magnitudes derivadas. No olvide las conclusiones!