КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КРВАВИЧ Юрій Володимирович

УДК 519.21

СТОХАСТИЧНІ ІНТЕГРАЛИ І СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВІДНОСНО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ФІНАНСОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник —
МІШУРА Юлія Степанівна
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2001

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена задачам аналізу стохастичних інтегралів і стохастичних диференціальних рівнянь (СДР), що містять дробовий броунівський рух. Дробовий броунівський рух (ДБР) є немарковським, гауссівським процесом зі стаціонарними і залежними приростами, в силу чого, на відміну від звичайного вінерівського процесу, він добре описує довгострокову залежність, тобто за допомогою його можна моделювати явища, які істотно залежать від минулого. Крім того, в дисертації розглядаються так звані мішані моделі, які містять компоненти, окремо побудовані за вінерівським процесом і ДБР. Такі мішані моделі можуть описувати процеси або явища, які включають короткострокову і довгострокову компоненти.

Зокрема дослідження процесів із довгостроковою залежністю, конкретніше СДР, що містять диференціали відносно вінерівського процесу та ДБР, виникає у зв'язку з розвитком сучасної математичної теорії фондового ринку, особливо в тій її частині, яка пов'язана з сучасним стохастичним аналізом.

Слід зауважити, що історично першою роботою у фінансовій математиці стала дисертація Башельє [1], учня Пуанкаре, який за декілька років до Ейнштейна і за 23 роки до Вінера математично означив поняття "броунівського руху", використав його в якості моделі динаміки цін акції. Основний недолік моделі Башельє, який полягав у можливій від'ємності ціни акції, був у 1965 році усунений відомим економістом Самюельсоном, котрий запропонував для цих цін *геометричний броунівський рух.* Сьогодні ця модель носить ім'я Блека і Скоулза, котрі в 1973 році [2] отримали в рамках даної моделі точні формули розрахунку справедливої ціни і хеджуючих стратегій для опціонів європейського типу.

За останні десятиліття з'явилося багато наукових праць в області сучасного стохастичного аналізу в математичній теорії фінансів [3 – 27]. В рамках моделі Блека-Скоулза, з використанням елементів функціонального та опуклого аналізу, були отримані вагомі результати про структуру цін, про властивості арбітражності, повноти і рівноваги фінансового ринку.

Після Азійської кризи 1998 року на фондовому ринку вищезгадані моделі були піддані критичному аналізу, а згодом почали розглядатись математичні моделі ціни акції, котрі визначаються за допомогою ДБР. Так, наприклад, у роботі [28], використовуючи щоденні статистичні дані центру CRSP (Center for Research in Security Prices) про ціни акцій, автори знайшли емпіричну ознаку довгострокової залежності ціни акції.

На сьогоднішній день актуальною проблемою є розробка основних елементів стохастичного аналізу, які можна було б використати для дослідження характеристик ринку основних цінних паперів, математичні моделі ціни акції якого визначаються за допомогою ДБР, а саме таких характеристик, як арбітражність і фінансова рівновага ринку, умови заміни ймовірнісної міри (застосування теореми Гірсанова).

Так, у роботах [29 – 31] досліджуються напівлінійні СДР, що містять стохастичні диференціали відносно вінерівського процесу та ДБР. Проте в роботі [29] знайдено умови існування і єдиності тільки локального розв'язку СДР, що представляють як чисту, так і мішану дробові моделі ціни акції; в роботі [30] знайдено умови існування і єдиності глобального розв'язку рівняння, що містить тільки один диференціал відносно гельдерово неперервного процесу, причому існування і єдиність розв'язку доведено за умови глобальної ліпшицевості коефіцієнта зносу, яка на практиці дуже рідко виконується; в роботі [31] розглядається СДР з диферецiалами відносно вінерівського процесу і ДБР, але у випадку напівлінійності таких СДР, сформульовані умови існування розв'язку не виконуються. Тому в даній дисертації актуальним є дослідження умов існування і єдиності глобального розв'язку двох типів напівлінійних стохастичних диференціальних рівнянь:

1. що містять тільки один стохастичний диференціал відносно дробового броунівського руху і представляє "чисту дробову" модель ціни акції;

2. що містять стохастичні диференціали відносно вінерівського процесу та дробового броунівського руху, і представляють "мішану дробову" модель ціни акції.

Часто при дослідженні властивостей розв'язків СДР потрібно оцінювати їх моменти. Зокрема в деяких випадках напівлінійних СДР, що містять ДБР, розв'язок представляється за допомогою вінерівських інтегралів відносно ДБР, а значить, потрібно знати максимальні оцінки моментів таких вінерівських інтегралів відносно ДБР. В роботі [32] наведено максимальні оцінки на випадковому інтервалі тільки для моменту ДБР. У роботі [33] на детермінованому інтервалі знайдено тільки верхню оцінку моменту вінерівського інтеграла відносно ДБР. У дисертації продовжено ці дослідження і одержано всі, верхні і нижні, максимальні оцінки моментів вінерівських інтегралів відносно ДБР.

У роботі [34], використовуючи звичайні рівняння Бюргерса, було знайдено умови фінансової рівноваги ринку, ціна акцій якого визначається СДР, що містить тільки один диференціал відносно вінерівського процесу. Аналогічні дослідження умов фінансової рівноваги ринку акцій, ціна яких представлена як чистою, так і мішаною дробовими моделями, було проведено в дисертації використовуючи дробові рівняння Бюргерса.

Серед робіт, присвячених дослідженню властивостей арбітражності ринку, ціна акцій якого є функцією ДБР, слід виділити [35, 36]. Але в них розглядаються найпростіші випадки "чистої дробової" моделі ціни акції та моделі з "однорідним ядром". У дисертації досліджуються умови арбітражності ринку акцій, ціна яких є функцією вінерівського інтеграла відносно ДБР.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано в рамках наукової програми "Статистичний аналіз випадкових процесів і полів, і його застосування" кафедри теорії ймовірностей і математичної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер держреєстрації 0197U003176).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка елементів стохастичного аналізу для:

– дробових інтегралів відносно функцій, що визначаються дробовим броунівським рухом, стохастичних інтегралів, інтегратор яких визначається дробовим броунівським рухом;

– стохастичних диференціальних рівнянь, що представляють чисту і мішану дробові моделі ціни акції на фінансовому ринку основних цінних паперів;

– дослідження умов арбітражності, фінансової рівноваги, заміни ймовірнісної міри для фінансових ринків акцій, ціна яких описується чистою і мішаною дробовими моделями.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, розбитих на 16 параграфів, висновку і списку використаних джерел.

У першому розділі досліджуються властивості вінерівських інтегралів відносно ДБР.

Скрізь у роботі розглядається повний ймовірнісний простір з фільтрацією $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$. Через $\left(B_t^H, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ позначено дробовий броунівський рух (ДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, що характеризується наступними властивостями:

(1) B_t^H - процес зі стаціонарними приростами;

(2) $B_0^H = 0$, і $\mathbb{E}\, B_t^H = 0$ для всіх $t > 0$;

(3) $\mathbb{E}\left(B_t^H\right)^2 = t^{2H}$ для всіх $t > 0$;

(4) B_t^H – гауссівський процес.

Оскільки довгострокова залежність характеризується індексом Хюрста $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, то далі в роботі розглядаються лише такі значення H. В силу теореми Колмогорова траєкторії сепарабельної модифікації цього процесу є неперервні з ймовірністю 1. В роботі розглядається саме така модифікація.

Термін "вінерівський" означає інтеграл з невипадковою підінтегральною функцією. Для $H > \frac{1}{2}$ означимо інтегральний оператор Γ :

$$\Gamma f(t) := H(2H-1) \int_0^\infty f(s) \ |s-t|^{2H-2} \ ds,$$

і скалярний добуток

$$\langle f, g \rangle_\Gamma := \langle f, \Gamma g \rangle = H(2H-1) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t) g(s) \, |s-t|^{2H-2} \, ds \, dt$$

де $\langle \cdot \rangle$– звичайний скалярний добуток в $\mathcal{L}_2[0,\infty)$.

Позначимо через $\mathcal{L}_2^\Gamma$ простір еквівалентних класів вимірних функцій f таких, що $\langle f, f \rangle_\Gamma < \infty$. Тепер ясно, що відображення $B_t^H \mapsto \mathbf{1}_{[0,\,t)}$ можна продовжити до ізометрії між гауссівським простором, породженим $B_t^H, t \geq 0$, як найменшим замкнутим лінійним підпростором $\mathcal{L}_2\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$, що містить $\left(B_t^H, \, t \geq 0\right)$ і простором $\mathcal{L}_2^\Gamma$. Для $f \in \mathcal{L}_2^\Gamma$ інтеграл $\int\limits_0^\infty f(s) \, dB_s^H$ тепер можна означити як образ функції f в цій ізометрії.

Зауважимо, що

$$\mathbb{E} \left| \int_0^\infty f(s) \, dB_s^H \right|^2 = H(2H-1) \int_0^\infty \int_0^\infty f(s) f(u) \ |u-s|^{2H-2} \ du \, ds.$$

Для таких інтегралів у параграфі 1.1 сформульовано і доведено стохастичну теорему Фубіні.

Теорема 0.0.1. *Нехай невипадкова, вимірна функція* $f = f(t,s) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ *задовольняє наступні умови*

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_0^T |f(t,s||f(t,u)||s-u|^{2H-2}\, ds\, du\, dt < +\infty,$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_0^T |f(t_1,s||f(t_2,u)||s-u|^{2H-2}\, ds\, du\, dt_1\, dt_2 < +\infty$$

Тоді існують інтеграли

$$I_1 = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s)\, dt \right) dB_s^H;\ I_2 = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s)\, dB_s^H \right) dt$$

і з імовірністю 1 *виконується рівність* $I_1 = I_2$.

Далі, використовуючи стохастичну теорему Фубіні, в параграфі 1.2 досліджено умови диференційовності дробового інтеграла $\Phi(t) = \int\limits_0^t \phi(t,s)\, ds$, ядро якого так виражається через ДБР:

$$\phi\,(t,s) = K_{H_0}\,(t,s) \int\limits_0^s \alpha\,(u)\, dB_u^H,\ H \in \left(\frac{1}{2}\,,\, 1\right)\,,\ H_0 \in \left(\frac{1}{2}\,,\, 1\right),$$

де

$$K_{H_0}(t,s) := (t-s)^{\frac{1}{2}-H_0}\,\beta\left(\frac{s}{t}\right),\ 0 < s < t.$$

Ці умови диференційовності наведено в наступних теоремах.

Теорема 0.0.2. *Нехай функція* $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *– обмежена і вимірна, функція* $\beta \in \mathcal{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}$ *задовольняє умову*

$$m = \operatorname*{esssup}_{u\in[0,1]} |u\,\beta(u)| < +\infty.$$

Тоді функція $\delta_t = \int\limits_0^t \alpha(u)\, \frac{u}{t^2}\, K_{H_0}\left(1,\, \frac{u}{t}\right)\, dB_u^H$ *визначена для кожного* $t > 0$, $\mathbb{E}\int\limits_0^t \delta_t^2\, dt \, < \, +\infty$ *і* $\int\limits_0^t \delta_s\, ds = t^{H_0-\frac{3}{2}}\, \Phi(t),\ t > 0$.

Теорема 0.0.3. *Нехай виконуються умови Теореми 0.0.2 і, крім того,* $\beta \in \mathcal{C}\left((0,1]\right)$. *Тоді* δ_t *– це похідна в середньому квадратичному в точці* $t > 0$ *функції* $t^{H_0-\frac{3}{2}}\Phi(t)$.

У параграфі 1.3 наведено приклад застосування диференціювання таких дробових інтегралів при заміні міри в лінійних стохастичних диференціальних рівняннях, які містять ДБР.

Далі в параграфі 1.4 одержано верхні і нижні оцінки моментів супремумів інтегралів виду $I_\tau = \int\limits_0^\tau f(t) dB_t^H$, як для детермінованих, так і випадкових τ. Оцінки на детермінованих інтервалах одержані за рахунок гауссовості I_τ і наведені в наступних теоремах. Нехай f детермінована вимірна додатна функція, що задовольняє умову

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(s) f(u)\ |u-s|^{2H-2}\ du\, ds < \infty,$$

$$I_\tau^* := \left(\int\limits_0^\tau f(s)\, dB_s^H\right)^* := \sup_{t\leq\tau}\left|\int\limits_0^t f(s)\, dB_s^H\right|.$$

Теорема 0.0.4. *Для будь-яких* $p > 0$, $T > 0$ *має місце оцінка*

$$\mathbb{E}\left(I_T^*\right)^p \leq C_p(H)\|f\|^p_{\mathcal{L}_{1/H}(0,T)}.$$

Позначимо $f_* = \inf\limits_{s\in[0,T]} f(s)$, і припустимо, що $f_* > 0$.

Теорема 0.0.5. *Для будь-яких* $p > 0$, $T > 0$ *має місце оцінка*

$$\mathbb{E}\left(I_T^*\right)^p \geq C_p T^{pH} f_*^p.$$

Оцінки на випадкових інтервалах одержано завдяки представленню ДБР за допомогою так званого мартингала Молчана ([37–39]). Вони представлені в наступних теоремах. Покладемо, далі, $\alpha = H - \frac{1}{2}$ і для кожного $t > 0$ $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Теорема 0.0.6. *Нехай функція* $s^{\alpha} f(s)$ *не спадає на* $[0, \infty)$. *Тоді для кожного* $p > 0$ *існує константа* $C(p, H) > 0$ *така, що для довільного моменту зупинки* τ

$$\mathbb{E}\left(I_{\tau}^{*}\right)^{p} \leq C(p, H)\left(\mathbb{E}\left((f(\tau))^{\frac{pH}{2H-1}} \tau^{pH}\right)\right)^{\frac{2H-1}{H}}\left(\mathbb{E}\left(\tau^{pH}\right)\right)^{\frac{1-H}{H}}.$$

Теорема 0.0.7. *Нехай для якогось* $T > 0$

$$g'(s) \geq \left(\frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha}{t-s}\right) g(s),\ 0 < s < t < T.$$

Тоді для будь-якого $p > 0$ *існує константа* $c(p, H) > 0$, *така, що для довільного моменту зупинки* $\tau \leq T$

$$\mathbb{E}\left(I_{\tau}^{*}\right)^{p} \geq c(p, H)\left(M_g(T)\right)^{-p} \mathbb{E} \tau^{pH},$$

де $M_g(T) := \sup_{s \in (0, T]} g(s)$.

Слід зауважити, що отримані оцінки істотно залежать від властивостей функції f. У кінці першого розділу, в параграфі 1.5, наведено приклад оцінювання моментів розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь, які містять ДБР.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню чистої дробової моделі ціни акції, що визначається наступним СДР

$$\begin{cases} dX_t = c\, X_t\, dB_t^H + b(t, X_t)\, dt, \quad t \geq t_0,\ c \neq 0 \\ X_{t=t_0} = X_0 - \mathcal{F}_{t_0}\text{-вимірна випадкова величина.} \end{cases} \tag{0.1}$$

У параграфі 2.1 наведені умови існування і єдиності глобального розв'язку стохастичного диференціального рівняння, що містить тільки один стохастичний диференціал відносно ДБР.

Теорема 0.0.8. *Нехай функція b задовольняє умови:*

1) $b \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right);$

2) умову Ліпшиця по $x \in \mathbb{R}$ *рівномірно відносно* $t \in [0, T]$,

тобто $\forall T > 0 \; \exists L_T > 0:$

$$\sup_{t \in [0,T]} |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq L_T \, |x_1 - x_2|;$$

3) умову росту: $\forall T > 0 \; \exists C_T > 0:$

$$|b(t, x)| \leq C_T \, (1 + |x|).$$

Тоді рівняння (0.1) має єдиний розв'язок на $[0, +\infty)$, *причому існує множина* $\Omega' \subset \Omega,\ \mathbb{P}(\Omega') = 1$ *така, що* $\forall \omega \in \Omega' \; \forall T > 0 \; \exists C = C(\omega, T)$ *така, що* $\forall \ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad |X_{t_1} - X_{t_2}| \leq C(\omega, T)|t_1 - t_2|^\alpha$ *для будь-якого* $0 \leq \alpha < H$. *Тобто, траєкторії* X_t *з ймовірністю 1 належать класові* $Lip_\alpha[0, T],\ \forall T > 0,\ \forall \alpha \in [0, H)$.

Далі в параграфі 2.2 доведено стохастичну теорему Фубіні для стохастичних інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором. Для таких інтегралів ми використовуємо означення стохастичного інтеграла $\int\limits_0^t f_s \, dB_s^H$, де f_s випадкова вимірна гельдерова функція порядку H (див., наприклад, [29], де доведено, що такий інтеграл можна розглядати як границю з ймовірністю 1 інтегральних сум Рімана-Стілтьєса).

Нехай $0 < T_1 < T_2, \quad \Phi = \Phi(s, u, \omega) : [T_1, T_2]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$ - випадкова вимірна за сукупністю змінних функція.

Теорема 0.0.9. *Нехай з імовірністю* 1 *функція* Φ *задовольняє умови:*
1) $\forall\, s \in (T_1, T_2)$ $\Phi(s, \cdot, \omega)$ *кусково гельдерова по* $u \in [T_1, T_2]$ *з показником* $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, *причому її кусково-гельдерова норма обмежена по* s, *тобто існує* $C = C(\omega)$ *таке, що* $C^{\alpha_1}_{\Phi(s,\cdot,\omega)}([T_1, T_2]) < C$
2) функція $\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s, u, \omega)\, dB^H_u$ *змінної* s *інтегровна за Ріманом на відрізку* $[T_1, T_2]$.

Тоді існують повторні інтеграли $I_1 := \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s, u, \omega)\, dB^H_u \right) ds$ *та* $I_2 := \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s, u, \omega)\, ds \right) dB^H_u$ *і м.н. виконується рівність* $I_1 = I_2$.

Перш ніж сформулювати в даному розділі умови заміни міри для рівняння чистої дробової моделі ціни акції (0.1), потрібно було в параграфі 2.3 знайти умови диференційовності інтеграла

$$I(t) := \int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \alpha(u, \omega)\, dB^H_u\, ds,$$

де $\alpha = \alpha(u, \omega) : \mathbb{R} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ - випадкова гельдерова на $[0, t]$ функція з показником $\beta > \frac{1}{2}$. Слід зауважити, що в параграфі 2.2 доведено, що такий інтеграл існує для всіх $\omega \in \mathbf{\Omega}'$, $\mathbb{P}(\mathbf{\Omega}') = 1$ і, більш того, існує повторний інтеграл $J(t) := \int\limits_0^t \alpha(u, \omega) \int\limits_u^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB^H_u$, і м.н. виконується рівність $I(t) = J(t), t > 0$.

Лема 0.0.1. *Нехай* $\alpha = \alpha(u, \omega) : \mathbb{R} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ *- випадкова гельдерова на* $[0, t]$ *функція з показником* $\beta > \frac{1}{2}$. *Тоді* $\forall t > 0$ $I(t)$ *допускає представлення*

$$I(t) = t^{2-2H} \int\limits_0^t \delta_s\, ds,$$

де функція

$$\delta_s = s^{2H-3} \int\limits_0^s u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u,\omega)\, dB_u^H$$

м.н. належить класові $\mathcal{L}_1([0,t])$*, тобто* $\int\limits_0^t |\delta_s|\, ds < \infty$ *м.н.,* $t \geq 0$.

Доведення теореми про диферецiйовнiсть стохастичних iнтегралiв спирається на стохастичну теорему Фубiнi.

У параграфi 2.4, використовуючи умови диференцiйовностi iнтеграла $I(t)$, отримуємо умови замiни мiри. Для рiвняння (0.1) вважаємо, що $t_0 = 0$, функцiя $b(t,x)$ задовольняє умови теореми 0.0.8 i може бути представлена як $b(t,x) = e(t,x)x$, де $e \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$; ядро $K(t,s) = C_1 s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H}\mathbb{I}\{s \in (0,t)\}$ i $\mu(u) = \frac{r-e(u,X_u)}{c}$, $r \in \mathbb{R}$, де $C_1 = (2HB)^{-1}$. Умови замiни мiри сформульованi в наступних лемi i теоремi.

Лема 0.0.2. *Нехай функцiя* $e(t,x)$ *задовольняє умови:*

1) $\forall T > 0\ \ \exists C_T > 0,\ \ \forall u \leq T,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|e(u,x)| \leq C_T(1+|x|),\ |e'_t(u,x)| \leq C_T(1+|x|),$$
$$|e'_x(u,x)| \leq C_T(1+|x|),\ |e''_{xx}(u,x)| \leq C_T(1+|x|);$$

2)

$$\forall T > 0\ \exists L_T > 0\ \forall t \in [0,T], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |e'_x(t,x_1) - e'_x(t,x_2)| \leq L_T\, |x_1 - x_2|.$$

Тодi

1) $\int\limits_0^t K(t,s)|\mu(s)|\, ds < \infty$ *м.н.,* *2) існує представлення* $\int\limits_0^t K(t,s)\mu(s)\,ds = \int\limits_0^t \varphi_s\,ds$,

де $\int\limits_0^t |\varphi_s|\,ds < \infty$ *м.н.*

У ході доведення леми 0.0.2 також показано, що функція φ_s м.н. неперервна функція. Тому $\forall t > 0$ м.н. існує інтеграл $\int\limits_0^t s^{2H-1}\varphi_s^2\,ds$, а значить випадковий процес $Z_t := \frac{1}{C_2}\int\limits_0^t s^{H-\frac{1}{2}}\varphi_s\,dW_s$ є квадратично інтегровним мартингалом з квадратичною характеристикою $\langle Z\rangle_t = \frac{1}{C_2^2}\int\limits_0^t s^{2H-1}\varphi_s^2\,ds$, де $C_2 = \frac{C_H}{2H(2-2H)^{1/2}}$, $C_H = \left(\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$.

Далі в роботі для рівняння (0.1) замінюється ймовірнісна міра $\mathbb{P}$ на іншу – $\mathbb{Q}$, таку, що $\mathbb{Q}_T \ll \mathbb{P}_T$, де $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T}$, і відносно якої знос буде мати вигляд $rX_t\,dt$, тобто рівняння (0.1) стане лінійним.

Слід зауважити, що якщо $\mathbb{Q}$ така, що $\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}_T} = \exp\left\{Z_T - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right\}$, то процес $\widehat{B}_t^H = B_t^H - \int\limits_0^t \mu(u)\,du$ є ДБР відносно міри $\mathbb{Q}$ (дивись теорему 4 [40], а також [41], [42]).

Теорема 0.0.10. *Нехай виконуються умови леми 0.0.2 і додатково виконується наступна умова*

$$\mathbb{E}\exp\left\{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t\right\} = 1.$$

Тоді рівняння (0.1) відносно міри $\mathbb{Q}$ *допускає наступне представлення*

$$dX_t = rX_t\,dt + cX_t\,d\widehat{B}_t^H$$

У кінці другого розділу в параграфі 2.5 за допомогою дробових рівнянь Бюргерса наведено умови фінансової рівноваги ринку акцій, ціна яких задана рівнянням (0.1).

Третій розділ дисертації присвячений дослідженню мішаної дробової моделі ціни акції, що задається наступним СДР, яке містить стохастичні диференціали відносно вінерівського процесу і ДБР

$$\begin{cases} dX_t = \sigma_1 X_t \, dW_t + \sigma_2 X_t \, dB_t^H + b(t, X_t) \, dt, \quad t \geq t_0 \\ X_{t=t_0} = X_0 - \mathcal{F}_{t_0} \text{-вимірна, випадкова величина.} \end{cases} \tag{0.2}$$

Як і в попередньому розділі для стохастичного диференціального рівняння (0.2), в параграфі 3.1 знайдено умови існування і єдиності його глобального розв'язку. Ці умови аналогічні умовам існування і єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь (0.1).

У параграфі 3.2 наведено умови заміни міри для рівняння (0.2). В кінці розділу в параграфі 3.3, наведено необхідну умову фінансової рівноваги ринку акцій, ціна яких визначається рівнянням (0.2).

У четвертому розділі дисертації розглянуто питання про умови існування і відсутності арбітражу для трьох видів (B, S)–ринку акцій і облігацій.

У параграфі 4.1, розглядається перший вид ринку, що визначається "дробовою" акцією:

$$S_t = \exp(X_t) := \exp\left\{ \int_0^t \nu(s) \, ds + \int_0^t \mu(s) \, dB_s^H \right\}$$

і процесом ціни облігації $\left(B_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$: $B_t = \mathbf{e}^{rt}$, $r \geq 0$, $t \geq 0$; де μ, ν - невипадкові вимірні функції, процес X_t - показник акції.

Використовуючи результат роботи [43], де показано, що (B, S)–ринок безарбітражний, коли існує міра $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, відносно якої $\frac{S_t}{B_t}$ є мартингалом, а відсутність еквівалентної мартингальної міри не є достатньою умовою для існування арбітражу (B, S)–ринку, було виведено співвідношення між існуванням мартингальної міри і властивістю траєкторій процесу $\frac{S_t}{B_t}$.

Лема 0.0.3. *Мартингальна міра $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ існує тоді і тільки тоді, коли процес X_t семімартингал.*

Далі в цьому параграфі за умови обмеженості функції μ доведено відсутність еквівалентної мартингальної міри і для випадку $\nu = r$ побудовано приклад інвестиційного портфеля, що допускає арбітраж.

У параграфі 4.2 розглядається другий вид ринку, що визначається змодифікованою за допомогою процесу Вольтерра "дробовою" акцією

$$X_t := \int_0^t K(t,s)\,a(s)\,ds + \int_0^t K(t,s)\,b(s)\,dB_s^H, \tag{0.3}$$

де a і b невипадкові, вимірні функції,

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, \ s > t, \\ s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}, \ 0 < s < t \end{cases}.$$

Знайдено функції a і b, для яких показник акції (0.3) є семімартингалом, а значить, сам ринок безарбітражний.

В параграфі 4.3 розглядається третій вид ринку, що визначається акцією, показник якої X_t має вигляд

$$X_t = V_h^c(t) := \int_0^t h(t-s)\,c(s)\,dW_s, \ t > 0$$

У випадку $c \equiv 1$ процес $V_h^c(t)$ докладно досліджено в [36].

Сформульовано умову семімартингальності процесу $V_h^c(t)$, яка забезпечує відсутність арбітражу (B, S)–ринку.

Теорема 0.0.11. *1) Нехай $h \in \mathcal{AC}[0,t]$, $t > 0$. Тоді, якщо*

$$\int\limits_0^t \left(h'(t-u)\,c(u)\right)^2\,du < \infty, \tag{0.4}$$

то $V_h^c(t)$ семімартингал.

2) Якщо $V_h^c(t)$ семімартингал, який можна подати у вигляді $V_h^c(t) = M_t + A_t$, де M – локальний мартингал, A – процес інтегровної варіації, і c неспадна, то виконується умова (0.4).

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, такі:

1. Уперше сформульовано і доведено стохастичні теореми Фубіні для вінерівських інтегралів відносно ДБР і стохастичних інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором. Використовуючи ці теореми, знайдено:
   (a) умови диференційовності дробового інтеграла $\int\limits_0^t \phi(t,s)\,ds$, ядро якого визначається за допомогою вінерівського інтеграла відносно ДБР. Наведено приклад застосування диференціювання таких дробових інтегралів при заміні міри в лінійних стохастичних диференціальних рівняннях, що містять ДБР;
   (b) умови диференційовності дробового інтеграла $\int\limits_0^t \phi(t,s)\,ds$, ядро якого визначається за допомогою стохастичних інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором. Далі, за допомогою одержаних умов диференційовності знайдено умови заміни ймовірнісної міри для СДР, які представляють чисту дробову

модель ціни акції. Для цієї чистої дробової моделі ринку акцій знайдено умову фінансової рівноваги.

2. Одержано нові верхні та нижні оцінки моментів супремумів інтегралів вигляду $I_\tau = \int_0^\tau f(t)dB_t^H$ як для детермінованих, так і випадкових τ. Оцінки на детермінованих інтервалах одержані за рахунок гауссовості I_τ, на випадкових - завдяки представленню ДБР за допомогою так званого мартингала Молчана ([37–39]). Ці оцінки істотно залежать від властивостей функції f. У кінці розділу наведено приклад оцінювання моментів розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь, що містять ДБР.

3. Для СДР, що містять диференціали відносно вінерівського процесу та ДБР, а значить, представляють мішану дробову модель ціни акції на ринку основних цінних паперів, вперше знайдено умови існування і єдиності розв'язку; знайдено умову фінансової рівноваги для такого ринку.

4. Для чистої дробової моделі ринку акцій доведено відсутність еквівалентної мартингальної міри, і побудовано приклад інвестиційного портфеля, що допускає арбітраж; для змодифікованої за допомогою процесів Вольтерра чистої дробової моделі та моделі з "однорідним" ядром, знайдено умови відсутності арбітражу.

Практичне значення результатів. Дисертація має як теоретичне, так і практичне значення. Теоретична цінність роботи полягає в розробці необхідного математичного апарату, а саме елементів стохастичного аналізу стохастичних інтегралів і СДР, побудованих за допомогою ДБР, з метою застосування їх при дослідженні важливих характеристик фінансового ринку основних цінних паперів, ціна акції на якому представлена чистою і мішаною дробовими моделями. З-поміж таких важливих характеристик слід виділити арбітражність ринку, фінансова рівновага, існування еквівалентної мартингальної міри.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що їх можна використати на практиці при дослідженні характеристик фондового ринку, який є необхідною ланкою сучасної ринкової економіки і останнім часом в Україні переживає бурхливий період свого становлення.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи одержані автором самостійно. У спільних працях співавтору належать постановки задач і аналіз здобутих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на наукових семінарах кафедри теорії ймовірностей і математичної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, факультету математики університету Гельсінкі (Фінляндія), відділу теорії ймовірностей і математичної статистики Інституту прикладної математики і механіки НАН України (м. Донецьк); на міжнародних конференціях: "The 23rd Research Students' Conference in Probability and Statistics" (11 – 14 квітня 2000 р., Кардіфф, Великобританія); "Міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука" (11 – 14 травня 2000 р., м. Київ); "First World Congress of the Bachelier Finance

Society" (28 червня - 1 липня 2000 р., Париж, Франція); "Workshop on Mathematical Finance" (5-7 жовтня 2000 р., Констанц, Німеччина).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [44 – 49].

Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, професору *Мішурі Юлії Степанівні* за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач і постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ВЛАСТИВОСТІ ВІНЕРІВСЬКИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІДНОСНО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

У цьому розділі наводяться основні властивості вінерівських інтегралів відносно ДБР:

– умови диференційовності дробових інтегралів, ядра яких визначаються за допомогою ДБР;

– верхні та нижні максимальні оцінки для моментів вінерівських інтегралів відносно ДБР.

Необхідність диференціювати дробові стохастичні інтеграли, ядра яких містять дробовий броунівський рух, виникає при заміні міри і застосуванні теореми Гірсанова до процесів з "довгостроковою залежністю" ("long-range dependence"). Нехай, наприклад, на канонічному ймовірнісному просторі задано стохастичний "дифузійний" процес виду

$x_t = \int\limits_0^t I_1(s)\,ds + I_2(t)$, де $I_i(t) = \int\limits_0^t \alpha_i(s)\,dB_s^H$ – вінерівський інтеграл відносно ДБР. Припустимо, що $\alpha_2(t) > 0$, і покладемо

$$c(t) = I_1(t)\ (\alpha_2(t))^{-1}. \tag{1.1}$$

Тоді, якщо існує похідна дробового інтеграла,

$$\beta(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t u^{\frac{1}{2}-H}\,(t-u)^{\frac{1}{2}-H}c(u)\,du \tag{1.2}$$

і

$$K_c^t(s) = s^{\frac{1}{2}-H}\frac{d}{ds}\int\limits_s^t v^{2H-1}(v-s)^{\frac{1}{2}-H}\beta(v)\,dv,$$

то згідно з теоремою 1 ([41]), процес $\widehat{B}_t^H = B_t^H - \int\limits_0^t c(s)\,ds$ буде ДБР відносно нової міри $\widehat{P}$ такої, що $\left(\frac{d\widehat{P}}{dP}\right)_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\}$, де $M_t = \int\limits_0^t K_c^t(s)\,dB_s^H$ - гауссівський мартингал, $\langle M\rangle_t = \int\limits_0^t K_c^t(s)c(s)\,ds$. При цьому в роботі [41] неявно припускається, що похідна $\beta(t)$ існує для будь-якої неперервної функції $c(t)$. Це не так навіть для функцій, що належать до деякого гельдерового класу, про що свідчить приклад, наведений у лемі 1.2.1. З іншого боку, достатня умова диференційовності дробових інтегралів, тобто існування похідних Рімана-Ліувілля, міститься в [50, стор. 43], і цією умовою є абсолютна неперервність $c(u)$, що надто звужує клас допустимих ядер для нашого випадку (загальніші умови на ядро $c(s)$ наведено в [50, стор. 185] для того, щоб існувала похідна за Маршо від дробового інтеграла, але похідні Рімана-Ліувілля і Маршо не завжди співпадають на функціях типу (1.1)).

У цьому розділі наведено доволі загальні достатні умови на ядро $c(t)$ типу (1.1) для існування дробової похідної (1.2) і представлення дробового інтеграла як інтеграла від своєї похідної. Як допоміжний результат, одержано стохастичну теорему Фубіні для вінерівських інтегралів відносно ДБР. Досліджено властивості похідної $\beta(t)$, доведено її неперервність з ймовірністю 1 на кожному відрізку, що не містить 0.

Відзначимо, що індекс Хюрста дробового процесу, що входить в ядро $c(t)$, в наших теоремах не обов'язково співпадає з показником H в інтегралі (1.2).

При доведенні диференційовності дробового інтеграла ми будемо використовувати стохастичну теорему Фубіні, а тому спочатку сформулюємо і доведемо її.

1.1. Стохастична теорема Фубіні для вінерівських інтегралів відносно ДБР з невипадковим інтеграндом

Теорема 1.1.1. *Нехай невипадкова, вимірна функція* $f = f(t,s) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ *задовольняє умови* $\forall T > 0:$

$$\int_0^T \int_0^T \int_0^T |f(t,s)||f(t,u)||s-u|^{2H-2}\, ds\, du\, dt < +\infty, \tag{1.3}$$

$$\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T |f(t_1,s)||f(t_2,u)||s-u|^{2H-2}\, ds\, du\, dt_1\, dt_2 < +\infty \tag{1.4}$$

Тоді існують інтеграли

$$I_1 = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s)\, dt \right) dB_s^H;\ I_2 = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s)\, dB_s^H \right) dt$$

і $I_1 = I_2$ *з ймовірністю* 1.

Доведення. 1) Спочатку покажемо, що твердження теореми справджується для обмежених, вимірних f.

Нехай $c = \sup\limits_{(t,s)\in[0,T]^2} |f(t,s)| < +\infty$, тоді згідно з [51] існує послідовність простих функцій $\{P_n(t,s) | (t,s) \in [0,T]^2,\ n \geq 1\}$ така, що $P_n \rightrightarrows f,\ n \to +\infty$ на $[0,T]^2$ і

$$P_n(t,s) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \left(\mathbf{1}_{A_{n^+}^k}(t,s) - \mathbf{1}_{A_{n^-}^k}(t,s) \right) + n \left(\mathbf{1}_{B_{n^+}}(t,s) - \mathbf{1}_{B_{n^-}}(t,s) \right),$$

де

$A_{n^+}^k := \{(t,s) \in [0,T]^2 :\ \frac{k}{2^n} \leq f(t,s) \leq \frac{k+1}{2^n},\ k = \overline{0,\ n2^n - 1}\}$,

$A_{n^-}^k := \{(t,s) \in [0,T]^2 :\ -\frac{k+1}{2^n} \leq f(t,s) \leq -\frac{k}{2^n},\ k = \overline{0,\ n2^n - 1}\}$,

$B_{n^+} := \{(t,s) \in [0,T]^2 :\ f(t,s) \geq n\}$,

$B_{n^-} := \{(t,s) \in [0,T]^2 :\ f(t,s) \leq -n\}$.

Для простих функцій твердження теореми очевидне. Далі для обмеженої функції f і $n \geq 1$:

$$|I_1 - I_2| = \left| \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T (f(t,s) - P_n(t,s))\, dt \right) dB_s^H - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T (f(t,s) - P_n(t,s))\, dB_s^H \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T (f(t,s) - P_n(t,s))\, dt \right) dB_s^H \right| +$$

$$+\left|\int_0^T \left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,dB_s^H\right) dt\right| =: L_{1n}+L_{2n}. \qquad (1.5)$$

Тепер,

$$\mathbb{E}\,|L_{1n}|^2 = H(2H-1)\int_0^T\int_0^T \left(\int_0^T (f(t_1,s)-P_n(t_1,s))\,dt_1\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^T (f(t_2,u)-P_n(t_2,u))\,dt_2\right)|s-u|^{2H-2}\,ds\,du \leq$$

$$\leq H(2H-1)\left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^2\int_0^T\int_0^T |s-u|^{2H-2}\,ds\,du =$$

$$= \left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^{2H+2}\to 0,\quad n\to+\infty \qquad (1.6)$$

$$\mathbb{E}\,|L_{2n}|^2 \leq T\int_0^T \mathbb{E}\left|\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,dB_s^H\right|^2 dt = TH(2H-1)\times$$

$$\int_0^T\left(\int_0^T\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))\,(f(t,u)-P_n(t,u))\,|s-u|^{2H-2}\,ds\,du\right) dt \leq$$

$$= \left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^{2H+2}\to 0,\quad n\to+\infty \qquad (1.7)$$

Звідси з оцінок (1.3)-(1.5) отримуємо твердження теореми для обмежених функцій f.

2) Нехай тепер f задовольняє умови (1.1) і (1.2). Для послідовності функцій $f_n(t,s) = f(t,s)\mathbf{1}_{\{f(t,s)\leq n\}}(t,s), n\geq 1$ твердження теореми вже доведено.

Далі позначимо $C_n := \{(t,s,u) \in [0,T]^3 : \ |f(t,s)| \geq n, \ |f(t,u)| \geq n\}$.

Тоді $\forall n \geq 1$

$$\left| \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s)\,dt \right) dB_s^H - \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s)\,dB_s^H \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s) \mathbf{1}_{\{f(t,s) \leq n\}}(t,s)\,dt \right) dB_s^H \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,s) \mathbf{1}_{\{f(t,s) \leq n\}}(t,s)\,dB_s^H \right) dt \right| =: I_{1n} + I_{2n}; \tag{1.8}$$

$$\mathbb{E}\,|I_{1n}|^2 = H(2H-1) \int\limits_0^T \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t_1,s)\,\mathbf{1}_{B_{n^+}}(t_1,s)\,dt_1 \right) \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^T f(t_2,u)\,\mathbf{1}_{B_{n^+}}(t_2,u)\,dt_2 \right) |s-u|^{2H-2}\,ds\,du \leq H(2H-1) \times$$

$$\times \iint\limits_{B_{n+}} \iint\limits_{B_{n+}} |f(t_1,s)||f(t_2,u)||s-u|^{2H-2}\,dt_2\,du\,dt_1\,ds \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \tag{1.9}$$

$$\mathbb{E}\,|I_{2n}|^2 \leq TH(2H-1) \int\limits_0^T \int\limits_0^T \int\limits_0^T f_n(t,s)\,f_n(t,u)|s-u|^{2H-2}\,ds\,du\,dt \leq$$

$$\leq T\,H(2H-1) \iiint\limits_{C_n} f_n(t,s)\,f_n(t,u)|s-u|^{2H-2}\,ds\,du\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \tag{1.10}$$

Звідси отримуємо твердження теореми для функції f.

1.2. Диференційовність дробових інтегралів відносно функцій, що визначаються за допомогою ДБР

У цьому параграфі вивчається диференційовність дробового інтеграла $\Phi\,(t) = \int\limits_0^t \phi\,(t,s)\;ds$, ядро якого визначається за допомогою дробового броунівського руху, а саме

$$\phi\,(t,s) = K_{H_0}\,(t,s)\int\limits_0^s \alpha\,(u)\,dB_u^H,\ H \in \left(\frac{1}{2},\,1\right),\ H_0 \in \left(\frac{1}{2},\,1\right), \tag{1.11}$$

де

$$K_{H_0}(t,s) = (t-s)^{\frac{1}{2}-H_0}\,\beta\left(\frac{s}{t}\right),\ 0 < s < t.$$

Перш ніж досліджувати диференційовність Φ, слід зауважити, що навіть у разі, якщо функція $c(s)$ дійсна і гельдерова, похідна функції $I(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H}\,c(s)\,ds$ може не бути скрізь визначеною на $[0,\infty)$, про що свідчить наступний результат.

Лема 1.2.1. *Нехай $c(s) = |s-t_0|^r$, де $0 < r < H - \frac{1}{2}$. Тоді в точці $t = t_0$ похідна функції $I(t)$ не існує.*

Доведення. Зробимо наступні перетворення

$$\forall t > 0\ I(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\,s^{\frac{1}{2}-H}\,c(s)\,ds =$$

$$= t^{2-2H}\int\limits_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{1}{2}-H}\,c(tu)\,du =$$

$$= t^{2-2H+r}\int\limits_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{1}{2}-H}\left|\frac{t_0}{t}-u\right|^r du =: t^{2-2H+r}I_1(t).$$

Дослідимо тепер похідну $I_1(t)$ в точці $t = t_0$. Для $\frac{t_0}{2} < t < t_0$ оцінимо такий вираз

$$\frac{I_1(t) - I_1(t_0)}{t - t_0} = -\int\limits_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H}\, u^{\frac{1}{2}-H} \frac{\left(\frac{t_0}{t} - u\right)^r - (1-u)^r}{t_0 - t}\, du <$$

$$< -\int\limits_\beta^{1-\beta} (1-u)^{\frac{1}{2}-H}\, u^{\frac{1}{2}-H} \frac{\left(\frac{t_0}{t} - u\right)^r - (1-u)^r}{t_0 - t}\, du, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}.$$

В останньому інтегралі підінтегральна функція має таку інтегровну на $[\beta, 1-\beta]$ мажоранту $\frac{2r}{t_0}\beta^{\frac{1}{2}-H}(1-u)^{r-\frac{1}{2}-H}$.

Звідси, за теоремою Лебега про граничний перехід в інтегралі маємо

$$-\int\limits_\beta^{1-\beta} (1-u)^{\frac{1}{2}-H}\, u^{\frac{1}{2}-H} \frac{\left(\frac{t_0}{t} - u\right)^r - (1-u)^r}{t_0 - t}\, du \xrightarrow[t \to t_0-]{} -\frac{r}{t_0} \int\limits_\beta^{1-\beta} (1-u)^{r-\frac{1}{2}-H} \times$$

$$\times\, u^{\frac{1}{2}-H}\, du \le -\frac{r}{t_0}(1-\beta)^{\frac{1}{2}-H} \frac{(1-u)^{r+\frac{1}{2}-H}}{r + \frac{1}{2} - H}\Bigg|_\beta^{1-\beta} =$$

$$= -\frac{r}{t_0}(1-\beta)^{\frac{1}{2}-H} \frac{\beta^{r+\frac{1}{2}-H} - (1-\beta)^{r+\frac{1}{2}-H}}{r + \frac{1}{2} - H}.$$

Тепер, якщо $\beta \to 0$, то при $0 < r < H - \frac{1}{2}$ границя останнього виразу дорівнює $-\infty$.

Отже, $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{I_1(t) - I_1(t_0)}{t - t_0} = -\infty$.

Теорема 1.2.1. *Нехай функція* $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *– обмежена і вимірна, функція* $\beta \in \mathcal{L}_2[0,1]$ *задовольняє умову*

$$m = \operatorname*{esssup}_{u \in [0,1]} |u\, \beta(u)| < +\infty.$$

Тоді функція $\delta_t = \int\limits_0^t \alpha(u)\, \frac{u}{t^2}\, K_{H_0}\left(1,\, \frac{u}{t}\right)\, dB_u^H$ *визначена для кожного* $t > 0$, $\mathbb{E}\int\limits_0^t \delta_t^2\, dt < +\infty$ *і* $\int\limits_0^t \delta_s\, ds = t^{H_0 - \frac{3}{2}}\, \Phi(t),\ t > 0$.

Доведення.

Нехай $c = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}_+} |\alpha(u)| < +\infty$. Покажемо, що для кожного $t > 0$ функція δ_t визначена.

Маємо $\forall\, t > 0\ \ \mathbb{E}\,|\delta_t|^2 =$

$$= H(2H{-}1)\int\limits_0^t\int\limits_0^t \alpha(u)\,\frac{u}{t^2}\,\alpha(v)\frac{v}{t^2}\,K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)\,|u{-}v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\le c^2 H(2H-1)\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{u}{t^2}\,\frac{v}{t^2}\,\left(1-\frac{u}{t}\right)^{1/2-H_0}\left|\beta\left(\frac{u}{t}\right)\right| \times$$

$$\times\left(1-\frac{u}{t}\right)^{1/2-H_0}\left|\beta\left(\frac{u}{t}\right)\right|\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv = c^2\,t^{2H-2}\,H(2H-1)\times$$

$$\times\int\limits_0^1\int\limits_0^1 uv\,(1-u)^{\frac{1}{2}-H_0}\,|\beta(u)|\,(1-v)^{\frac{1}{2}-H_0}\,|\beta(v)|\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\le c^2\,t^{2H-2}\,m^2\,H(2H-1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H_0}\,(1-v)^{\frac{1}{2}-H_0}\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv =$$

$$= c^2\,m^2\,t^{2H-2}\,H\,L_0 < +\infty,$$

де $L_0 = \mathrm{B}\,(2H, 2-2H) + \frac{2H-H_0+1/2}{2^{2H-H_0-1/2}\,(3/2-H_0)\,(1+2H-2H_0)} > 0.$

Наступна оцінка забезпечує скінченність інтеграла $\int_0^t |\delta_s|^2\,ds$.

$$\forall\, t > 0\ \int\limits_0^t \mathbb{E}\,|\delta_s|^2\,ds \le c^2\,m^2\,t^{2H-1} H\,L_0 < +\infty.$$

Також з умов теореми випливає скінченність інтегралів

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^t\int\limits_0^s \alpha\,(u)\,K_{H_0}(t,s)\;dB_u^H\,ds,\ \ t>0\\ &\int\limits_0^t\int\limits_u^t \alpha\,(u)\;K_{H_0}(t,s)\;ds\,dB_u^H\,,\ \ t>0\end{aligned}\qquad(1.12)$$

Справді,

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t\int_0^s \alpha(u)\,K_{H_0}(t,s)\,dB_u^H\,ds\right|^2 \le t\int_0^t |K_{H_0}(t,s)|^2\,\mathbb{E}\left|\int_0^s \alpha(u)\,dB_u^H\right|^2 ds =$$

$$= t\int_0^t |K_{H_0}(t,s)|^2\; H(2H-1)\int_0^s\int_0^s \alpha(u)\,\alpha(v)\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\,ds \le$$

$$\le H(2H-1)\,c^2\,t^{3-2H_0+2H}\left(\int_0^{1/2}(1-s)^{1-2H_0}\,\beta^2(s)\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1(1-s)^{1-2H_0}\,\beta^2(s)\,ds\right) \le H(2H-1)\,c^2\,t^{3-2H_0+2H}\times$$

$$\times\left(2^{2H_0-1}\int_0^1 \beta^2(s)\,ds + m_{1/2}\frac{2^{2H_0-2}}{2-2H_0}\right) < \infty,$$

де $m_s = \sup\limits_{u\in[s,1]} |\beta(u)|^2 < +\infty,\quad s\in(0,1)$.

Для другого інтеграла маємо оцінку

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t\int_u^t \alpha(u)\,K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H\right|^2 = H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \alpha(u)\,\alpha(v)\times$$

$$\times\left(\int_u^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)\left(\int_v^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\le c^2 H(2H-1)\int_0^t\int_0^t\left(\int_0^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)^2 |u-v|^{2H-2}\,du\,dv =$$

$$= c^2 H(2H-1)\,t^{2H}\left(\int_0^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)^2 \le c^2 H(2H-1)\,t^{2H+1}\times$$

$$\times \int\limits_0^t |K_{H_0}(t,s)|^2\, ds = c^2\, H(2H-1)\, t^{2H+1} \int\limits_0^t (t-s)^{1-2H_0}\, \beta^2\left(\frac{s}{t}\right)\, ds \leq$$

$$\leq\ H(2H-1)\, c^2\, t^{3-2H_0+2H} \left\{ 2^{2H_0-1} \int\limits_0^1 \beta^2(s)\, ds + m_{1/2} \frac{2^{2H_0-2}}{2-2H_0} \right\} < \infty.$$

Звідси випливає, що для інтегралів (1.12) виконуються умови стохастичної теореми Фубіні.

Отже, використовуючи стохастичну теорему Фубіні, можна зробити наступні перетворення для функції Φ:

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t K_{H_0}(t,s) \int\limits_0^s \alpha(u)\, dB_u^H\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_u^t \alpha(u)\, K_{H_0}(t,s)\, ds\, dB_u^H =$$

$$= t^{3/2-H_0} \int\limits_0^t \int\limits_{u/t}^1 \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\, dB_u^H = t^{3/2-H_0} F(t),\ t > 0.$$

Для інтегралів $\int\limits_0^t |\delta_s|^2\, ds$ і $F(t)$, зважаючи на їх скінченність, теж виконуються умови стохастичної теореми Фубіні, а значить її можна використати в наступних перетвореннях:

$$\int\limits_0^t \delta_s\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_0^s \alpha(u)\, \frac{u}{s^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{s}\right)\, dB_u^H\, ds = \int\limits_0^t \int\limits_u^t \alpha(u)\, \frac{u}{s^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{s}\right)\, ds \times$$

$$\times dB_u^H = \int\limits_0^t \int\limits_{u/t}^1 \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\, dB_u^H = F(t) = t^{H_0-3/2}\, \Phi(t).$$

Наслідок 1.2.1. *Функція* $\Phi(t) = t^{3/2-H_0} \int\limits_0^t \delta_s\, ds$ *належить класові* $\mathcal{AC}[0,T]$ $\forall T > 0$ *([50]), отже для майже всіх* $\omega \in \Omega,\ \forall t > 0$:

$$\Phi'(t) = \left(\frac{3}{2} - H_0\right)\, t^{1/2-H_0} \int\limits_0^t \delta_s\, ds + t^{3/2-H_0}\, \delta_t.$$

Знайдемо додаткові умови, за яких δ_t буде похідною в середньому квадратичному функції $t^{H_0-3/2}\Phi(t)$ для всіх $t>0$.

Теорема 1.2.2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.2.1 і, крім того, $\beta \in \mathcal{C}\left((0,1]\right)$. Тоді δ_t є похідною в середньому квадратичному в точці $t>0$ функції $F(t)=t^{H_0-\frac{3}{2}}\Phi(t)$.*

Доведення. Достатньо довести диференційовність у середньому квадратичному функції F.

Для $h>0$:

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_0^{t+h}\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{1}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H-$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{t}\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{1}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H+\frac{1}{h}\int\limits_0^{t}\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{1}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H-$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{t}\int\limits_{\frac{u}{t}}^{1}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H=\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{1}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H+$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^{t}\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{\frac{u}{t}}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H=:I_1(t,h)+I_2(t,h).$$

Далі зробимо оцінки:

$$\mathbb{E}\left|I_1(t,h)\right|^2=\frac{H(2H-1)}{h^2}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^{t+h}\left(\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{1}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\frac{v}{t+h}}^{1}\alpha(v)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\le c^2\frac{H(2H-1)}{h^2}\times$$

$$\times \int\limits_{t}^{t+h}\int\limits_{t}^{t+h}\left(\int\limits_{\frac{t}{t+h}}^{1} K_{H_0}(1,s)\,ds\right)^2 |u-v|^{2H-2}\,du\,dv =$$

$$= c^2 H(2H-1)h^{1-2H_0+2H}\left(\int\limits_{\frac{t}{t+h}}^{1} K_{H_0}(1,s)\,ds\,h^{H_0-\frac{3}{2}}\right)^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} c^2 H(2H-1)\lim_{h\to 0}\left(\frac{t}{(t+h)^2}\left(1-\frac{t}{t+h}\right)^{\frac{1}{2}-H_0}\beta\left(\frac{t}{t+h}\right)\right)^2 \times$$

$$\times\left(\left(\frac{3}{2}-H_0\right)h^{\frac{1}{2}-H_0}\right)^{-2}\lim_{h\to 0} h^{1-2H_0+2H} =$$

$$= c^2\, H(2H-1)\,\frac{t^{2H_0-3}\beta^2(1)}{\left(\frac{3}{2}-H_0\right)^2}\lim_{h\to 0} h^{1-2H_0+2H} = 0,\ t>0.$$

Для інтеграла $I_2(t,h)$ маємо оцінки

$$\mathbb{E}\left|I_2(t,h)-\int\limits_0^t \alpha(u)\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\frac{u}{t}}^{1} K_{H_0}(1,s)\,ds\right)dB_u^H\right|^2 =$$

$$= \mathbb{E}\,|I_2(t,h)-\delta_t|^2 = \mathbb{E}\left|I_2(t,h)-\int\limits_0^t \alpha(u)\,\frac{u}{t^2}\,K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)\,dB_u^H\right|^2 =$$

$$= H(2H-1)\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left(\alpha(u)\,\frac{u}{t^2}\,K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)-\frac{1}{h}\int\limits_{\frac{u}{t+h}}^{\frac{u}{t}}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right)\times$$

$$\times\left(\alpha(v)\,\frac{v}{t^2}\,K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)-\frac{1}{h}\int\limits_{\frac{v}{t+h}}^{\frac{v}{t}}\alpha(v)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv =: J_{t,h}.$$

Зауважимо, що підінтегральна функція останнього інтеграла

$J_{t,h}$ майже скрізь збігається до 0 при $h\to 0$. Покажемо, що вона ще й має інтегровну мажоранту, а значить, за теоремою Лебега, інтеграл $J_{t,h}$ прямує до 0 при $h \to 0$. Маємо

$$J_{t,h} \le H(2H-1) \left\{ \int_0^t \int_0^t \left| \alpha(u) \frac{u}{t^2} K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t}\right) \alpha(v) \frac{v}{t^2} K_{H_0}\left(1, \frac{v}{t}\right) \right| \times \right.$$

$$\times |u-v|^{2H-2}\, du\, dv + \int_0^t \left| \alpha(v) \frac{v}{t^2} K_{H_0}\left(1, \frac{v}{t}\right) \right| \left| \frac{1}{h} \int_{\frac{u}{t+h}}^{\frac{u}{t}} \alpha(u) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| \times$$

$$\times |u-v|^{2H-2}\, du\, dv + \int_0^t \left| \alpha(u) \frac{u}{t^2} K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t}\right) \right| \left| \frac{1}{h} \int_{\frac{v}{t+h}}^{\frac{v}{t}} \alpha(v) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| \times$$

$$\times |u-v|^{2H-2}\, du\, dv + \int_0^t \left| \frac{1}{h} \int_{\frac{u}{t+h}}^{\frac{u}{t}} \alpha(u) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| \left| \frac{1}{h} \int_{\frac{v}{t+h}}^{\frac{v}{t}} \alpha(v) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| \times$$

$$\left. \times\, |u-v|^{2H-2}\, du\, dv \right\} =: L_{t,h}.$$

Для $0 < h < 1$ справедлива оцінка :

$$\left| \frac{1}{h} \int_{\frac{v}{t+h}}^{\frac{v}{t}} \alpha(v) K_{H_0}(1,s)\, ds \right| \le c \frac{1}{h} \int_{\frac{v}{t+h}}^{\frac{v}{t}} (1-s)^{\frac{1}{2}-H_0} |\beta(s)|\, ds \le c \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H_0} \times$$

$$\times \frac{1}{h} \int_{\frac{v}{t+h}}^{\frac{v}{t}} |\beta(s)|\, ds \le c \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H_0} \frac{1}{h} \int_{\frac{t}{t+h}}^{1} |\beta(s)|\, ds \le c \sqrt{m_{\frac{t}{t+1}}}\, \frac{1}{t} \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H_0}.$$

Звідси

$$L_{t,h} \le c^2 t^{2H-2} m^2 H(2H-1) \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H_0} (1-v)^{\frac{1}{2}-H_0} |u-v|^{2H-2}\, du\, dv +$$

$$+2\, c^2 t^{2H-2} m \sqrt{m_{\frac{t}{t+1}}}\, H(2H-1) \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H_0} (1-v)^{\frac{1}{2}-H_0} |u-v|^{2H-2}\, du\, dv +$$

$$+c^2\, t^{2H-2}\, m_{\frac{t}{t+1}}\, H(2H-1) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H_0}(1-v)^{\frac{1}{2}-H_0}|u-v|^{2H-2}\, du\, dv < +\infty.$$

Отже, δ_t є похідною в середньому квадратичному в точці $t > 0$ функції $F(t) = t^{H_0-\frac{3}{2}}\Phi(t)$.

Сформулюємо додаткові умови, за яких $\Phi\,(t)$ буде для майже всіх $\omega \in \mathbf{\Omega}$ неперервно диференційовною на множинах виду $[r, R]\,,\ R > r > 0$.

Теорема 1.2.3. *Нехай виконуються умови Теореми 1.2.2 і, крім того, β невід'ємна, незростаюча і така, що $u\,\beta(u)$ неспадна. Тоді δ_t неперервний процес на довільному відрізку $[r, R]\,,\ R > r > 0$.*

Доведення.

Для довільних $t_2 > t_1 > 0 :\ \{t_1, t_2\} \subset [r, R]$, де $R > r > 0$ фіксовані, маємо:

$$\mathbb{E}\,|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}|^2 \leq 2\,\mathbb{E}\left|\int\limits_0^{t_1} \alpha(u)\, u\, \left[\frac{1}{t_2^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_2}\right) - \frac{1}{t_1^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_1}\right)\right]\, dB_u^H\right|^2 +$$

$$+2\,\mathbb{E}\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(u)\, u\, \frac{1}{t_2^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_2}\right)\, dB_u^H\right|^2 = 2H(2H-1) \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_1} \alpha(u)\, u\, \times$$

$$\times \left[\frac{1}{t_2^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_2}\right) - \frac{1}{t_1^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_1}\right)\right]\, \alpha(v)\, v\, \left[\frac{1}{t_2^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{v}{t_2}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t_1^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{v}{t_1}\right)\right]\, |u-v|^{2H-2}\, du\, dv + 2H(2H-1) \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(u)\, u\, \alpha(v)\, v\, \times$$

$$\times \left[\frac{1}{t_2^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{u}{t_2}\right) \frac{1}{t_2^2}\, K_{H_0}\left(1, \frac{v}{t_2}\right)\right]\, |u-v|^{2H-2}\, du\, dv =: M + N$$

Для N неважко отримати наступну оцінку

$$N \leq L_2\, (t_2 - t_1)^{1-2H_0+2H}\,,$$

де $L_2 = \frac{L_1}{r^{1-2H_0+2H}}$, $\quad L_1 = \frac{c^2 H\, m^2}{1-H_0} + \frac{c^2\, 2H\left(2H-H_0+\frac{1}{2}\right) m^2}{2^{2H-H_0-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-H_0\right)(2H-2H_0+1)} > 0.$

Знаайдемо тепер оцінку для M.

$$M = 2H(2H-1)\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_1}\alpha(u)\,\alpha(v)\,\left[\frac{1}{t_1}\,\frac{u}{t_1}\,\beta\left(\frac{u}{t_1}\right)\,\left(1-\frac{u}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}-H_0} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t_2}\,\frac{u}{t_2}\,\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\,\left(1-\frac{u}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}-H_0}\right]\,\left[\frac{1}{t_1}\,\frac{v}{t_1}\,\beta\left(\frac{v}{t_1}\right)\,\left(1-\frac{v}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}-H_0} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{t_2}\,\frac{v}{t_2}\,\beta\left(\frac{v}{t_2}\right)\,\left(1-\frac{v}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}-H_0}\right]\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv.$$

Зауважимо, що $\forall\ u \in (0, t_1]$ використовуючи монотонність функцій $u\,\beta(u)$, $\beta(u)$, маємо

$$\frac{1}{t_1}\,\frac{u}{t_1}\,\beta\left(\frac{u}{t_1}\right)\,\left(1-\frac{u}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}-H_0} > \frac{1}{t_2}\,\frac{u}{t_2}\,\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\,\left(1-\frac{u}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}-H_0},$$

а отже,

$$(t_1-u)^{\frac{1}{2}-H_0}\ t_2^{\frac{5}{2}-H_0} > (t_2-u)^{\frac{1}{2}-H_0}\, t_1^{\frac{5}{2}-H_0}.$$

Звідси

$$M \le c^2\, 2H(2H-1)\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_1} t_2^2\,\frac{u}{t_2}\,\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\,\frac{v}{t_2}\,\beta\left(\frac{v}{t_2}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t_1^{\frac{5}{2}-H_0}}\,(t_1-u)^{\frac{1}{2}-H_0} - \frac{1}{t_2^{\frac{5}{2}-H_0}}\,(t_2-u)^{\frac{1}{2}-H_0}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t_1^{\frac{5}{2}-H_0}}\,(t_1-v)^{\frac{1}{2}-H_0} - \frac{1}{t_2^{\frac{5}{2}-H_0}}\,(t_2-v)^{\frac{1}{2}-H_0}\right]\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv \le$$

$$\le \frac{c^2\, 2H(2H-1)\, m^2\, t_2^2}{t_1^{10-4H_0}}\int\limits_0^{t_1}\left[t_2^{\frac{5}{2}-H_0}\,(t_1-u)^{\frac{1}{2}-H_0} - t_1^{\frac{5}{2}-H_0}\,(t_2-u)^{\frac{1}{2}-H_0}\right]\times$$

$$\times \int_0^{t_1} (t_1 - v)^{\frac{1}{2} - H_0} \, |u - v|^{2H-2} \, dv \, du.$$

Далі маємо:

$$\int_0^{t_1} (t_1 - v)^{\frac{1}{2} - H_0} \, |u - v|^{2H-2} \, dv = \int_0^{u} (t_1 - v)^{\frac{1}{2} - H_0} \, |u - v|^{2H-2} \, dv +$$

$$+ \int_u^{\frac{u+t_1}{2}} (t_1 - v)^{\frac{1}{2} - H_0} \, |u - v|^{2H-2} \, dv + \int_{\frac{u+t_1}{2}}^{t_1} (t_1 - v)^{\frac{1}{2} - H_0} \, |u - v|^{2H-2} \, dv \leq$$

$$\leq (t_1 - u)^{\frac{1}{2} - H_0} \, \frac{u^{2H-1}}{2H-1} + \left(\frac{t_1 - u}{2}\right)^{\frac{1}{2} - H_0} \frac{1}{2H-1} \left(\frac{t_1 - u}{2}\right)^{2H-1} +$$

$$+ \left(\frac{t_1 - u}{2}\right)^{\frac{3}{2} - H_0} \frac{1}{\frac{3}{2} - H_0} \left(\frac{t_1 - u}{2}\right)^{2H-2} \leq (t_1 - u)^{\frac{1}{2} - H_0} \, t_1^{2H-1} \, L_3 \leq$$

$$\leq (t_1 - u)^{\frac{1}{2} - H_0} \, R^{2H-1} \, L_3$$

де $L_3 = \frac{1}{2H-1} + \frac{2H - H_0 + \frac{1}{2}}{(2H-1)\left(\frac{3}{2} - H_0\right) 2^{2H - H_0 - \frac{1}{2}}} > 0.$

Нехай далі:

$$L_4 := \frac{c^2 \, 2H \, (2H-1) \, m^2 \, R^{2H+1}}{r^{10-4H_0}} \, L_3 > 0.$$

Тоді

$$M \leq L_4 \int_0^{t_1} \left[t_2^{\frac{5}{2} - H_0} \, (t_1 - u)^{1 - 2H_0} - t_1^{\frac{5}{2} - H_0} \, (t_2 - u)^{\frac{1}{2} - H_0} \, (t_1 - u)^{\frac{1}{2} - H_0} \right] du \leq$$

$$\leq L_4 \int_0^{t_1} \left[t_2^{\frac{5}{2} - H_0} \, (t_1 - u)^{1 - 2H_0} - t_1^{\frac{5}{2} - H_0} \, (t_2 - u)^{1 - 2H_0} \right] du \leq$$

$$\leq L_4 \left[t_2^{\frac{5}{2} - H_0} \, \frac{t_1^{2-2H_0}}{2 - 2H_0} - t_1^{\frac{5}{2} - H_0} \, \frac{t_2^{2-2H_0}}{2 - 2H_0} + t_1^{\frac{5}{2} - H_0} \, \frac{(t_2 - t_1)^{2-2H_0}}{2 - 2H_0} \right] =$$

$$= \frac{L_4}{2-2H_0}\left[(t_1\,t_2)^{2-2H_0}\left(t_2^{H_0+\frac{1}{2}} - t_1^{H_0+\frac{1}{2}}\right) + t_1^{\frac{5}{2}-H_0}\,(t_2-t_1)^{2-2H_0}\right] =$$

$$= \frac{L_4}{2-2H_0}\left[(t_1\,t_2)^{2-2H_0}\,\theta^{H_0-\frac{1}{2}}\,(t_2-t_1)^{2H_0-1} + t_1^{\frac{5}{2}-H_0}\right](t_2-t_1)^{2-2H_0} \leq$$

$$\leq \frac{L_4}{2-2H_0}\left[R^{\frac{7}{2}-3H_0}\,(R-r)^{2H_0-1} + R^{\frac{5}{2}-H_0}\right](t_2-t_1)^{2-2H_0} =$$

$$=: L_5\,(t_2-t_1)^{2-2H_0}\,.$$

Отже,

$$N + M \leq L_2\,(t_2-t_1)^{1-2H_0+2H} + L_5\,(t_2-t_1)^{2-2H_0} =$$

$$= (t_2-t_1)^{2-2H_0}\left(L_2\,(t_2-t_1)^{2H-1} + L_5\right) \leq$$

$$\leq (t_2-t_1)^{2-2H_0}\left(L_2\,(R-r)^{2H-1} + L_5\right) =: L_6\,(t_2-t_1)^{2-2H_0}\,,\;\; L_6 > 0.$$

Тобто:

$$\mathbb{E}\,|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}|^2 \leq L_6\,(t_2-t_1)^{2-2H_0}\,.$$

Тепер слід зауважити, що δ_t гауссівський процес і $\mathbb{E}\delta_t = 0$, а отже виконується наступне:

$$\mathbb{E}\,|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}|^{2n} = (2n-1)!!\,\sigma^{2n}, \text{де } \sigma^2 = \mathbb{E}\,|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}|^2\,.$$

Виберемо n наступним чином: $n = \left[\frac{1}{2-2H_0}\right] + 1$, тоді

$$\mathbb{E}\,|\delta_{t_2} - \delta_{t_1}|^{2n} = (2n-1)!!\,\sigma^{2n} \leq (2n-1)!!\,L_6^n\,(t_2-t_1)^{n(2-2H_0)}\,, \qquad (1.13)$$

причому $n\,(2-2H_0) > 1$.

Оцінка (1.13), в силу теореми Колмогорова ([52]), означає неперервність δ_t.

Зауваження 1.2.1. *Функції* $\beta(t) \equiv 1$ *і* $\beta(t) = t^{\frac{1}{2}-H_0}$, $t > 0$, *задовольняють умови теорем 1.2.1 – 1.2.3.*

1.3. Заміна міри в лінійних стохастичних диференціальних рівняннях, що містять ДБР

Нехай $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - обмежена функція на кожному відрізку $[0, t]$, $\ t > 0$.

Розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння

$$d\xi_t = \xi_t \int\limits_0^t \theta(u)\, dB_u^H\, dt + \xi_t\, \phi(t)\, dB_t^H \tag{1.14}$$

Зробимо таку заміну міри $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ в рівнянні (1.14)

$$B_t^H \to \widehat{B}_t^H + \int\limits_0^t a(s)\, ds,$$

щоб воно набуло вигляду

$$d\xi_t = \xi_t\, \phi(t)\, d\widehat{B}_t^H. \tag{1.15}$$

Очевидно, для цього потрібно вибрати зсув $a(s) = -\frac{\int_0^s \theta(u)\, dB_u^H}{\phi(s)}$.

Знайдемо тепер відношення правдоподібності. Як показано в роботі [42],

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{ z_t - \frac{1}{2}\langle z \rangle_t \right\},$$

де $z_t = \frac{1}{c_2} \int_0^t s^{H-\frac{1}{2}}\, \delta_s\, dW_s$, $c_2 = \frac{c_H}{2H\sqrt{2-2H}}$, $c_H = \sqrt{\frac{2H\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+H\right)\Gamma(2-2H)}}$, W_s – вінерівський процес і Функція δ_s дається рівністю

$$\int\limits_0^t \delta_s\, ds = \int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, a(s)\, ds. \tag{1.16}$$

Отже, для знаходження відношення правдоподібності достатньо обчислити δ_s з рівняння (1.16), тобто обчислити похідну функції $\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, a(s)\, ds$.

Нехай далі $\phi(s) \neq 0, \quad \rho(s) := \frac{1}{\phi(s)}, \quad \rho \in \mathcal{C}^1[0,T], \forall T > 0$, така, що $\rho(u)\,\theta(u)$ обмежена на $\mathbb{R}_+$. Тоді за формулою Іто

$$-a(s) = \rho(s)\int_0^s \theta(u)\,dB_u^H = \int_0^s \rho(u)\,\theta(u)\,dB_u^H + \int_0^s \int_0^u \theta(v)\,dB_v^H\,\rho'(u)\,du$$

Підставивши цей вираз у формулу (1.16), дістанемо

$$\int_0^t \delta_s\,ds = -t^{\frac{1}{2}-H}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\,\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\,\int_0^s \rho(u)\,\theta(u)\,dB_u^H\,ds-$$

$$-\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\,s^{\frac{1}{2}-H}\,\int_0^s\int_0^u \theta(v)\,dB_v^H\,\rho'(u)\,du\,ds =: -t^{\frac{1}{2}-H}\,\Phi(t) - F(t).$$

Тепер

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}-H}\,\Phi(t)\right) = \left(\frac{1}{2}-H\right)\,t^{-\frac{1}{2}-H}\,\Phi(t) + t^{\frac{1}{2}-H}\,\Phi'(t)$$

Згідно з теоремою 1.2.1 і наслідком 1.2.1 похідна функції Φ існує і дорівнює

$$\Phi'(t) = \left(\frac{3}{2}-H\right)t^{\frac{1}{2}-H}\int_0^t\int_0^s \rho(u)\,\theta(u)\,\frac{u}{t^2}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\,\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\,dB_u^H\,ds+$$

$$+t^{\frac{3}{2}-H}\int_0^t \rho(u)\,\theta(u)\,\frac{u}{t^2}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\,\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H}\,dB_u^H.$$

Звідси

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}-H}\,\Phi(t)\right) = \left(\frac{1}{2}-H\right)\,t^{-\frac{1}{2}-H}\,\Phi(t) + \left(\frac{3}{2}-H\right)t^{-2}\int_0^t\int_0^s \rho(u)\,\theta(u)\times$$

$$\times\,(t-u)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{3}{2}-H}\,dB_u^H\,ds + t^{-1}\int_0^s \rho(u)\,\theta(u)\,\left(t-u\right)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{3}{2}-H}\,dB_u^H.$$

Спираючись на теорему 1 роботи [33], можна, аналогічно до оцінки (1.13), показати, що функція $\int\limits_0^u \theta(v)\, dB_v^H$ з ймовірністю 1 неперервна. Звідси, беручи до уваги ще припущення про неперервність функції ρ', виводимо, що функція

$$s^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \int\limits_0^u \theta(v)\, dB_v^H\, \rho'(u)\, du$$

належить класові $\mathcal{AC}[0,t]$. А значить, за лемою 2.2 ([50]) ця функція майже скрізь за мірою Лебега має дробову похідну порядку $H - \frac{1}{2}$, або, що те саме, похідну дробового інтеграла

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \int\limits_0^u \theta(v)\, dB_v^H\, \rho'(u)\, du\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \theta(v)\, dB_v^H\, \rho'(s)\, ds +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - H\right) \int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{-\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \int\limits_0^u \theta(v)\, dB_v^H\, \rho'(u)\, du\, ds.$$

1.4. Верхні та нижні оцінки для моментів вінерівських інтегралів відносно ДБР

Як вже згадувалось у вступній частині дисертації, часто при дослідженні властивостей розв'язків СДР потрібно оцінювати їх моменти. Зокрема в деяких випадках напівлінійних СДР , що містять ДБР (приклад наведено в параграфі 1.5), розв'язок представляється за допомогою вінерівських інтегралів відносно ДБР, а значить, потрібно знати максимальні оцінки моментів таких вінерівських інтегралів відносно ДБР. В роботі [32] наведено максимальні оцінки на випадковому інтервалі тільки для моментів ДБР. У роботі [33] на детермінованому інтервалі знайдено тільки верхню оцінку моменту вінерівського інтеграла відносно ДБР. В даному параграфі одержано верхні та нижні оцінки для моментів супремумів інтегралів виду $I_\tau = \int\limits_0^\tau f(t)dB_t^H$ як для детермінованих, так і випадкових τ. Оцінки на детермінованих інтервалах одержано за рахунок гауссовості I_τ, на випадкових - завдяки представленню ДБР за допомогою так званого мартингала Молчана ([37–39]). Ці оцінки істотно залежать від властивостей функції f.

1.4.1. Верхня оцінка на невипадковому інтервалі. Позначимо $\zeta_T^* := \left(\int\limits_0^T f(s)\,dB_s^H\right)^* = \sup\limits_{t\le T}\left|\int\limits_0^t f(s)\,dB_s^H\right|$. Зауважимо, що процес $\zeta_t = \int\limits_0^t f(s)\,dB_s^H,\ t\in[0,T]$ - гауссівський і, значить, для нього мають місце ентропійні оцінки максимуму. У зв'язку з цим розглянемо на відрізку $[0,T]$ напівметрику ρ_ζ, породжену процесом ζ_t, тобто

$$\rho_\zeta^2(s,t) = \mathbb{E}\left(\zeta_t - \zeta_s\right)^2 = \int\limits_s^t\int\limits_s^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ позначимо через $N(T,\varepsilon)$ найменшу можливу кількість точок в ε-сітці відрізка $[0,T]$, $H(T,\varepsilon) = \ln N(T,\varepsilon)$ метричну ε-ентропію цього відрізка в напівметриці ρ_ζ, інтеграл Дадлі $D(T,\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon H(T,u)^{1/2}\,du$.

Лема 1.4.1. *У введеній напівметриці ρ_ζ має місце оцінка*

$$D(T,\varepsilon) \le \int\limits_0^\varepsilon \left[\ln\left(1 + v^{-1/H} C(H) \int\limits_0^T |f(u)|^{1/H}\, du\right)\right]^{1/2} dv, \qquad (1.17)$$

$C = C(H)$ – деяка стала.

Доведення. В роботі [33] показано, що

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^T f(u) f(v) |u-v|^{2H-2}\, du\, dv \le C_1(H) \|f\|^2_{\mathcal{L}_{1/H}[0,T]}. \qquad (1.18)$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ метрична ε-ентропія відрізка $[0,T]$, очевидно, не перевищує $\ln\left(1 + \varepsilon^{-1/H}(C_1(H))^{1/2H} \int\limits_0^T |f(u)|^{1/H}\, du\right)$, звідки випливає (1.17) з $C(H) = (C_1(H))^{1/2H}$.

Теорема 1.4.1. *Для будь-якого $p > 0$ має місце оцінка*

$$\mathbb{E}\,(\zeta_T^*)^p \le C_p(H) \|f\|^p_{\mathcal{L}_{1/H}(0,T)}.$$

Доведення. Позначимо

$$\sigma^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\zeta_t^2 = \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_0^t \int\limits_0^t f(u) f(v) |u-v|^{2H-2}\, du\, dv.$$

Тоді, згідно з теоремою 1 ([53], с.141) і наслідком із неї, для будь-якого $r > 4\sqrt{2} D(T, \sigma/2)$ має місце нерівність

$$P\{\zeta_T^* > r\} \le 1 - \Phi\left(\frac{(r - 4\sqrt{2}D(T,\sigma/2))}{\sigma}\right),$$

де Φ - функція стандартного нормального розподілу. Оскільки

$$E\,(\zeta_T^*)^p \le p \int\limits_0^\infty x^{p-1}(1 - F(x))\, dx,$$

де $F(x) = P\{\zeta_T^* < x\}$, то з (2) отримуємо $(D = D(T, \sigma/2))$

$$E\,(\zeta_T^*)^p \le p \int\limits_0^{4\sqrt{2}D} x^{p-1}(1-F(x))\,dx + p \int\limits_{4\sqrt{2}D}^{\infty} x^{p-1}(1-F(x))\,dx \le (4\sqrt{2}D)^p +$$

$$+p\int\limits_0^{\infty} (x+4\sqrt{2}D)^{p-1}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\,dx \le (4\sqrt{2}D)^p +$$

$$+p2^{p-1}\int\limits_0^{\infty} x^{p-1}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\,dx + p(4\sqrt{2}D)^{p-1}\int\limits_0^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\,dx \le$$

$$\le (4\sqrt{2}D)^p + p2^{p-1}\sigma^p c_1(p) + p(4\sqrt{2}D)^{p-1}\sigma c_2, \qquad (1.19)$$

де $c_1(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\,dx, c_2 = c_1(1) = \int\limits_0^{\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)\,dx.$

Далі, оцінимо $D = D(T, \sigma/2)$. В силу леми 1.4.1

$$D \le \int\limits_0^{\sigma/2}\left[\ln\left(1 + v^{-1/H}C(H)\int\limits_0^{T}|f(u)|^{1/H}du\right)\right]^{1/2} dv \le$$

$$\le Hc_3^H \int\limits_0^{\infty} z^{1/2}\frac{e^z\,dz}{(e^z-1)^{H+1}},$$

де $c_3 = C(H)\int\limits_0^{T}|f(u)|^{1/H}du.$

Отже, $D \le c_4\|f\|_{\mathcal{L}_{1/H}(0,T)}$. Далі, очевидно, $\sigma \le c_5\|f\|_{\mathcal{L}_{1/H}(0,T)}$. Підставивши останні дві оцінки в (1.19), дістанемо доводжувану нерівність.

1.4.2. Нижня оцінка на невипадковому інтервалі. В роботі [33] наведено контрприклад, який показує, що оцінка, протилежна до (1.18), не має місця. Тому й нижня оцінка для ζ_T^* буде гіршою, порівняно з теоремою 1.4.1. Далі в цьому пункті вважаємо, що $f = f(s) > 0$ на $[0, T]$. Позначимо $f_* = \inf\limits_{s\in[0,T]} f(s)$, і нехай $f_* > 0$.

Теорема 1.4.2. *Для будь-якого* $T > 0$ *має місце оцінка*

$$\mathbb{E}\,(\zeta_T^*)^p \geq C_p T^{pH} f_*^p.$$

Доведення. Згідно з нижньою оцінкою за Судаковим (теорема 5, [53], с.152), для будь-якого $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}\,(\zeta_T^*)^p \geq (\mathbb{E}\zeta_T^*)^p \geq C_p H(T,\varepsilon)^{p/2}\varepsilon^p.$$

Але $H(T,\varepsilon) = \ln N([0,T],\varepsilon)$ і, очевидно, $N([0,T],\varepsilon) \geq 1 \vee \frac{T f_*^{1/H}}{\varepsilon^{1/H}}$. Тоді

$$H(T,\varepsilon) \geq \ln\left(1 \vee \frac{T f_*^{1/H}}{\varepsilon^{1/H}}\right).$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(\varepsilon) = \ln\left(1 \vee \frac{T f_*^{1/H}}{\varepsilon^{1/H}}\right)^{1/2} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

і знайдемо її найбільше значення. Достатньо розглянути $\varepsilon < T^H f_*$. Тоді

$$\max_{\varepsilon < T^H f_*} \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} e^{-1/2} T^H f_*,$$

звідки й випливає наше твердження.

1.4.3. Верхня оцінка на випадковому інтервалі.

Розглянемо процес $I_t = \int\limits_0^t f(s)\,dB_s^H, t > 0$, де f детермінована вимірна додатня функція з $\mathcal{L}_2^\Gamma$.

Покладемо далі для кожного $t > 0$ $g(t) = \frac{1}{f(t)}$; $\alpha = H - \frac{1}{2}$.

Теорема 1.4.3. *Нехай функція* $s^\alpha f(s)$ *не спадає на* $[0,\infty)$. *Тоді для кожного* $p > 0$ *існує константа* $C(p,H) > 0$ *така, що для довільного моменту зупинки* τ

$$\mathbb{E}\,(I_\tau^*)^p \leq C(p,H)\left(\mathbb{E}\left((f(\tau))^{\frac{pH}{2H-1}}\tau^{pH}\right)\right)^{\frac{2H-1}{H}} \left(\mathbb{E}\left(\tau^{pH}\right)\right)^{\frac{1-H}{H}}.$$

Зауваження 1.4.1. *Якщо* $|f(x)| \le f^* < \infty$, $x \in \mathbb{R}$, *то* $\mathbb{E}\,|I_\tau^*|^p \le C(p,H)\,(f^*)^p\,\mathbb{E}\tau^{pH}$.

Доведення. Позначимо

$$Y_t = \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H} dB_s^H.$$

Тоді

$$B_t^H = \int_0^t s^{H-\frac{1}{2}}\, dY_s,$$

і тому

$$I_t = \int_0^t s^{H-\frac{1}{2}} f(s) dY_s.$$

Інтегруючи частинами, одержуємо верхню оцінку для I_t^* :

$$I_t^* = \sup_{s\le t}|I_s| = \sup_{s\le t}\left| t^\alpha f(t) Y_t - \int_0^t Y_s\, d\left(s^\alpha f(s)\right)\right| \le 2f(t)t^\alpha Y_t^*.$$

Для процесу Y_t, використовуючи, згідно з теоремою 3.2 ([32]), його представлення через мартингал $M_t = \int_0^t w(t,s) dB_s^H$, де $w(t,s) = \frac{c}{C} s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}$, $c = \frac{1}{\mathrm{B}\left(H+\frac{1}{2},\frac{3}{2}-H\right)}$, $C = \sqrt{\frac{H}{\left(H-\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(H-\frac{1}{2},2-2H\right)}}$, а саме $Y_t = 2H\int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dM_s$, можна одержати оцінку

$$Y_t^* \le 4Ht^\alpha M_t^*.$$

Із цих двох верхніх оцінок для кожного $t > 0$ маємо

$$I_t^* \le 8HM_t^* t^{2\alpha} f(t),$$

або ж для випадкового моменту зупинки τ маємо

$$I_\tau^* \le 8HM_\tau^* \tau^{2\alpha} f(\tau).$$

Звідси, для довільного $p > 0$

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p \leq (8H)^p \,\mathbb{E}\left(\tau^{2\alpha p}\left(f(\tau)\right)^p \left(M_\tau^*\right)^p\right). \tag{1.20}$$

Застосувавши нерівність Гельдера до правої частини нерівності (1.20), дістанемо

$$\mathbb{E}\left(\tau^{2\alpha p}\left(f(\tau)\right)^p\left(M_\tau^*\right)^p\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(\tau^{2\alpha pq}\left(f(\tau)\right)^{pq}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{E}\left(M_\tau^*\right)^{pr}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

де $q = \frac{H}{2\alpha} = \frac{H}{2H-1} > 1$ і $r = \frac{H}{1-H}$. Із загальної нерівності Буркхолдера-Девіса-Ганді випливає, що для довільного $p > 0$ існують константи $c_p, C_p > 0$ такі, що для довільного моменту зупинки τ

$$c_p c_2^p \mathbb{E}\tau^{p(1-H)} \leq \mathbb{E}\left(M_\tau^*\right)^p \leq c_2^p C_p \mathbb{E}\tau^{p(1-H)}.$$

Звідси

$$\mathbb{E}\left(M_\tau^*\right)^{pr} \leq c_2^p C_p \mathbb{E}\tau^{\frac{1-2\alpha}{2}pr} = c_2^p C_p \mathbb{E}\tau^{pH}. \tag{1.21}$$

Покладемо $C(p,H) := (8H)^p \left(c_2^p C_p\right)^{\frac{1-H}{H}}$ тоді

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p \leq C(p,H)\left(\mathbb{E}\left(\left(f(\tau)\right)^{\frac{pH}{2H-1}}\tau^{pH}\right)\right)^{\frac{2H-1}{H}}\left(\mathbb{E}\tau^{pH}\right)^{\frac{1-H}{H}},$$

і теорему доведено.

1.4.4. Нижня оцінка на випадковому інтервалі. Нехай $T > 0$ фіксоване. Покладемо $M_g(T) = \sup\limits_{s\in(0,T]} g(s)$.

Теорема 1.4.4. *Нехай для довільного $t \in (0,T]$ функція g задовольняє нерівність*

$$g'(s) \geq \left(\frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha}{t-s}\right) g(s), \; 0 < s < t. \tag{1.22}$$

Тоді для кожного $p > 0$ існує константа $c(p, H) > 0$ така, що для довільного моменту зупинки $\tau \le T$

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p \ge c(p,H)\left(M_g(T)\right)^{-p}\mathbb{E}\tau^{pH}.$$

Доведення. Нехай $0 < a < b < 0$. Тоді, використовуючи представлення мартингала M_t ([32]), маємо

$$M_t = \int\limits_0^{at} w(t,s)dB_s^H + \int\limits_{at}^{bt} w(t,s)dB_s^H + \int\limits_{bt}^{t} w(t,s)dB_s^H :=$$

$$:= M_t(a) + \int\limits_{at}^{bt} w(t,s)g(s)dI_s + M_t(1-b). \tag{1.23}$$

Інтегруючи частинами другий доданок рівності (1.23), оцінюємо його так:

$$\left|\int\limits_{at}^{bt} w(t,s)g(s)dI_s\right| = |w(t,bt)g(bt)I_{bt} - w(t,at)g(at)I_{at} -$$

$$-\int\limits_{at}^{bt} I_s d\left(w(t,s)g(s)\right)\Bigg| \le I_t^*\Big(M_g(T)t^{-2\alpha}\left(b^{-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + a^{-\alpha}(1-a)^{-\alpha}\right) +$$

$$+\int\limits_{at}^{bt}\left|d\left(s^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}g(s)\right)\right|\Bigg).$$

Далі спробуємо дослідити похідну функції $\varphi(s) := s^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}g(s)$

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = s^{-\alpha-1}(t-s)^{-\alpha-1}\left(\alpha(2s-t)g(s) + (t-s)sg'(s)\right).$$

Використовуючи умову (1.22) теореми переконуємося, що φ зростає на $[0,t]$, а значить, її варіація на $[at, bt]$ дорівнює

$$V_\varphi = t^{-2\alpha}\left(b^{-\alpha}(1-b)^{-\alpha}g(bt) - a^{-\alpha}(1-a)^{-\alpha}g(at)\right).$$

Звідси

$$\left|\int\limits_{at}^{bt} w(t,s)g(s)dI_s\right| \le C(a,b,H)M_g(T)t^{-2\alpha}I_t^*,$$

де $C(a,b,H) = 2\left((b^{-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + a^{-\alpha}(1-a)^{-\alpha}\right)$. Тепер ми можемо оцінити $\xi_t := t^{2\alpha}\left|M_t\right|$ так:

$$\xi_t = t^{2\alpha}|M_t| \le t^{2\alpha}|M_t(a) + M_t(1-b)| + C(a,b,H)M_g(T)I_t^*.$$

Як показано в [32], для довільного $p > 0$ існує константа $z_p > 0$ така, що для довільного моменту зупинки τ

$$\mathbb{E}\left(\xi_\tau^*\right)^p \ge z_p \mathbb{E}\left(\tau^{pH}\right).$$

З останніх двох нерівностей і теореми 1.4.3 маємо

$$z_p \mathbb{E}\tau^{pH} \le \left(C(a,b,H)\right)^p \left(M_g(T)\right)^p \mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p + \mathbb{E}\left(\tau^{2\alpha}\left|M_\tau(a) + M_\tau(1-b)\right|\right)^p.$$

Далі використаємо одержані в роботі [32] оцінки

$$|M_\tau(a)| \le 8H\left(\frac{a}{1-a}\right)^{H-\frac{1}{2}} M_\tau^*,$$

$$|M_\tau(1-b)| \le 8H\left(\frac{1-b}{b}\right)^{H-\frac{1}{2}} M_\tau^*,$$

$$\mathbb{E}\left(\tau^{2H-1}M_\tau(a)\right)^p \le (8H)^p\left(\frac{a}{1-a}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)} c_2^p C_p \mathbb{E}\tau^{pH};$$

$$\mathbb{E}\left(\tau^{2H-1}M_\tau(1-b)\right)^p \le (8H)^p\left(\frac{1-b}{b}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)} c_2^p C_p \mathbb{E}\tau^{pH},$$

для того щоб дістати нижню оцінку p-го моменту величини I_τ^*:

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p \ge \frac{z_p - (8H)^p c_2^p C_p\left[\left(\frac{a}{1-a}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1-b}{b}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)}\right]}{\left(C(a,b,H)\right)^p}\left(M_g(T)\right)^{-p}\mathbb{E}\tau^{pH}.$$

Тепер, взявши a достатньо близьким до 0 і b достатньо близьким до 1, забезпечимо додатність коефіцієнту $c(p,H) := \frac{z_p - (8H)^p c_2^p C_p \left[\left(\frac{a}{1-a}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1-b}{b}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)} \right]}{(C(a,b,H))^p}$ нижньої оцінки. Це доводить теорему.

Зауваження 1.4.2. *Клас функцій, що задовольняє умову (1.22), непорожній. До нього належать, наприклад, функції виду* $g(s) = s^\gamma e^{\beta s}, s > 0, \gamma \geq \alpha,\ \beta \geq 0.$

1.4.5. Оцінки моментів на випадковому інтервалі для одного класу підінтегральних степеневих функцій.

Із вищевикладених результатів видно, що структура оцінок для моментів супремумів вінерівських інтегралів відносно ДБР істотно залежить як і від вигляду самої підінтегральної функції, так і від її властивостей.

У наступній теоремі знайдено верхню і нижню оцінки на випадковому інтервалі для моментів супремумів вінерівських інтегралів відносно ДБР з підінтегральними степеневими функціями. В цьому випадку умови теорем 1.4.3 та 1.4.4 можна послабити. Нехай $f(s) = s^\gamma,\ \gamma > -2\alpha$, так що $I_\tau = \int\limits_0^\tau s^\gamma \, dB_s^H$. Тоді справджується наступна теорема.

Теорема 1.4.5. *Для кожного* $p > 0$ *існують константи* $c(p,H), C(p,H) > 0$ *такі, що для довільного моменту зупинки* τ

$$c(p,H)\mathbb{E}\tau^{p(H+\gamma)} \leq \mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p \leq C(p,H)\mathbb{E}\tau^{p(H+\gamma)}. \tag{1.24}$$

Доведення. *1) Верхня оцінка.* За зробленого припущення про f нерівність (1.20) набуває вигляду

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p \leq (8H)^p \, \mathbb{E}\left(\tau^{(2\alpha+\gamma)p} \ \left(M_\tau^*\right)^p\right). \tag{1.25}$$

Згідно з нерівністю Гельдера (1.25), щоб отримати

$$\mathbb{E}\left(\tau^{(2\alpha+\gamma)p}\left(M_\tau^*\right)^p\right) \le \left(\mathbb{E}\tau^{(2\alpha+\gamma)pq}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{E}\left(M_\tau^*\right)^{pr}\right)^{\frac{1}{r}},$$

де $q = \frac{1+2\alpha+2\gamma}{4\alpha+2\gamma} > 1$ і $r = \frac{1+2\alpha+2\gamma}{1-2\alpha}$. Далі, використовуючи верхню оцінку (1.21) для моменту M_t^* і означення константи $C(p,H)$ з теореми 1.4.3, одержуємо верхню оцінку.

2) Нижня оцінка. Як і в доведенні теореми 1.4.4, для $a, b \in (0,1)$ $a < b$ розглянемо розклад (1.23) мартингала M_t і оцінимо другий доданок у ньому. Похідна функції φ, введеної в доведенні теореми 1.4.4, при $g(s) = s^{-\gamma}$, $\gamma > -2\alpha$ тепер дорівнює

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = s^{-\alpha-\gamma-1}(t-s)^{-\alpha-1}\left((\gamma+2\alpha)s - (\gamma+\alpha)t\right).$$

Отже, при $\gamma > -\alpha$ функція має на відрізку $[0,t]$ одну точку екстремуму td, де $d = \frac{\gamma+\alpha}{\gamma+2\alpha}$, і при $-2\alpha \le \gamma \le -\alpha$ не має жодної. Тому її варіацію V_φ на відрізку $[at, bt]$ можна оцінити так:

$$V_\varphi \le t^{-2\alpha-\gamma}\left(b^{-\gamma-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + 2|d|^{-\gamma-\alpha}(1-d)^{-\alpha} + a^{-\gamma-\alpha}(1-a)^{-\alpha}\right).$$

Звідси

$$\left|\int_{at}^{bt} w(t,s)s^{-\gamma}dI_s\right| \le C(a,b,H,\gamma)\, t^{-2\alpha-\gamma}I_t^*,$$

де $C(a,b,H,\gamma) = 2\frac{c}{C}\left(b^{-\gamma-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + |d|^{-\gamma-\alpha}(1-d)^{-\alpha} + a^{-\gamma-\alpha}(1-a)^{-\alpha}\right).$

Для процесу $\xi_t = t^{2\alpha+\gamma}M_t$ маємо

$$|\xi_t| \le t^{2\alpha+\gamma}\left|M_t(a) + M_t(1-b)\right| + C(a,b,H,\gamma)I_t^*.$$

Звідси, для моменту зупинки τ і довільного $p > 0$ маємо

$$\mathbb{E}\left(\xi_\tau^*\right)^p \le \left(C(a,b,H,\gamma)\right)^p\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p + \mathbb{E}\left(\tau^{2\alpha+\gamma}\left|M_\tau(a) + M_\tau(1-b)\right|\right)^p.$$

Оцінимо тепер для довільного $p>0$ p-ий момент процесу ξ_t^*. За формулою Іто для процесу ξ_t^2 і обмеженого моменту зупинки τ маємо:

$$\mathbb{E}\xi_\tau^2=\mathbb{E}\left(\tau^{4\alpha+2\gamma}M_\tau^2\right)=(4\alpha+2\gamma)\mathbb{E}\left(\int\limits_0^\tau M_s^2 s^{4\alpha+2\gamma-1}\,ds\right)+$$

$$+\mathbb{E}\left(\int\limits_0^\tau s^{4\alpha+2\gamma-2\alpha}\,ds+\int\limits_0^\tau s^{4\alpha+2\gamma}2M_s\,dM_s\right)\geq\frac{1}{1+2\alpha+2\gamma}\mathbb{E}\tau^{1+2\alpha+2\gamma}.$$

Для випадку $p\neq 2$ можна довести нерівність

$$\mathbb{E}\left(\xi_\tau^*\right)^p\geq z_p\mathbb{E}\tau^{p(\gamma+H)},\ z_p>0,\tag{1.26}$$

аналогічно доведенню леми 3.1 ([32]) з використанням нерівності Ленгляра, а також представлення Новікова з роботи [54]. Далі, використовуючи оцінку (1.21) моменту M_τ^* і нерівність Гельдера з показниками $q=\frac{1+2\alpha+2\gamma}{4\alpha+2\gamma}>1$ і $r=\frac{1+2\alpha+2\gamma}{1-2\alpha}>1,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ отримуємо оцінки p-их моментів $\tau^{2\alpha+\gamma}M_\tau(a)$ і $\tau^{2\alpha+\gamma}M_\tau(1-b)$

$$\mathbb{E}\left(\tau^{\gamma+2\alpha}M_\tau(a)\right)^p\leq(8H)^p\left(\frac{a}{1-a}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathbb{E}\tau^{(2\alpha+\gamma)pq}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mathbb{E}\left(M_\tau^*\right)^{pr}\right)^{\frac{1}{r}}\leq$$

$$\leq(8H)^p\left(\frac{a}{1-a}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)}\left(c_2^pC_p\right)^{\frac{1}{r}}\mathbb{E}\tau^{p(H+\gamma)},\tag{1.27}$$

аналогічно

$$\mathbb{E}\left(\tau^{\gamma+2\alpha}M_\tau(1-b)\right)^p\leq(8H)^p\left(\frac{1-b}{b}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)}\left(c_2^pC_p\right)^{\frac{1}{r}}\mathbb{E}\tau^{p(H+\gamma)}.\tag{1.28}$$

звідси з (1.26)-(1.28) дістаємо нижню оцінку p-го моменту процесу I_τ^* :

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^*\right)^p\geq c(p,H)\,\mathbb{E}\tau^{p(H+\gamma)},$$

де

$$c(p,H) = \frac{z_p - (8H)^p \left(c_2^p C_p\right)^{\frac{1}{r}} \left[\left(\frac{a}{1-a}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{1-b}{b}\right)^{p\left(H-\frac{1}{2}\right)}\right]}{\left(C(a,b,H,\gamma)\right)^p}.$$

Вибір достатньо малого a і b, достатньо близького до 1, забезпечує додатність $c(p,H)$ у нижній оцінці. Теорему доведено.

1.5. Приклад: оцінки моментів розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь, що містять ДБР

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння вигляду

$$dX_t = a\left(t, X_t\right)\, dt + b(t)\, dB_t^H,\ t \geq 0, \tag{1.29}$$

де $a(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – вимірна функція, що задовольняє умову Ліпшиця

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leq L_1 |x-y| \tag{1.30}$$

з деякою сталою $L_1 > 0$ та умову росту

$$|a(t,x)| \leq L_2(1+|x|), \tag{1.31}$$

b задовольняє умову

$$\int_0^\infty \int_0^\infty b(s)b(u)|s-u|^{2H-2}\, du\, ds < \infty \tag{1.32}$$

та умову неперервності процесу $I_t = \int\limits_0^t b(t)\, dB_s^H$. Оскільки процес I_t гауссівський, то, згідно з [53, с.169], достатньою умовою його неперервності є скінченність інтеграла Дадлі. Нехай функція $b \in \mathcal{L}_{1/H}[0,T]$ для будь-якого $T > 0$. Тоді для інтеграла Дадлі має місце оцінка (1.17), причому права частина нерівності (1.17), у свою чергу оцінюється величиною $\int\limits_0^{\varepsilon} v^{-\frac{1}{2H}}\, dv\, C(H)\, \|b\|^2_{\mathcal{L}_{1/H}[0,T]} < \infty$. Тобто за умови $b \in \mathcal{L}_{1/H}[0,T]$, $T > 0$ інтеграл I_t має неперервну модифікацію, яку й будемо розглядати.

Теорема 1.5.1. *Нехай функція a задовольняє умови (1.30), (1.31), функція b задовольняє умову (1.32) і наступну умову*

$$b \in \mathcal{L}_{1/H}[0,T],\ \textit{для довільного}\, T > 0.$$

Тоді на $[0,\infty)$ *існує єдиний неперервний розв'язок* X_t *стохастичного диференціального рівняння (1.29).*

Доведення. Спочатку покажемо, що оператор

$$(AX)_t := X_0 + \int\limits_0^t a\left(s, X_s\right) ds + I_t,$$

де X_0 є F_0 -вимірна випадкова величина,

є стискненням у будь-якому просторі

$$S_p := \{\xi(t,\omega),\, 0 \le t \le T_p,\, \xi(t) – F_t\text{- вимірна, } \sup_{0 \le t \le T_p} \mathbb{E}\left|\xi_t\right|^p < \infty\},\ p > 1,$$

з нормою $\|\xi\| = \left(\sup\limits_{0 \le t \le T_p} \mathbb{E}\left|\xi_t\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, якщо $\mathbb{E}\left|X_0\right|^p < \infty,\ T_p < L_1^{\frac{p}{1-p}}$.

Справді, з умов (1.30), (1.31), для $X \in S_p$ маємо

$$\mathbb{E}\left|(AX)_t\right|^p \le C_p \left(\mathbb{E}\left|X_0\right|^p + \mathbb{E}\left|I_t\right|^p + C(T_p) L_2 \left(1 + \int\limits_0^t \mathbb{E}\left|X_s\right|^p ds\right)\right),$$

$C_p,\ C(T_p) > 0,$

тобто $AX \in S_p$, якщо $X \in S_p$;

далі,

$$\mathbb{E}\left|(AX)_t - (AY)_t\right|^p \leq \mathbb{E}\left|\int\limits_0^t \left(a\left(s, X_s\right) - a\left(s, Y_s\right)\right)\, ds\right|^p \leq$$

$$\leq L_1^p \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \left|X_s - Y_s\right|\, ds\right)^p \leq L_1^p T_p^{p-1} \mathbb{E}\int\limits_0^t \left|X_s - Y_s\right|^p\, ds,$$

тобто $\|AX - AY\| \leq L_1 T_p^{1-\frac{1}{p}} \|X - Y\| =: L\|X - Y\|$, де $L < 1$. Отже, на відрізку $[0, T_p]$ рівняння (1.29) має єдиний розв'язок. Крім того, якщо шукати цей розв'язок методом послідовних наближень, причому взяти за нульове наближення $X_s^{(0)} \in S_p$, $X^{(0)}$ – неперервний процес на $[0, T_p]$, то з неперервності інтегралів $\int\limits_0^t a(s, \cdot)\, ds$ та I_t: X_t – неперервний процес в S_p. Доведення теореми отримаємо тепер, якщо будемо продовжувати розв'язок, а саме, розглянемо наступне рівняння

$$X_t = \xi_0^{(k)} + \int\limits_{kT_p}^t a\left(s, X_s\right)\, ds + \left(I_t - I_{kT_p}\right), \tag{1.33}$$

$k \in \mathbb{N}$, $\xi_0^{(k)} = X_{kT_p}$ – розв'язок попереднього рівняння, взятий в точці $t = kT_p$. Існування, єдиність та неперервність розв'язку рівняння (1.33) доводиться аналогічно до попереднього.

Покладемо тепер для довільних $C > 0$ і моменту зупинки τ

$$\tau_c := \tau \wedge \inf\{t > 0 \,:\, |X_t| \geq C\}$$

Зауважимо, що згідно з теоремою 1.5.1, розв'язок рівняння (1.29) неперервний на $[0, \tau_c]$.

Покладемо ще

$$\zeta_\tau^* := \sup_{t\le\tau} |X_t| \,.$$

Теорема 1.5.2. *Нехай функція a задовольняє умови (1.30) і (1.31), функція b задовольняє умову (1.32), умови теореми 1.5.1 і умови теореми 1.4.3, тобто функція $s^{H-\frac{1}{2}}b(s)$ монотонно неспадає на $[0,\infty)$. Тоді:*

1) для довільних $T>0$ і моменту зупинки $\tau\le T$ має місце оцінка

$$\mathbb{E}\,(\zeta_\tau^*)^p \le 4^p e^{4^p L_1^p T^{p-1}} \times$$
$$\times \left(\mathbb{E}|X_0|^p + L_1^p \mathbb{E}\tau^p + C(p,H)\left(\mathbb{E}\left((b(\tau))^{\frac{pH}{2H-1}}\tau^{pH}\right)\right)^{\frac{2H-1}{H}}\left(\mathbb{E}\tau^{pH}\right)^{\frac{1-H}{H}}\right), \tag{1.34}$$

де $C(p,H)$ – константа, визначена в теоремі 1.4.3;

2) якщо, крім того, функція b обмежена, то

$$\mathbb{E}\,(\zeta_\tau^*)^p \le 4^p e^{4^p L_1^p T^{p-1}} \left(\mathbb{E}|X_0|^p + L_1^p\mathbb{E}\tau^p + C(p,H)(b^*)^p\mathbb{E}\tau^{pH}\right), \tag{1.35}$$

де $b^* := \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |b(x)|$.

Доведення. Оскільки функція a задовольняє умови теореми 1.5.1, то існує єдиний неперервний на $[0,\infty)$ розв'язок рівняння (1.29). Використовуючи умови (1.30), (1.31), оцінимо спочатку p-ий момент $\zeta_{\tau_c}^*$

$$\left(\zeta_{\tau_c}^*\right)^p \le \left(|X_0| + L_1\tau_c + L_1\int_0^{\tau_c}\zeta_s^*\,ds + I_{\tau_c}^*\right)^p \le$$
$$\le 4^p\left(L_1\int_0^{\tau_c}\zeta_s^*\,ds\right)^p + 4^p|X_0|^p + 4^pL_1^p{\tau_c}^p + 4^p\left(I_{\tau_c}^*\right)^p \le$$
$$\le 4^pL_1^p\int_0^{\tau_c}(\zeta_s^*)^p\,ds\,{\tau_c}^{p-1} + 4^p|X_0|^p + 4^pL_1^p{\tau_c}^p + 4^p\left(I_{\tau_c}^*\right)^p.$$

Звідси, за нерівністю Гронуола

$$\left(\zeta^*_{\tau_c}\right)^p \le 4^p e^{4^p L_1^p {\tau_c}^{p-1}} \left(|X_0|^p + L_1^p {\tau_c}^p + \left(I^*_{\tau_c}\right)^p\right),$$

а отже

$$\mathbb{E}\left(\zeta^*_{\tau_c}\right)^p \le 4^p e^{4^p L_1^p T^{p-1}} \left(\mathbb{E}|X_0|^p + L_1^p \mathbb{E}\tau_c^p + \mathbb{E}\left(I^*_{\tau_c}\right)^p\right).$$

Звідси, застосовуючи теорему 1.4.3 і зауваження до неї для оцінювання p-ого моменту $I^*_{\tau_c}$, отримуємо 1) та 2) для $\tau = \tau_c$. Перехід до границі при $C \to \infty$, завершує доведення.

Розділ 2

СДР, ЩО ПРЕДСТАВЛЯЮТЬ "ЧИСТУ ДРОБОВУ" МОДЕЛЬ ЦІНИ АКЦІЇ

Перш ніж перейти до розгляду СДР, що містять тільки один стохастичний диференціал відносно ДБР, слід навести дві основні роботи, присвячені дослідженню таких рівнянь. Першою основною роботою слід виділити [29], де знайдено умови існування і єдиності тільки локального розв'язку СДР, що представляють як чисту, так і мішану дробові моделі ціни акції. В другій роботі [30] знайдено умови існування і єдиності глобального розв'язку рівняння, що містить тільки один диференціал відносно гельдерово неперервного процесу, причому існування і єдиність розв'язку доведено за умови глобальної ліпшицевості коефіцієнта зносу, яка на практиці дуже рідко виконується.

В цьому розділі, в параграфі 2.1, наведено умови існування і єдиності глобального розв'язку стохастичного диференціального рівняння, що містить тільки один стохастичний диференціал відносно ДБР, причому коефіцієнт зносу задовольняє локальну умову Ліпшиця. Це рівняння представляє "чисту дробову" модель ціни акції. У параграфі 2.2 доведено стохастичну теорему Фубіні для інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором. Для таких інтегралів, у параграфі 2.3, використовуючи стохастичну теорему Фубіні, знайдено умови їх диференційовності. Умови диференційовності стали необхідними при знаходженні умов заміни ймовірнісної міри в параграфі 2.4. В кінці розділу, в параграфі 2.5 наведено умови фінансової рівноваги ринку основних цінних паперів, ціна акцій якого визначається "чистою дробовою" моделлю.

2.1. Існування та єдиність розв'язку СДР

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння в повному ймовірнісному просторі $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\begin{cases} dX_t = c\, X_t\, dB_t^H + b(t, X_t)\, dt, \quad t \geq t_0,\ c \neq 0 \\ X_{t_0} = X_0 - \mathcal{F}_{t_0}\text{-вимірна випадкова величина,} \end{cases} \tag{2.1}$$

де функція $b \in \mathcal{C}\,(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ задовольняє умову Ліпшиця по $x \in \mathbb{R}$ рівномірно відносно $t \in [0, T]$, тобто $\forall T > 0\ \exists L_T > 0 :$

$$\sup_{t \in [0,T]} |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq L_T\, |x_1 - x_2|.$$

Означення 2.1.1. *Розв'язком диференціального рівняння (2.1) будемо називати розв'язок інтегрального рівняння*

$$X_t = X_0 + c \int\limits_{t_0}^{t} X_s\, dB_s^H + \int\limits_{t_0}^{t} b(s, X_s)\, ds, \quad t \geq t_0$$

Теорема 2.1.1. *Нехай функція b задовольняє умови:*

1) $b \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right);$

2) умову Ліпшиця по $x \in \mathbb{R}$ *рівномірно відносно* $t \in [0, T]$,

тобто $\forall T > 0\ \exists L_T > 0:$

$$\sup_{t \in [0,T]} |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \le L_T\, |x_1 - x_2|;$$

3) умову росту: $\forall T > 0\ \exists C_T > 0\ \forall t \le T$

$$|b(t, x)| \le C_T\,(1 + |x|).$$

Тоді для рівняння (2.1) існує єдиний розв'язок на $[0, +\infty)$, *причому існує множина* $\Omega' \subset \Omega,\ \mathbb{P}(\Omega') = 1$ *така, що* $\forall \omega \in \Omega'\ \forall T > 0\ \exists C = C(\omega, T)$ *така, що* $\forall\ 0 \le t_1 \le t_2 \le T \quad |X_{t_1} - X_{t_2}| \le C(\omega, T)|t_1 - t_2|^{\alpha}$ *для будь-якого* $0 \le \alpha < H$. *Тобто, траєкторії* X_t *з ймовірністю 1 належать класові* $Lip_{\alpha}[0, T],\ \forall T > 0,\ \forall \alpha \in [0, H)$.

Доведення. Розглянемо функцію $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ вигляду $h(Y_t, Z_t) = (Y_t - Y_0 + X_0)\mathbf{e}^{c(Z_t - Z_{t_0})}$, де $Z_t = B_t^H$, Y_0, X_0 - деякі дійсні числа. Зауважимо, що $h(Y_0, Z_{t_0}) = X_0$.

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.1) у вигляді $X_t = h(Y_t, Z_t) = h_t$, де $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ Y_{t_0} = Y_0 - \mathcal{F}_{t_0}$-вимірна випадкова величина.

Застосовуючи формулу Іто ([56]) до $h(Y_t, Z_t)$ отримуємо

$$dX_t = \frac{\partial h}{\partial Z}(Y_t, Z_t)\, dZ_t + \frac{\partial h}{\partial Y}(Y_t, Z_t) Y_t'\, dt +$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial t}(Y_t, Z_t)\, dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial Z^2}(Y_t, Z_t)\, d\,[Z, Z]_t =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial Z}(Y_t, Z_t)\, dZ_t + Y_t' \frac{\partial h}{\partial Y}(Y_t, Z_t)\, dt,$$

бо, згідно з [29], $[Z,Z]_t = 0$.

Якщо ми шукаємо X_t як розв'язок рівняння (2.1), то порівнюючи його з останньою рівністю, одержимо звичайне диференціальне рівняння для Y :

$$\begin{cases} Y_t' = (c_1(t))^{-1}\,(b(t, (Y_t - Y_0 + X_0)\, c_1(t))) =: f(Y_t, t) \\ Y_{t_0} = Y_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

де $c_1(t) = \mathbf{e}^{c(Z_t - Z_{t_0})}$.

Покладемо далі $L_1(T) := \max\limits_{t\in[0,T]} \frac{1}{c_1(t)} > 0$, $\quad L_2(T) := \max\limits_{t\in[0,T]} c_1(t) > 0$, $\; D_1 := C_T\, L_1(T)$, $\; D_2 = C_T$.

Тоді при $|Y_t - Y_0| \le \beta$; $\; |t - t_0| \le \alpha$:

$$M := \max_{t\in[0,T]} |f(Y_t,t)| \le (L_1(T) + (\beta + |x_0|))\, C_T \le D_1 + D_2(\beta + |x_0|)$$

і за теоремою Пікара розв'зок рівняння (2.2) існує на відрізку $[t_0, t_0 + l^{(0)}]$, де

$$l^{(0)} = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right) \ge \min\left(\alpha,\ \frac{\beta}{D_1 + D_2(\beta + |x_0|)}\right) =: l_0,$$

а значить, розв'язок рівняння (2.2) існує і на меншому відрізку $[t_0, t_0 + l_0]$.

Розв'язок у точці $t_0 + l_0$ можна оцінити так:

$$h_{t_0+l_0} \le |Y_{t_0+l_0} - Y_0 + X_0|\, L_2(T) \le (\beta + |X_0|)\, L_2(T).$$

Таким чином, ми одержали розв'язок рівняння (2.1) на відрізку $[t_0, t_0 + l_0]$. Зауважимо, що Y_t є неперервно диференційованою функцією на $[t_0, t_0 + l_0]$, а тоді з вигляду функції h випливає, що при кожному $\omega \in \mathbf{\Omega}$ вона є гельдерівською на $[t_0, t_0 + l_0]$, оскільки за формулою Іто

$$\mathbf{e}^{c\left(Z_t - Z_{t_0}\right)} = c\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{c\left(Z_s - Z_{t_0}\right)}\, dZ_s,$$

$Z \in Lip_\alpha[0,T]\ \forall T > 0,\ \forall\, 0 < \alpha < H$, а тоді за теоремою 22 [55], $\int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{c\left(Z_s - Z_{t_0}\right)}\, dZ_s \in Lip_\alpha[0,T]\ \ \forall T > 0,\ \forall\, 0 < \alpha < H$. Отже, траєкторії розв'язку X_t з ймовірністю 1 належать класові $Lip_\alpha[t_0, t_0 + l_0]\ \forall\, 0 < \alpha < H$.

Будемо продовжувати розв'язок h для $t \geq t_0 + l_0$. Крайнє праве значення розв'язку h на відрізку $[t_0, t_0 + l_0]$ буде новим початковим значенням $X_0^{(1)} \leq (\beta + |X_0|)\, L_2(T)$.

Тепер, при $|Y_t - Y_{t_0+l_0}| \leq \beta_1,\ \ |t - (t_0 + l_0)| \leq \alpha_1$, розв'язок рівняння (2.2) існує на відрізку $[t_0 + l_0, t_0 + l_0 + l_1]$, де

$$l_1 = \min\left(\alpha_1,\ \frac{\beta_1}{D_1 + D_2(\beta_1 + (\beta + |X_0|)L_2(T))}\right)$$

На n–му кроці процедури продовження розв'язку маємо:

$$l_n = \min\left(\alpha_n,\ \frac{\beta_n}{D_1 + D_2(\beta_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_{n-1-k}\, L_2^{k+1}(T) + |X_0| L_2(T))}\right),$$

$\alpha_0 := \alpha$, $\beta_0 := \beta$ і розв'язок рівняння (2.2) існує на відрізку $[t_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} l_i,\ t_0 + \sum\limits_{i=0}^{n} l_i]$.

Дослідимо тепер властивості виразу

$z_n =: \frac{\beta_n}{D_1 + D_2(\beta_n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k}\, L_2^{k+1}(T) + |X_0| L_2(T))},\ n \geq 0$:

a) при $|X_0| \leq 1$ можемо вибрати $\beta_k \equiv 1,\ k = \overline{0,n}$ і тоді

$$\frac{1}{D_1 + 2D_2 \frac{L_2^{n+1}(T) - 1}{L_2(T) - 1}} \leq z_n \leq \frac{1}{D_1 + D_2 \frac{L_2^{n+1}(T) - 1}{L_2(T) - 1}}.$$

b)при $|X_0| > 1$ можемо вибрати $\beta_k \equiv |X_0|\,,\ k = \overline{0,n}$ і тоді

$$\frac{1}{D_1 + 2D_2 \frac{L_2^{n+1}(T) - 1}{L_2(T) - 1}} \leq z_n = \frac{1}{\frac{D_1}{|x_0|} + D_2(1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} L_2^k(T))} \leq \frac{1}{D_2 \frac{L_2^{n+1}(T) - 1}{L_2(T) - 1}}.$$

Для обох випадків a) і b) покладемо $\alpha_n = \frac{1}{D_1+2D_2\frac{L_2^{n+1}(T)-1}{L_2(T)-1}}, \quad n \geq 0$, тобто $l_n = \min(a_n, z_n) = a_n \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} l_n = S$, і тоді

1) при $L_2(T) \leq 1$ ряд $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ розбігається, звідси і розбігається ряд $\sum\limits_{i\geq 0} l_i$, а тому існує скінченне число N процедури продовження розв'язку, таке, що $[t_0, T] \subset [t_0, t_0+\sum\limits_{i=0}^{N} l_i]$, тобто на відрізку $[t_0, T]$ існує розв'язок рівняння (2.2).

2) при $L_2(T) > 1$ ряд $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ збігається і більш того

$$\sum_{n\geq 0} z_n \geq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{D_1 + 2D_2\frac{L_2(T)^{n+1}-1}{L_2(T)-1}} =: S$$

Отже, ми фактично довели, що існує обмежений розв'язок h рівняння (2.1) на відрізку $[t_0, t_0 + \frac{1}{2}S]$ із скінченним значенням в точці $t_0 + \frac{1}{2}S$. Взявши це значення за наступне початкове, можемо аналогічно довести, розв'язок h існує на відрізку $[t_0+\frac{1}{2}S, t_0+S]$ зі скінченним значенням, адже крок $\frac{1}{2}S$ продовження розв'язку h не залежить від початкового значення. А значить, розв'язок h можна продовжити і на весь відрізок $[t_0, T]$. Оскільки $T > 0$ довільне, то ми отримуємо існування розв'язку рівняння (2.1) на $[0, \infty)$. Єдиність розв'язку випливає з теореми 7.1.1.([29]). В цій теоремі доведено, що будь-які два розв'язки співпадають на спільному інтервалі їх визначення. Оскільки процедура продовження не порушує потраєкторні властивості розв'язку, які досліджено на $[t_0, t_0 + l_0]$, то за індукцією ми одержуємо, що траєкторії розв'язку з ймовірністю 1 належать класові $Lip_\alpha[0, T]\ \forall T > 0,\ \forall\, 0 < \alpha < H$.

2.2. Стохастична теорема Фубіні для інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором

В цьому параграфі, при доведенні стохастичної теореми Фубіні, ми будемо користуватись властивістю гельдеровості (кускової гельдеровості) функції.

Позначимо простір функцій, гельдерових з показником α на відрізку $[a,b]$ через $\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}$ і розглянемо норму $\|x\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}} = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup\limits_{a\le t<t'\le b} \frac{|x(t)-x(t')|}{|t-t'|^{\alpha}}$. Також, для гельдерової функції x на півінтервалі $[a,b)$, для якої існує $\lim\limits_{t\to b-} x(t)$, визначимо норму $\|x\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b)}} = \sup\limits_{t\in[a,b)} |x(t)| + \sup\limits_{a\le t<t'<b} \frac{|x(t)-x(t')|}{|t-t'|^{\alpha}}$.

Ми будемо використовувати гельдерову неперервність траєкторій ДБР, тобто $B^H_t \in \mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}$ для $0<\alpha<H$ і $0<a<b$. Згідно зі статтями [55, 56] гельдерова неперервність B^H_t забезпечує існування інтегралу

$$\int\limits_a^b f(s)\,dB^H_s, \quad 0<a<b$$

з ймовірністю 1 для довільної вимірної функції $f\in\mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}$, де $\beta>1-H$. Згідно з [56] цей інтеграл є границею інтегральних сум Рімана-Стілтьєса за ймовірністю.

Означення 2.2.1. *Функцію $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ будемо називати кусково гельдеровою з показником α, $0<\alpha<1$ на відрізку $[T_1,T_2]\subset\mathbb{R}$, якщо існує скінченна кількість неперетинних півінтервалів $\{\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\dots.\mathcal{R}_N \mid \bigcup\limits_{i=1}^{N}\mathcal{R}_i \bigcup\{b\}=[T_1,T_2]\}$ і таких що, функція f гельдерова з показником α на кожному з них.*

Означення 2.2.2. *Нехай f – кусково гельдерова з показником α на* *відрізку* $[T_1, T_2]$. *Назвемо кусково гельдеровою нормою* f *число* $C_f^{\alpha}([T_1, T_2]) = \max\limits_{i=\overline{1,N}} \|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{\mathcal{R}_i}}$.

Нехай випадкові дійсні функції $f \in \mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}$, причому $\alpha + \beta > 1$. Тоді мають місце наступні факти:

(1) згідно з теоремою 4.2.1 [56], існує інтеграл Рімана-Стілтьєса

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) := \lim_{|\pi^{(l)}| \to 0} \sum_{k=1}^{l} f(x_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right];$$

(2) згідно з теоремою 21 [55], існують послідовності $\{f_n, g_n\} \in \mathcal{C}^1[a,b]$ такі, що $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}} \to 0$, $\|g_n - g\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}} \to 0$, $n \to \infty$.

Розглянемо послідовність поділів відрізка $[a, b]$:

$$\pi^{(l)} = \pi^{(l)}_{[a,b]} = \left\{a = t_l^0 < t_l^1 < ... < t_l^l = b\right\},$$

таку, що $\pi^{(l)} \subset \pi^{(l+1)}$ і $\left|\pi^{(l)}\right| \to 0$, $l \to \infty$.

Позначимо через $\triangle g(t_l^k) = g(t_l^k) - g(t_l^{k-1})$, $1 \le k \le l$.

Далі ми будемо використовувати деякі оцінки для інтегралів від гельдерових функцій, доведені в наступному твердженні.

Лема 2.2.1. *Нехай* $f \in \mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}$, $\alpha + \beta > 1$, $\{f_n, g_n\}$, $n \ge 1$ *– послідовності з* $\mathcal{C}^1[a,b]$ *такі, що* $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}} \to 0$, $\|g_n - g\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}} \to 0$, $n \to \infty$.

Тоді: 1) $\int\limits_a^b f(t)\, dg(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t) g_n'(t)\, dt$;

2) має місце оцінка

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\, dg(t)\right| \le C\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}} \|g\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}} \max\left\{(b-a)^{1+\varepsilon}, (b-a)^{\beta}\right\}$$

3) якщо $f(a) = 0$, *то*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t)\right| \le C\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}}\|g\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}}(b-a)^{1+\varepsilon},$$

$0 < \varepsilon < \alpha + \beta - 1$, $C > 0$ – *стала, незалежна від* f *і* g.

Доведення. 1) Згідно з вищевведеними позначеннями маємо

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t) - \int_a^b f_n(t)g_n'(t)\,dt\right| \le \left|\int_a^b f(t)\,dg(t) - \sum_{k=1}^{l} f(t_l^k) \vartriangle g(t_l^k)\right| +$$

$$+\left|\int_a^b f_n(t)g_n'(t)\,dt - \sum_{k=1}^{l} f_n(t_l^k) \vartriangle g_n(t_l^k)\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{l} f(t_l^k) \vartriangle g(t_l^k) - \sum_{k=1}^{l} f_n(t_l^k) \vartriangle g_n(t_l^k)\right|.$$

Згідно з (1), для заданого $\delta > 0$ можна вибрати розбиття $\pi^{(l)}$ так, щоб

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t) - \sum_{k=1}^{l} f(t_l^k) \vartriangle g(t_l^k)\right| < \delta \tag{2.3}$$

Далі, згідно з наслідком 20 [55],

$$\left|\int_a^b f_n(t)g_n'(t)\,dt - \sum_{k=1}^{l} f_n(t_l^k) \vartriangle g_n(t_l^k)\right| \le C|\pi^l|^{\varepsilon}\|f_n\|_{\alpha'}\|g_n\|_{\beta'}, \tag{2.4}$$

де $0 < \alpha' < \alpha,\ 0 < \beta' < \beta,\ \alpha'+\beta' = 1+\varepsilon$. Якщо $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}} \to 0,\ n \to \infty$, то тим більше, $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}^{\alpha'}_{[a,b]}} \to 0,\ n \to \infty$ для $0 < \alpha' < \alpha$, а тоді $\|f_n\|_{\mathcal{H}^{\alpha'}_{[a,b]}} \le C_1$, де $C_1 > 0$ не залежить від $n \ge 1$.

Аналогічно, $\|g_n\|_{\mathcal{H}^{\beta'}_{[a,b]}} \le C_2$. Звідси та з (2.4) маємо оцінку

$$\left|\int_a^b f_n(t)g_n'(t)\,dt - \sum_{k=1}^{l} f_n(t_l^k) \vartriangle g_n(t_l^k)\right| \le C_3|\pi^l|^{\varepsilon}. \tag{2.5}$$

Підберемо l таким чином, щоб $C_3|\pi^{(l)}|^{\varepsilon} < \delta$. Якщо тепер $\pi^{(l)}$ вибрати так, щоб задовольнити (2.3) і останню нерівність, то для такого фіксованого

l виберемо n так, щоб

$$\left|\sum_{k=1}^{l} f(t_l^k) \vartriangle g(t_l^k) - \sum_{k=1}^{l} f_n(t_l^k) \vartriangle g_n(t_l^k)\right| < \delta. \tag{2.6}$$

Це можливо, оскільки $\sup\limits_{t\in[a,b]} |g_n(t) - g(t)| \leq \|g_n - g\|_{\mathcal{H}^{\beta'}_{[a,b]}} \to 0$, аналогічно для f_n.

З (2.3)–(2.6) випливає доведення 1).

Твердження 3) випливає з 1) і леми 19 [55], згідно з якою оцінка 3) справджується для будь-яких $f \in \mathcal{C}^1_0[a,b],\ g \in \mathcal{C}^1[a,b]$.

Твердження 2) випливає з 1) і теореми 22 [55]. Справді, згідно з 3)

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t)\right| \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}}\|g\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}}(b-a)^{1+\varepsilon},$$

а тоді

$$\left|\int_a^b f(t)\,dg(t)\right| \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha}_{[a,b]}}\|g\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[a,b]}} \max\left\{(b-a)^{1+\varepsilon}, (b-a)^{\beta}\right\}.$$

Нехай f кусково гельдерова функція на $[a,b]$. В такому разі існує сума $\sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_{a_i}^{b_i} f(t)\,dB^H_t$. Наступний результат показує, що ця сума може бути представлена і як єдиний інтеграл.

Лема 2.2.2. *Нехай f кусково гельдерова з показником $\alpha > 1-H$ на відрізку $[a,b]$. Тоді існує інтеграл Рімана-Стілтьєса* $\int\limits_a^b f(s)\,dB^H_s =$ $= \sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_{a_i}^{b_i} f(s)\,dB^H_s$ *і для довільної послідовності поділів $[a,b]$ він може бути представлений наступним чином*

$$\int_a^b f(s)\,dB^H_s = \lim_{|\pi^{(l)}|\to 0}\sum_{k=1}^{l} f(s_l^k) \vartriangle B^H_{s_l^k}$$

Доведення. Оскільки f кусково гельдерова, то існує скінченна кількість неперетинних півінтервалів таких, що $\left\{[a_i,b_i)|\bigcup\limits_{i=1}^{N}[a_i,b_i)\bigcup\{b\}=[a,b]\right\}$ Покладемо $\pi_i^{(l)} := ([a_i,b_i)\bigcap\pi^{(l)})$, тоді $\left|\pi_i^{(l)})\right| \le \left|\pi^{(l)}\right|$. З обмеженості f і неперервності B^H легко випливає, що

$$\sum_{j:t_l^j\in\pi_i^{(l)}} f(t_l^j)\triangle B^H_{t_l^j} \to \int\limits_{a_i}^{b_i} f(t)\,dB_t^H$$

навіть, якщо $\pi^{(l)}$ не містить a_i та b_i. Тому

$$\sum_{k:t_l^k\in\pi^{(l)}} f(t_l^k)\triangle B^H_{t_l^k} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j:t_l^j\in\pi_i^{(l)}} f(t_l^j)\triangle B^H_{t_l^j} \to$$

$$\to \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{a_i}^{b_i} f(t)\,dB_t^H = \int\limits_{a}^{b} f(t)\,dB_t^H,\ \text{при}\ \left|\pi^{(l)}\right|\to 0.$$

Нехай $0<T_1<T_2$, $\Phi=\Phi(s,u,\omega):[T_1,T_2]^2\times\Omega\to\mathbb{R}$ – випадкова вимірна за сукупністю змінних функція.

Теорема 2.2.1. *Нехай існує множина $\Omega'\subset\mathbf{\Omega}$, така, що $\mathbb{P}(\Omega')=1$ і на кожному $\omega\in\Omega'$ функція $\Phi(s,u,\omega)$ задовольняє умови:*

1) $\forall\, s\in(T_1,T_2):\quad \Phi(s,\cdot,\omega)$ – кусково гельдерова по $u\in[T_1,T_2]$ з показником $\alpha_1>\frac{1}{2}$, причому її кусково гельдерова норма обмежена по s, тобто існує $C=C(\omega)$ таке, що $C^{\alpha}_{\Phi(s,\cdot,\omega)}([T_1,T_2])<C$

2) функція $\int\limits_{T_1}^{T_2}\Phi(s,u,\omega)\,dB_u^H$ – інтегровна за Ріманом на відрізку $[T_1,T_2]$

Тоді існують повторні інтеграли $I_1:=\int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\int\limits_{T_1}^{T_2}\Phi(s,u,\omega)\,dB_u^H\right)ds$ і $I_2:=\int\limits_{T_1}^{T_2}\left(\int\limits_{T_1}^{T_2}\Phi(s,u,\omega)\,ds\right)dB_u^H$ і м.н. справджується рівність $I_1=I_2$.

Доведення. Далі скрізь у доведенні будемо вважати що $\omega \in \Omega'$ фіксоване і будемо аргумент ω випускати. Згідно з умовою 1) і лемою 2.2.2 існує повторний інтеграл $\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s,u)\, dB_u^H$, тоді враховуючи умову 2) теореми, переконуємось в існуванні інтеграла I_1. Оскільки Φ кусково гельдерова, то, враховуючи нерівність

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} |\Phi(s,u_1) - \Phi(s,u_2)|\; ds \le c \int\limits_{T_1}^{T_2} |u_1 - u_2|^{\alpha_1}\, ds = c(T_2 - T_1)|u_1 - u_2|^{\alpha_1}$$

пересвідчуємося, що $\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s,u)\, ds$ кусково гельдерова по $u \in [T_1, T_2]$ з показником α_1. Далі, оскільки B_u^H гельдерова з показником $\beta > \frac{1}{2},\ \alpha_1 + \beta > 1$, то згідно з теоремою 4.2.1 роботи [56] існує інтеграл I_2. Інтеграл I_1 можна представити наступним чином:

$$I_1 = \lim_{|\pi^{(l)}| \to 0} \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s_l^k, u)\, dB_u^H \ \vartriangle s_l^k, \tag{2.7}$$

де $\pi^{(l)} = \{T_1 = s_l^0 < s_l^1 < .... < s_l^n = T_2\}$, $\ |\pi^{(l)}| \to 0$ при $n \to \infty$. Тепер, для кожної точки s_l^k поділу $\pi^{(l)}$ згідно з умовою 1) існує скінченна кількість точок $\{u_{1,k} < u_{2,k} < ... < u_{l(k),k}\}$ розриву гельдеровості функції $\Phi(\cdot, u)$. Далі $\left\{T_1 = u_{0,l} < u_{1,l} < u_{2,l} < ... < u_{L(l)-1,l} < u_{L(l),l} = T_2\right\} := \bigcup\limits_{k=1}^{n} \left\{\{u_{1,k} < u_{2,k} < ... < u_{l(k),k}\}\right\} \cup \{T_1, T_2\}$. Для кожного відрізку $[u_{i,l},\ u_{i+1,l}]$ розглянемо тепер розбиття $\left\{\pi_{i,l}^{(m_i)},\ m_i \ge 1,\ i = 0, L(l)-1\right\}$, $\pi_{i,l}^{(m_i)} := \{u_{i,l} = u_{i,l}^{(0)} < u_{i,l}^{(1)} < ... < u_{i,l}^{(m_i)} = u_{i+1,l}\}$, $\left|\pi_{i,l}^{(m_i)}\right| \to 0,\ m_i \to \infty$. Тоді $\pi_l^{(m)} := \bigcup\limits_{i=0}^{L(l)-1} \pi_{i,l}^{(m_i)} \bigcup \{T_1, T_2\} = \{T_1 = u_l^{(0)} < u_l^{(1)} < ... < u_l^{(m)} = T_2\}$ є поділом відрізка $[T_1, T_2]$ відносно змінної u з діаметром поділу $\left|\pi_l^{(m)}\right| :=$

$\max\limits_{0\le i\le l-1}\left|\pi_{i,l}^{(m_i)}\right|$, для якого $\left|\pi_{l}^{(m)}\right| \to 0, \quad m\to\infty$

Оцінимо тепер різницю інтегралів I_1 і I_2:

$$|I_1 - I_2| \le \left| I_1 - \sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}} \vartriangle s_l^k \right| + \tag{2.8}$$

$$+\left| I_2 - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}\Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \vartriangle s_l^k \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}} \right|$$

Далі оцінимо перший доданок правої частини нерівності (2.8)

$$\left| I_1 - \sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}} \vartriangle s_l^k \right| \le \left| I_1 - \sum_{k=0}^{l-1}\int_{T_1}^{T_2}\Phi(s_l^k, u)dB^H_u \vartriangle s_l^k \right| +$$

$$+\sum_{k=0}^{l-1}\left|\int_{T_1}^{T_2}\Phi(s_l^k, u)dB^H_u - \sum_{j=0}^{m-1}\Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}}\right| \vartriangle s_l^k.$$

Оскільки Φ кусково гельдерова, то згідно з лемою 2.2.2

$$\left|\int_{T_1}^{T_2}\Phi(s_l^k, u)dB^H_u - \sum_{j=0}^{m-1}\Phi(s_l^k, u_l^{(j)})\vartriangle B^H_{u_l^{(j)}}\right| \to 0, \ m\to\infty$$

Згідно з (2.7)

$$\left| I_1 - \sum_{k=0}^{l-1}\int_{T_1}^{T_2}\Phi(s_l^k, u)dB^H_u \vartriangle s_l^k \right| \to 0, \quad l\to\infty.$$

Для другого доданку правої частини нерівності (2.8) маємо

$$\left| I_2 - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}\Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \vartriangle s_l^k \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}} \right| \le \left| I_2 - \sum_{j=0}^{m-1}\int_{T_1}^{T_2}\Phi(s, u_l^{(j)})ds \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}} \right| +$$

$$+\left| \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}\int_{s_l^k}^{s_{k+1}}\Big(\Phi(s, u_l^{(j)}) - \Phi(s_l^k, u_l^{(j)})\Big)ds \vartriangle B^H_{u_l^{(j)}} \right| =$$

$$= \left| I_2 - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{T_1}^{T_2} \Phi(s, u_l^{(j)}) ds \ \triangle \ B^H_{u_l^{(j)}} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_l^k}^{s_{k+1}} \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\Phi(s, u_l^{(j)}) - \Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \Big) \ \triangle \ B^H_{u_l^{(j)}} \, ds \right| .$$

$$\left| \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_l^k}^{s_{k+1}} \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\Phi(s, u_l^{(j)}) - \Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \Big) \ \triangle \ B^H_{u_l^{(j)}} \, ds \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{L(l)-1} \int_{s_l^k}^{s_{k+1}} \sum_{j: u_l^{(j)} \in \pi_l^{(m)} \cap [u_{i,\,l},\, u_{i+1,\,l}]} \Big(\Phi(s, u_l^{(j)}) - \Phi(s_l^k, u_l^{(j)}) \Big) \ \triangle \ B^H_{u_l^{(j)}} \, ds \right| .$$

Оскільки функція $\Phi(s,u) - \Phi(s_l^k, u)$ гельдерова на кожному відрізку $[u_{i,\,l},\ u_{i+1,\,l}]$, то знову ж таки згідно з теоремою 4.2.1 роботи [56]

$$\lim_{\left|\pi_{i,\,l}^{(m)}\right| \to 0} \sum_{j:\, u_l^{(j)} \in \pi_{i,\,l}^{(m)}} \Big(\Phi(s,\ u_l^{(j)}) - \Phi(s_l^k,\ u_l^{(j)}) \Big) \ \triangle \ B^H_{u_l^{(j)}} =$$

$$= \int_{u_{i,\,l}}^{u_{i+1,\,l}} \big(\Phi(s,u) - \Phi(s_l^k, u) \big) \, dB_u^H .$$

Більше того, $\forall\, i = \overline{0,\ L(l)-1}$ послідовність

$$f_i^{(m)}(s, s_l^k) := \sum_{j:\, u_l^{(j)} \in \pi_{i,\,l}^{(m)}} \Big(\Phi(s,\ u_l^{(j)} - \Phi(s_l^k,\ u_l^{(j)}) \Big) \ \triangle \ B^H_{u_l^{(j)}}$$

має інтегровну мажоранту. Дійсно, використовуючи оцінки з наслідку 20 роботи [55], з леми 2.2.1 і враховуючи обмеженість гельдерових норм, маємо

$$\left| f_{i,l}^{(m)}(s, s_l^k) \right| \le \left| f_{i,l}^{(m)}(s, s_l^k) - \int_{u_{i,\,l}}^{u_{i+1,\,l}} \big(\Phi(s,u) - \Phi(s_l^k, u) \big) \, dB_u^H \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}}\big(\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\big)\,dB_u^H\right|\le c\left|\pi_{i,l}^{(m)}\right|^{\varepsilon}\left\|\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\right\|_{\mathcal{H}^H_{[u_{i,l},u_{i,l}]}}\times$$

$$\times\left\|B_u^H\right\|_{\mathcal{H}^{H'}_{[u_{i,l},u_{i,l}]}}+\left|\int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}}\big(\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\big)\,dB_u^H\right|\le$$

$$\le C+\left|\int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}}\big(\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\big)\,dB_u^H\right|,$$

$H'<H,\ \varepsilon:=H+H'-1>0$

Використовуючи оцінку 2) леми 2.2.1 і враховуючи обмеженість гельдерових норм функції Φ, переконуємося, що $\left|\int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}}\big(\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\big)\,dB_u^H\right|$ обмежена по s. А значить, ми можемо застосувати теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла і тоді $\forall\, i=\overline{0,\ L(l)-1}$ дістанемо інтеграл Лебега:

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{s_l^k}^{s_l^{k+1}} f_{i,l}^{(m)}(s,s_l^k)\,ds=\int\limits_{s_l^k}^{s_l^{k+1}}\int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}}\big(\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\big)\,dB_u^H\,ds,$$

де

$$\int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}}\big(\Phi(s,u)-\Phi(s_l^k,u)\big)\,dB_u^H$$

вимірна і обмежена по s.

Тому

$$\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i=0}^{L(l)-1}\int\limits_{s_l^k}^{s_l^{k+1}}\sum_{j:u_l^{(j)}\in\pi_{i,l}^{(m)}}\Big(\Phi(s,u_l^{(j)})-\Phi(s_l^k,u_l^{(j)})\Big)\,\triangle B^H_{u_l^{(j)}}\,ds\to$$

$$\to \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{L(l)-1} \int\limits_{s_l^k}^{s_l^{k+1}} \int\limits_{u_{i,l}}^{u_{i+1,l}} \big(\Phi(s,u) - \Phi(s_l^k,u)\big)\, dB_u^H\, ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{s_l^k}^{s_l^{k+1}} \int\limits_{T_1}^{T_2} \big(\Phi(s,u) - \Phi(s_l^k,u)\big)\, dB_u^H\, ds =$$

$$= \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s,u) dB_u^H \right) ds - \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s_l^k,u) dB_u^H \triangle s_l^k,$$

при $m \to \infty$.

Тепер, згідно з умовою 2) теореми, інтеграл $\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s,u) dB_u^H$ є інтегрованою за Ріманом функцією по s, і тоді можемо використати 2.7, щоб отримати:

$$\left| \int\limits_{T_1}^{T_2} \left(\int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s,u) dB_u^H \right) ds - \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s_l^k,u) dB_u^H \triangle s_l^k \right| \to 0, \quad \text{при } l \to \infty$$

Використовуючи лему 2.2.2 отримуємо

$$\left| I_2 - \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{T_1}^{T_2} \Phi(s, u_l^{(j)}) ds \triangle B^H_{u_l^{(j)}} \right| \to 0, \text{ при } m \to \infty.$$

Звідси отримуємо твердження теореми.

Зауваження 2.2.1. *Доведення теореми 2.2.1 не спирається на властивості адаптованості функції* Φ *відносно потоку* $\mathcal{F}_t$. *Воно годиться не тільки для процесу* B_t^H, *але і для будь-якого випадкового процесу, що задовольняє умови гельдеровості з показником* $\alpha_2 > \frac{1}{2}$.

Розглянемо тепер один приклад застосування стохастичної теореми Фубіні. Припустимо, що стохастичний дробово-дифузійний процес x_t має вигляд

$$x_t = B_t^H - \int\limits_0^t I(s)\,ds, \tag{2.9}$$

де $I(t) = \int\limits_0^t f(s)\,dB_s^H$ є стохастичний інтеграл відносно ДБР. Випадок коли

$$x_t = \int\limits_0^t a(s,x_s)\,ds + \int\limits_0^t b(s,x_s)\,dB_t^H$$

з відповідними функціями a і b, можна, в деякому сенсі, звести до процесу (2.9). Згідно з теоремо Гірсанова з [40], позначимо

$$B_1 = \mathrm{B}(3/2-H, 3/2-H),\ B_2 = \mathrm{B}(H+1/2, 3/2-H),$$

$$C_H = \left(\frac{2H\,\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\,\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}, C_2 = \frac{C_H}{2H(2-2H)^{1/2}},$$

де Γ та B є Ейлерові інтеграли, і розглянемо ядро $K(t,s) = C_1 s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H}$.

Припустимо, також, що функція $f(t)$ $\mathcal{F}_t$-вимірна і існує представлення

$$\int\limits_0^t K(t,s)I(s)\,ds = \int\limits_0^t \delta_s\,ds,$$

де $\int\limits_0^t |\delta_s|\,ds < \infty$ м.н., $t > 0$.

Тоді процес (2.9) є ДБР відносно ймовірнісної міри $\mathbb{Q}$, що $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\ |_{\mathcal{F}_t}=$ $\exp\left\{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t\right\}$, де $Z_t = C_2^{-1}\int\limits_0^t s^{H-1/2}\delta_s\,dW_s,\ \{W_s, \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ є процесом Вінера.

А значить, ми повинні диференціювати інтеграл $\int\limits_0^t K(t,s)\int\limits_0^s f(u)\,dB_u^H\,ds$ і найзручніше робити це тоді, коли ми застосовуємо до цього інтеграла стохастичну теорему Фубіні. Подібний випадок, коли $f(u)$ детермінована, детально був розглянутий у розділі 1 даної дисертації.

Наступний результат представляє частковий випадок стохастичної теореми Фубіні, який буде використаний далі в роботі.

Покладемо далі для $t > 0$ $J_1 := \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \left(\int_0^s \phi(u)\, dB_u^H\right) ds$, $J_2 := \int_0^t \phi(u) \left(\int_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\right) dB_u^H$

Лема 2.2.3. *Нехай вимірна випадкова функція ϕ гельдерова на $[0,t]$ з показником $\alpha_3 > \frac{1}{2}$. Тоді м.н. виконується рівність $J_1 = J_2$.*

Доведення. Представимо J_1 і J_2 наступним чином

$$J_1 = \int_0^t \left(\int_0^t \Phi(s,u)\, dB_u^H\right) ds,\ J_1 = \int_0^t \left(\int_0^t \Phi(s,u)\, ds\right) dB_u^H,$$

де $\Phi(s,u) = (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \phi(u)\, \mathbb{I}\{u \in [0,s]\}$. У даному випадку функція Φ задовольняє умови 1), 2) теореми 2.2.1 при $T_1 = \delta$ і $T_2 = t - \delta$ для $0 < \delta < t/2$. Зокрема, $\Phi(s,\cdot)$ кусково гельдерова на $[\delta, t-\delta]$ з показником α_3 і однією точкою $u = s$ гельдерової розривності, для довільного $s \in [\delta, t-\delta]$.

Тому м.н. справджується рівність

$$\int_\delta^{t-\delta} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \int_\delta^s \phi(u)\, dB_u^H\, ds = \int_\delta^{t-\delta} \phi(u) \int_u^{t-\delta} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H.$$

Останню рівність можна переписати так $J_1 - R_1 = J_2 - R_2$, де

$$R_1 = \int_0^\delta (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \int_0^s \phi(u)\, dB_u^H\, ds + \int_\delta^{t-\delta} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \times$$

$$\times \int_0^\delta \phi(u)\, dB_u^H\, ds + \int_{t-\delta}^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \int_0^s \phi(u)\, dB_u^H\, ds;$$

$$R_2 = \int\limits_0^{\delta} \phi(u) \int\limits_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \, ds \, dB_u^H + \int\limits_{\delta}^{t-\delta} \phi(u) \times$$

$$\times \int\limits_{t-\delta}^{t} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \, ds \, dB_u^H + \int\limits_{t-\delta}^{t} \phi(u) \int\limits_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \, ds \, dB_u^H.$$

Оскільки B_u^H гельдерова з показником $H - \varepsilon > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$, функція ϕ гельдерова з показником $\alpha_3 > \frac{1}{2}$ за умовою леми, то, згідно з теоремою 22 роботи [55] $\exists K > 0 : \left| \int\limits_0^s \phi(u) \, dB_u^H \right| \leq K s^{H-\varepsilon}$. А тому:

1) для

$$R_{11} := \int\limits_0^{\delta} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \phi(u) \, dB_u^H \, ds$$

маємо оцінку

$$|R_{11}| \leq K \int\limits_0^{\delta} s^{\frac{1}{2}-\varepsilon} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} \, ds \leq K \, \delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \int\limits_0^{\delta} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} \, ds \leq$$

$$\leq K \delta^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{t^{\frac{3}{2}-H} - (t-\delta)^{\frac{3}{2}-H}}{\frac{3}{2} - H} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

2) для $R_{12} := \int\limits_{\delta}^{t-\delta} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^{\delta} \phi(u) \, dB_u^H \, ds$ справджується така оцінка

$$|R_{12}| \leq K \delta^{H-\varepsilon} \, \delta^{2-2H} \, (t - 2\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

3) для $R_{13} := \int\limits_{t-\delta}^{t} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \phi(u) \, dB_u^H \, ds$ справджується оцінка

$$|R_{13}| \leq K \, t^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \int\limits_{t-\delta}^{t} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} \, ds = K t^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{\delta^{\frac{3}{2}-H}}{\frac{3}{2} - H} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$$

Слід зауважити, що функція $\int\limits_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} \, ds$ гельдерова з показником $\frac{3}{2} - H$ на $[0, \delta]$ і на $[t - \delta, t]$, де $0 < \delta < t$

Справді

а) для $\{u,v\}\subset[0,\delta]$

$$\left|\int\limits_u^v (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\right| \le$$

$$\le (t-\delta)^{1/2-H}\left|v^{3/2-H}-u^{3/2-H}\right| \le (t-\delta)^{1/2-H}|v-u|^{3/2-H}$$

б) для $\{u,v\}\subset[t-\delta,t]$

$$\left|\int\limits_u^v (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\right| \le$$

$$\le (t-\delta)^{1/2-H}\left|(t-u)^{3/2-H}-(t-v)^{3/2-H}\right| \le (t-\delta)^{1/2-H}|v-u|^{3/2-H}$$

Тоді функція $\phi(u)\int\limits_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, ds$ гельдерова на $[0,\delta]$ і на $[t-\delta,t]$ з показником $\alpha_4 := \min\{\alpha_3, 3/2-H\} > 1/2$.

Тепер, використовуючи теорему 22 роботи [55], одержуємо оцінки

$$|R_{21}| := \left|\int\limits_0^\delta \phi(u)\int\limits_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H\right| \le K\delta^{H-\varepsilon}$$

$$|R_{22}| := \left|\int\limits_\delta^{t-\delta} \phi(u)\int\limits_{t-\delta}^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H\right| \le K(t-2\delta)^{H-\varepsilon}(t-\delta)^{1/2-H}\frac{\delta^{\frac{3}{2}-H}}{\frac{3}{2}-H}$$

$$|R_{23}| := \left|\int\limits_{t-\delta}^t \phi(u)\int\limits_u^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, s^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H\right| \le K\delta^{H-\varepsilon}$$

Переходячи до границі, при $\delta\to 0$ дістаємо рівність $J_1 = J_2$. Лему доведено.

2.3. Диференційовність стохастичних інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором

Нехай $I(t) := \int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \alpha(u,\omega)\, dB_u^H\, ds$, де $\alpha = \alpha(u,\omega) : \mathbb{R} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ випадкова гельдерова на $[0,t]$ функція з показником $\beta > \frac{1}{2}$. Слід зауважити, що згідно з лемою 2.2.3 параграфу 2.2, такий інтеграл існує для всіх $\omega \in \mathbf{\Omega}'$, $\mathbb{P}(\mathbf{\Omega}') = 1$, більше того, існує повторний інтеграл $J(t) := \int\limits_0^t \alpha(u,\omega) \int\limits_u^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H$, і справджується рівність $I(t) = J(t), t > 0$.

Лема 2.3.1. *Нехай $\alpha = \alpha(u,\omega) : \mathbb{R} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ випадкова гельдерова на $[0,t]$ функція з показником $\beta > \frac{1}{2}$. Тоді $\forall t > 0$ $I(t)$ допускає зображення*

$$I(t) = t^{2-2H} \int\limits_0^t \delta_s\, ds,$$

де

$$\delta_s = s^{2H-3} \int\limits_0^s u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H} \alpha(u,\omega)\, dB_u^H$$

м.н. належить класові $\mathcal{L}_1([0,t])$, тобто $\int\limits_0^t |\delta_s|\, ds < \infty$ м.н.

Доведення Далі скрізь у доведенні вважаємо що $\omega \in \mathbf{\Omega}'$, $\mathbb{P}\{\omega \in \mathbf{\Omega}'\} = 1$, фіксоване, а значить, будемо випускати аргумент ω. Послідовно замінюючи змінні в інтегралі $J(t)$, перетворимо рівність $I(t) = J(t)$ до вигляду

$$I(t) = \int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^s \alpha(u)\, dB_u^H\, ds = J(t) =$$

$$= \int_0^t \int_u^t \alpha(u) s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\,ds\,dB_u^H = t^{2-2H} \int_0^t \int_{\frac{u}{t}}^1 \alpha(u) s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H}\,ds\,dB_u^H =$$

$$= t^{2-2H} \int_0^t \int_u^t \alpha(u) \frac{u}{s^2} \left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{2}-H} \left(1-\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{2}-H} ds\,dB_u^H =$$

$$= t^{2-2H} \int_0^t \int_u^t s^{2H-3}(s-u)^{\frac{1}{2}-H} u^{\frac{3}{2}-H} \alpha(u)\,ds\,dB_u^H =: t^{2-2H} M(t)$$

Розглянемо тепер функцію

$$N(t) := \int_0^t s^{2H-3} \int_0^s (s-u)^{\frac{1}{2}-H} u^{\frac{3}{2}-H} \alpha(u)\,dB_u^H\,ds.$$

Доведення існування її спирається на наступні результати.

1) Згідно з лемою 2.1 з [39] гельдерова функція $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ з показником $\beta \in (0,1)$ при $\gamma \in (-\beta, -\beta+1)$, $T > 0$ і $f(0) = 0$ задовольняє рівність

$$\int_0^t (t-u)^\gamma\,df(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\varepsilon^\gamma \left(f(t-\varepsilon) - f(t)\right) +$$

$$+ t^\gamma f(t) + \gamma \int_0^{t-\varepsilon} \left(f(u) - f(t)\right)(t-u)^{\gamma-1}\,du \Big). \tag{2.10}$$

2) Згідно з лемою 2.2.1 цієї дисертації для гельдерових функцій $f \in \mathcal{H}^\alpha_{[a,b]}$, $g \in \mathcal{H}^\beta_{[a,b]}$, $\alpha + \beta > 1$, справедлива оцінка

$$\left| \int_a^b f(t)\,dg(t) \right| \le C \|f\|_{\mathcal{H}^\alpha_{[a,b]}} \|g\|_{\mathcal{H}^\beta_{[a,b]}} \max\left\{(b-a)^{1+\varepsilon}, (b-a)^\beta\right\}. \tag{2.11}$$

Використовуючи тепер (2.10) і (2.11) при $t > s_2 > s_1 > 0$ запишемо оцінки

$$\left|\int\limits_{s_1}^{s_2}\alpha(z)(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\,dB_z^H\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varepsilon^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_{s_2-\varepsilon}^{s_2}\alpha(v)\,dB_v^H+\right.\right.$$

$$+(s_2-s_1)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_{s_1}^{s_2}\alpha(z)\,dB_z^H+\left(H-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{s_1}^{s_2-\varepsilon}(s_2-z)^{-\frac{1}{2}-H}\times$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{z}^{s_2}\alpha(v)\,dB_v^H\,dz\right]\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0}C\|\alpha\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[0,t]}}\|B^H\|_{\mathcal{H}^{H}_{[0,t]}}\left\{\varepsilon^{\frac{1}{2}}+(s_2-s_1)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(H-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{s_1}^{s_2-\varepsilon}(s_2-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz\right\}\le K_1(s_2-s_1)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.12)$$

де $K_1 := 2CH\|\alpha\|_{\mathcal{H}^{\beta}_{[0,t]}}\|B^H\|_{\mathcal{H}^{H}_{[0,t]}}$.

Далі зробимо наступні перетворення

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}(s_2-u)^{\frac{1}{2}-H}u^{\frac{3}{2}-H}\alpha(u)\,dB_u^H = \int\limits_{s_1}^{s_2}u^{\frac{3}{2}-H}d\left[\int\limits_{0}^{u}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H\right]=$$

$$=s_2^{\frac{3}{2}-H}\int\limits_{0}^{s_2}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H - s_1^{\frac{3}{2}-H}\int\limits_{0}^{s_1}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H-$$

$$-\left(\frac{3}{2}-H\right)\int\limits_{s_1}^{s_2}u^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_{0}^{u}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H\,du =: L(s_1,s_2).$$

Оцінка

$$|L(s_1,s_2)|\le\left|s_2^{\frac{3}{2}-H}-s_1^{\frac{3}{2}-H}\right|\left|\int\limits_{0}^{s_2}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H\right|+s_1^{\frac{3}{2}-H}\times$$

$$\times\left|\int\limits_{s_1}^{s_2}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H\right|+\left(\frac{3}{2}-H\right)\int\limits_{s_1}^{s_2}u^{\frac{1}{2}-H}\left|\int\limits_{0}^{u}(s_2-z)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(z)\,dB_z^H\right|\,du\le$$

$$\leq K_1 \left| s_2^{\frac{3}{2}-H} - s_1^{\frac{3}{2}-H} \right| s_2^{\frac{1}{2}} + K_1 s_1^{\frac{3}{2}-H}(s_2-s_1)^{\frac{1}{2}} + (3-2H)K_1 \int\limits_{s_1}^{s_2} u^{\frac{1}{2}-H} s_2^{\frac{1}{2}}\, du =$$

$$\leq K_1 s_2^{\frac{3}{2}-H}(s_2-s_1)^{\frac{1}{2}} + 3K_1 \left(s_2-s_1\right)^{\frac{3}{2}-H} s_2^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

показує, що $|L(0,s)| \leq 4K_1 s^{2-H}$. Отже,

Тепер зрозуміло, що

$$|N(t)| \leq \int\limits_0^s s^{2H-3}|L(0,s)|\, ds \leq \frac{4K_1}{H} t^H < \infty.$$

Розглянемо тепер функцію

$$N_\varepsilon(t) := \int\limits_0^t s^{2H-3}\mathbb{I}\{s \in [\varepsilon,t]\} \int\limits_0^{s-\varepsilon} u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u)\, dB_u^H\, ds$$

Очевидно, $\forall \varepsilon > 0$ функція

$$\varphi_\varepsilon(s,u) = \mathbb{I}\{u \leq s-\varepsilon\}\mathbb{I}\{s \in [\varepsilon,t]\} s^{2H-3} u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u)$$

кусково гельдеровf по u з показником $\beta_1 > \frac{1}{2}$ ($u = s-\varepsilon$ – точка гельдерової розривності, а функція

$$\int\limits_0^t \varphi_\varepsilon(s,u)\, dB_u^H = s^{2H-3}\mathbb{I}\{s \in [\varepsilon,t]\} \int\limits_0^{s-\varepsilon} u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u)\, dB_u^H$$

змінної s інтегровна за Ріманом на $[0,t]$.

Отже, $\varphi_\varepsilon(s,u)$ задовольняє умови стохастичної теореми Фубіні 2.2.1, а значить, існують і дорівнюють один одному інтеграли

$$N_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t s^{2H-3}\mathbb{I}\{s \in [\varepsilon,t]\} \int\limits_0^{s-\varepsilon} u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u)\, dB_u^H\, ds$$

$$M_\varepsilon(t) := \int\limits_0^{t-\varepsilon} u^{\frac{3}{2}-H}\alpha(u) \int\limits_{u+\varepsilon}^{t} s^{2H-3}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H.$$

Для першого інтеграла, з (2.13) маємо

$$|N(t)-N_\varepsilon(t)| \le \left| \int\limits_\varepsilon^t s^{2H-3} \int\limits_{s-\varepsilon}^{s} u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u)\, dB_u^H\, ds \right| +$$

$$+\left| \int\limits_0^\varepsilon s^{2H-3} \int\limits_0^s u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\alpha(u)\, dB_u^H\, ds \right| \le$$

$$\le \int\limits_\varepsilon^t s^{2H-3}\left[K_1 s^{\frac{3}{2}-H}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 3K_1 s^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{3}{2}-H}\right] ds + 4K_1 \int\limits_0^\varepsilon s^{2H-3}s^{2-H}\, ds =$$

$$= \frac{K_1}{H-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}(t^{H-\frac{1}{2}} - \varepsilon^{H-\frac{1}{2}}) + \frac{3K_1}{|2H-\frac{3}{2}|}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}-H}t^{2H-\frac{3}{2}} - \varepsilon^H\right) + \frac{4K_1}{H}\varepsilon^H \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Для другого інтеграла, використовуючи інтегральне перетворення (ii) Леми 2.2 з [39], виконаємо аналогічне оцінювання:

$$|M(t)-M_\varepsilon(t)| \le \left| \int\limits_0^{t-\varepsilon} \alpha(u) u^{\frac{3}{2}-H} \int\limits_u^{u+\varepsilon} s^{2H-3}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H \right| +$$

$$+\left| \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \alpha(u) u^{\frac{3}{2}-H} \int\limits_u^{t} s^{2H-3}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{t-\varepsilon} \alpha(u) u^{\frac{3}{2}-H} \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{u+\varepsilon}} s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H \right| +$$

$$+\left| \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \alpha(u) u^{\frac{3}{2}-H} \int\limits_0^{1-\frac{u}{t}} s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H}\, ds\, dB_u^H \right| =: A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon).$$

Далі згідно із стохастичною теоремою Фубіні 2.2.1 маємо

$$A_1(\varepsilon) = \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{t}} s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^{t-\varepsilon} \alpha(u)\, dB_u^H\, ds + \int\limits_{\frac{\varepsilon}{t}}^{1} s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^{\varepsilon\frac{1-s}{s}} \alpha(u)\, dB_u^H\, ds$$

$$A_2(\varepsilon) = \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{t}} s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t(1-s)} \alpha(u)\, dB_u^H\, ds.$$

Тепер

$$|A_1(\varepsilon)| \le \frac{K_1}{2H} t^{2H-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} \varepsilon^{\frac{3}{2}-H} + \frac{K_1}{2H}\varepsilon^H \int\limits_{\frac{\varepsilon}{t}}^{1} (1-s)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}-2H}\, ds \le$$

$$\le \frac{K_1}{2H} t^{2H-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} \varepsilon^{\frac{3}{2}-H} + \frac{K_1}{2H} t^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{H-\frac{1}{2}} B\left(\frac{3}{2}, 2-2H\right) \to 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

$$|A_2(\varepsilon)| \le \frac{K_1}{2H} \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{t}} s^{\frac{1}{2}-H}(1-s)^{\frac{1}{2}-H}(\varepsilon - ts)^H\, ds \le$$

$$\le \frac{K_1}{2H} t^H \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} \int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{t}} s^{\frac{1}{2}-H} \left(\frac{\varepsilon}{t} - s\right)^H ds \le$$

$$\le \frac{K_1}{2H} t^{H-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{2}-H} \varepsilon^{\frac{3}{2}} B\left(H+1, \frac{3}{2} - H\right) \to 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

Із цих оцінок і рівності $N_\varepsilon(t) = M_\varepsilon(t)$ випливає рівність $N(t) = M(t)$, а з неї і твердження леми.

2.4. Заміна міри для напівлінійних СДР, що представляють "чисту дробову" модель ціни акції

Розглянемо рівняння (2.1) і будемо вважати, що $t_0 = 0$, функція $b(t,x)$ задовольняє умови теореми 2.1.1 параграфа 2.1 і може бути представлена як $b(t,x) = e(t,x)x$, де $e \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Далі використовуємо позначення: $B = \mathrm{B}(H+1/2, 3/2-H)$, $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ - бета функція, $B_1 = \mathrm{B}(H-1/2, 3/2-H)$, $C_1 = (2HB)^{-1}$, $C_H = \left(\frac{2H\,\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\,\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$, $C_2 = \frac{C_H}{2H(2-2H)^{1/2}}$, $C_0 = \frac{C_1}{C_2}$, $K(t,s) = C_1 s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H}\mathbb{I}\{s \in (0,t)\}$.

Доведемо допоміжний результат, який використаємо далі для заміни міри в рівнянні (2.1).

Позначимо $\mu(u) := \frac{r - e(u,X_u)}{c}$, $r \in \mathbb{R}$.

Лема 2.4.1. *Нехай функція $e(t,x)$ задовольняє наступні умови:*

1) $\forall T > 0\ \ \exists C_T > 0,\ \ \forall u \le T,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &|e(u,x)| \le C_T(1+|x|),\ |e'_t(u,x)| \le C_T(1+|x|), \\ &|e'_x(u,x)| \le C_T(1+|x|),\ |e''_{xx}(u,x)| \le C_T(1+|x|); \end{aligned} \tag{2.14}$$

2)

$$\begin{aligned} &\forall T > 0\ \exists L_T > 0\ \forall t \in [0,T], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ &\sup_{t \in [0,T]} |e'_x(t,x_1) - e'_x(t,x_2)| \le L_T\,|x_1 - x_2|. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Тоді

1) $\int\limits_0^t K(t,s)|\mu(s)|\,ds < \infty$ *м.н.*,

2)*існує представлення* $\int\limits_0^t K(t,s)\mu(s)\,ds = \int\limits_0^t \varphi_s\,ds, \qquad (2.16)$

де $\int\limits_0^t |\varphi_s|\,ds < \infty$ *м.н.*

Доведення Очевидно,

$$|I(t)| := \left|\int\limits_0^t K(t,s)\frac{r-e(s,X_s)}{c}\,ds\right| =$$

$$= \left|\frac{r}{c}C_1 t^{2-2H}B_1 - \frac{C_1}{c}\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}e(s,X_s)\,ds\right| < \infty.$$

За формулою Іто ([56])

$$e(s,X_s) = e(0,0) + \int\limits_0^s e'_t(u,X_u)\,du + \int\limits_0^s e'_x(u,X_u)\,dX_u + \frac{1}{2}\int\limits_0^s e''_{xx}(u,X_u)\,d[X]_u =$$

$$= e(0,0) + \int\limits_0^s e'_t(u,X_u)\,du + \int\limits_0^s e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\,du + c\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)X_u\,dB_u^H.$$

Звідси

$$I(t) = (r-e(0,0))\,\frac{C_1B_1}{c}t^{2-2H} - \frac{C_1}{c}\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_t(u,X_u)\,du\,ds -$$

$$-\frac{C_1}{c}\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\,du\,ds - C_1\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}\times$$

$$\times(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)X_u\,dB_u^H\,ds$$

Враховуючи умови росту (2.14) на функції e, e'_t, e'_x, e''_{xx}, переконуємося, що функції

$$s^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_t(u,X_u)\,du=\int\limits_0^s u^{\frac{1}{2}-H}e'_t(u,X_u)\,du+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-H\right)\int\limits_0^s u^{-\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^u e'_t(v,X_v)\,dv\,du$$

і

$$s^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\,du=\int\limits_0^s u^{-\frac{1}{2}-H}e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\,du+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-H\right)\int\limits_0^s u^{-\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^u e'_x(v,X_v)e(v,X_v)X_v\,dv\,du$$

належать класові $\mathcal{AC}[0,T]$. А значить, за лемою 2.2 ([50]) для цих функцій м.с. (майже скрізь) за мірою Лебега існують дробові похідні порядку $H-\frac{1}{2}$, тобто похідні дробового інтеграла

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_t(u,X_u)\,du\,ds=\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}e'_t(s,X_s)\,ds+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-H\right)\int\limits_0^t s^{-\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_t(u,X_u)\,du\,ds \qquad (2.17)$$

і

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\,du\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}e'_x(s,X_s)e(s,X_s)X_s\,ds+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-H\right)\int\limits_0^t s^{-\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\,du\,ds. \qquad (2.18)$$

Враховуючи умову (2.15), переконуємося, що функція $e'_x(u,X_u)X_u$ гельдерова по u на $[0,T]$ з будь-яким показником $\beta\in\left(\frac{1}{2},H\right)$. Звідси, згідно з лемою 2.2.3 цієї роботи, м.н. справджується рівність

$$\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s e'_x(u,X_u)X_u\,dB_u^H\,ds=$$

$$=t^{2-2H}\int\limits_0^t s^{2H-3}\int\limits_0^s u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}e'_x(u,X_u)X_u\,dB_u^H\,ds. \qquad (2.19)$$

Тепер, використовуючи рівності (2.17)-(2.19), можемо знайти функцію φ_t.

$$\frac{d}{dt}I(t)=\varphi_t=(2-2H)(r-e(0,0))\frac{C_1B_1}{c}t^{1-2H}-$$

$$-\frac{C_1}{c}\left(\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\left(e'_t(s,X_s)+e'_x(s,X_s)e(s,X_s)X_s\right)ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^t s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}\int\limits_0^s\left(e'_t(u,X_u)+e'_x(u,X_u)e(u,X_u)X_u\right)du\,ds\right)-$$

$$-(2-2H)C_1t^{1-2H}\int\limits_0^t s^{2H-3}\int\limits_0^s u^{\frac{3}{2}-H}(s-u)^{\frac{1}{2}-H}e'_x(u,X_u)X_u\,dB_u^H\,ds-$$

$$-C_1t^{-1}\int\limits_0^t u^{\frac{3}{2}-H}(t-u)^{\frac{1}{2}-H}e'_x(u,X_u)X_u\,dB_u^H. \qquad (2.20)$$

Зауваження 2.4.1. *З формули (2.20) видно, що функція φ_s м.н. неперервна. Тому $\forall t>0$ м.н. існує інтеграл $\int\limits_0^t s^{2H-1}\varphi_s^2\,ds$, а значить, випадко-*

вий процес $Z_t := \frac{1}{C_2}\int\limits_0^t s^{H-\frac{1}{2}}\varphi_s\,dW_s$ *квадратично інтегровний мартингал з квадратичною характеристикою* $\langle Z\rangle_t = \frac{1}{C_2^2}\int\limits_0^t s^{2H-1}\varphi_s^2\,ds.$

Замінимо тепер у рівнянні (2.1) ймовірнісну міру $\mathbb{P}$ на іншу – $\mathbb{Q}$, таку що $\mathbb{Q}_T \ll \mathbb{P}_T$, де $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T}$, відносно якої знос буде мати вигляд $rX_t\,dt$, тобто рівняння (2.1) стане лінійним.

Зауваження 2.4.2. *Якщо* $\mathbb{Q}$ *така, що* $\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}_T} = \exp\left\{Z_T - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right\}$, *то процес* $\widehat{B}_t^H = B_t^H - \int\limits_0^t \mu(u)\,du$ *є ДБР відносно міри* $\mathbb{Q}$ *(дивись теорему 4 з [40], також [41], [42]).*

Теорема 2.4.1. *Нехай виконуються умови леми 2.4.1 і, крім того,*

$$\mathbb{E}\exp\left\{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t\right\} = 1.$$

Тоді рівняння (2.1) відносно міри $\mathbb{Q}$ *допускає наступне представлення*

$$dX_t = rX_t\,dt + cX_t\,d\widehat{B}_t^H.$$

Доведення Твердження теореми випливає з леми 2.4.1 і зауважень 2.4.1 – 2.4.2.

2.5. Дробове рівняння Бюргерса та умови фінансової рівноваги ринку

Означення 2.5.1. *Фінансовий ринок основних цінних паперів, ціна акцій якого описується рівнянням (2.1), перебуває у фінансовій рівновазі на* $[0, T]$, *якщо ядро* $\varphi_t t^{H-1/2}$ *і відношення правдоподібності* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ *є функціями від* t *і* W_t, *і не залежать від траєкторії* W_s, $s < t$.

Це означення узагальнює звичайне означення фінансової рівноваги ([34], [57]), у якому вимагається траєкторна незалежність $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{F}_t}$ від $W_s, \ \ s < t$, а ядро просто дорівнює $e(t, W_t)$.

Фінансовий ринок, ціна акцій якого описується рівнянням (2.1), допускає арбітраж, але цей ринок може перебувати у фінансовій рівновазі.

Означення 2.5.2. *Кажемо, що функція $f(t,x)$ задовольняє дробове рівняння Бюргерса з показником H, якщо функція $g(t,x) := t^{H-1/2}f(t,x)$ задовольняє звичайне рівняння Бюргерса*

$$-g(s,x)g_2'(s,x) = g_1'(s,x) + \frac{1}{2}g_{22}''(s,x)$$

Очевидно, дробове рівняння Бюргерса має вигляд

$$-s^{H-1/2}p(s,x)p_2'(s,x) = (H-1/2)s^{-1}p(s,x) + p_1'(s,x) + \frac{1}{2}p_{22}''(s,x), \ s > 0, \, x \in \mathbb{R}$$

Теорема 2.5.1. *Нехай фінансовий ринок перебуває у фінансовій рівновазі, причому виконуються умови (2.14)–(2.16). Тоді φ_t задовольняє дробове рівняння Бюргерса.*

Доведення. Нехай

$$\int\limits_0^t \varphi_s s^{H-1/2}\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \varphi_s^2 s^{2H-1}\, ds = G(t, W_t),$$

де g, $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Тоді

$$\int\limits_0^t g(s, \, W_s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t g^2(s, \, W_s)\, ds = G(t, W_t), \ t \in [0, T]$$

За формулою Іто

$$G(t, W_t) = \int\limits_0^t \left[G_1'(s, W_s) + \frac{1}{2}G_{22}''(s, W_s)\right] ds + \int\limits_0^t G_2'(s, W_s)\, dW_s.$$

Звідси

$$\begin{aligned} g(s,x) &= G_2'(s,x), \\ -\tfrac{1}{2}g^2(s,x) &= G_1'(s,x) + \tfrac{1}{2}G_{22}''(s,x) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Далі, $g_2'(s,x) = G_{22}''(s,x)$,

$$-\frac{1}{2}g^2(s,x) = G_1'(s,x) + \frac{1}{2}g_2'(s,x). \tag{2.22}$$

Диференціюючи (2.21) по s і (2.22) по x, отримуємо:

$$g_1'(s,x) = G_{12}''(s,x)$$

$$-g(s,x)g_2'(s,x) = G_{12}''(s,x) + \frac{1}{2}g_{22}''(s,x)$$

або

$$-g(s,x)g_2'(s,x) = g_1'(s,x) + \frac{1}{2}g_{22}''(s,x).$$

Теорему доведено.

Аналогічна проблема для звичайних стохастичних диференціальних рівнянь з вінерівським процесом розглянута в [34].

Розділ 3

СДР, ЩО ПРЕДСТАВЛЯЮТЬ "МІШАНУ ДРОБОВУ" МОДЕЛЬ ЦІНИ АКЦІЇ

Серед основних наукових робіт, присвячених СДР, що містять диференціали відносно вінерівського процесу та ДБР, є, як уже згадувалось у розділі 2, робота [29], і робота [31], в якій розглядається СДР з диферецiалами відносно вінерівського процесу і ДБР, але у випадку напівлінійності таких СДР, сформульовані умови існування розв'язку не виконуються. Тому в цьому розділі (параграф 3.1) становить інтерес дослідження умов існування і єдиності глобального розв'язку таких СДР, що представляють "мішану дробову" модель ціни акції.

У параграфі 3.2 знайдено умови заміни ймовірнісної міри. В параграфі 3.3 наведені умови фінансової рівноваги ринку основних цінних паперів, ціна акцій якого визначається "мішаною дробовою" моделлю.

3.1. Існування та єдиність розв'язку СДР

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння в повному ймовірнісному просторі з фільтрацією $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$

$$\begin{cases} dX_t = \sigma_1 X_t\, dW_t + \sigma_2 X_t\, dB_t^H + b(t, X_t)\, dt, \;\; t \geq t_0 \\ X_{t=t_0} = X_0 - \mathcal{F}_{t_0} \text{-вимірна випадкова величина,} \end{cases} \tag{3.1}$$

де функція

$$b \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \tag{3.2}$$

задовольняє умову Ліпшиця по $x \in \mathbb{R}$ рівномірно відносно $t \in [0, T]$, тобто $\forall T > 0\ \exists L_T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq L_T\, |x_1 - x_2|. \tag{3.3}$$

Означення 3.1.1. *Розв'язком диференціального рівняння (3.1) будемо називати розв'язок інтегрального рівняння*

$$X_t = X_0 + c_1 \int_{t_0}^{t} X_s\, dW_s + c_2 \int_{t_0}^{t} X_s\, dB_s^H + \int_{t_0}^{t} b(s, X_s)\, ds, \;\; t \geq t_0 \tag{3.4}$$

Інтеграли $\int_{t_0}^{t} X_s\, dW_s$, $\int_{t_0}^{t} X_s\, dB_s^H$ існують, якщо X_s гельдерово неперервна з показником H ([56]).

Теорема 3.1.1. *Нехай функція b задовольняє умови (3.2), (3.3) і умову росту*

$$\forall T > 0\ \exists C_T > 0 : \; |b(t, x)| \leq C_T\, (1 + |x|). \tag{3.5}$$

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (3.1) на $[0, +\infty)$, траєкторії якого з ймовірністю 1 належать класові $Lip_\alpha[0, T]$, $\forall T > 0,\ 0 < \alpha < H$.

Доведення. Розглянемо спочатку допоміжну систему рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial Z_j}(Y,(Z_1,Z_2)) = \sigma_j\, h(Y,(Z_1,Z_2)),\ j=\overline{1,2} \\ h(Y_0,\overline{Z_0}) = X_0,\ \ \overline{Z_0} = \left(W_{t_0}, B^H_{t_0}\right) \end{cases}$$

Вона має розв'язок $h(Y,\overline{Z}) = (Y - Y_0 + X_0)\mathbf{e}^{\sigma_1(Z_1 - W_{t_0}) + \sigma_2(Z_2 - B^H_{t_0})}$, де $\overline{Z} = (Z_1, Z_2),\ \ Z_1(t) = W_t,\ Z_2(t) = B^H_t$

Будемо шукати розв'язок X_t рівняння (3.1) у вигляді $X_t = h(Y(t),\overline{Z}(t))$, де $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ Y(t_0) = Y_0 - \mathcal{F}_{t_0}$-вимірна випадкова величина.

Застосовуючи формулу Іто до $h(Y(t),\overline{Z}(t))$ отримуємо

$$dX_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial h}{\partial Z_i}(Y(t),\overline{Z}(t))\, dZ_i(t) + \frac{\partial h}{\partial Y}(Y(t),\overline{Z}(t))Y'\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 h}{\partial Z_i \partial Z_j}(Y(t),\overline{Z}(t))\, d\left[Z_i, Z_j\right]_t =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sigma_i\, h(Y(t),\overline{Z}(t))\, dZ_i(t) + Y'(t)\frac{\partial h}{\partial Y}(Y(t),\overline{Z}(t))\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_1^2\, h(Y(t),\overline{Z}(t))dt.$$

Тепер порівнюючи з формулою (3.1) дістаємо звичайне диференціальне рівняння відносно Y :

$$\begin{cases} Y' = (c_1(t))^{-1} b(t,\, (Y - Y_0 + X_0)\, c_1(t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\, (Y - Y_0 + X_0) =: f(Y,t) \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

де $c_1(t) = \mathbf{e}^{\sigma_1(Z_1(t) - W_{t_0}) + \sigma_2(Z_2(t) - B^H_{t_0})}$. Далі вважаємо, що $\omega \in \mathbf{\Omega}$ фіксоване. Покладемо далі $L_1(T) := \max\limits_{t\in[0,T]} (c_1(t))^{-1} > 0,\quad L_2(T) := \max\limits_{t\in[0,T]} c_1(t) > 0,\ \ D_1 := C_T\, L_1(T),\ \ D_2 = C_T + \frac{1}{2}\sigma_1^2.$

Далі доведення продовжується, як у теоремі 2.1.1.

3.2. Заміна міри для напівлінійних СДР, що представляють "мішану дробову" модель ціни акції

Розглянемо рівняння (3.1) і будемо вважати, що $t_0 = 0$, функція $b(t,x)$ задовольняє умови (3.2), (3.3), (3.5) і може бути представлена як $b(t,x) = e(t,x)x$, де $e \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Далі використовуємо позначення: $B = \mathrm{B}(H+1/2, 3/2-H)$, $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ є бета-функція, $B_1 = \mathrm{B}(H-1/2, 3/2-H)$, $C_1 = (2HB)^{-1}$, $C_H = \left(\frac{2H\,\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\,\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$, $C_2 = \frac{C_H}{2H(2-2H)^{1/2}}$, $C_0 = \frac{C_1}{C_2}$, $K(t,s) = C_1 s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H}\mathbb{I}\{s \in (0,t)\}$, $\widehat{e}(t,x) := e(t,x)t^{1/2-H}$.

Нехай функція ψ задовольняє наступні умови:

1) $\int\limits_0^T K(t,s)|\psi_s|\,ds < \infty$ м.н., $t \in [0,T]$,

2) існує представлення

$$\int\limits_0^T K(t,s)\psi_s\,ds = \int\limits_0^T \delta_s\,ds, \quad T > 0, \tag{3.7}$$

з $\int\limits_0^T |\delta_s|\,ds < \infty$ м.н., $t \in [0,T]$.

3) $\mathbb{E}\int\limits_0^T s^{2H-1}\delta_s^2\,ds < \infty$,

4) $\mathbb{E}\exp\left\{Z_T - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right\} = 1, \quad t \in [0,T]$,

де $Z_t = \frac{1}{C_2}\int\limits_0^t s^{H-1/2}\delta_s\,dW_s$ і $\langle Z\rangle_t = \frac{1}{C_2^2}\int\limits_0^t s^{2H-1}\delta_s^2\,ds$.

Будемо замінювати міру $\mathbb{P}$ на іншу ймовірнісну міру $\mathbb{Q}$, що $\mathbb{Q}_T \ll \mathbb{P}_T$, де $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}|_{\mathbb{F}_T}$, так щоб знос $e(t,X_t)X_t\,dt$ був рівний нулю відносно міри $\mathbb{Q}_T$. Нехай, спочатку, деяка ймовірнісна міра $\widetilde{\mathbb{Q}}$ задовольняє наступні припущення

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{Q}}_T}{d\mathbb{P}_T} = \exp\left\{\int\limits_0^T \varphi_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \varphi_s^2\, ds\right\}$$

і

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int\limits_0^T \varphi_t\, dW_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \varphi_t^2\, dt\right\}\right] = 1, \tag{3.8}$$

де

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T |\varphi_t|^2\, dt < \infty. \tag{3.9}$$

Тоді за теоремою Гірсанова $W_t - \int\limits_0^t \varphi_s\, ds = \widehat{W}_t$ є вінерівським процесом відносно міри $\widetilde{\mathbb{Q}}_T$. Також, нехай міра $\overline{\mathbb{Q}}$ така, що $\frac{d\overline{\mathbb{Q}}_T}{d\mathbb{P}_T} = \exp\left\{Z_T - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_T\right\}$, $\overline{\mathbb{Q}} \ll \mathbb{P}$, тоді процес $\widehat{B}_t^H = B_t^H - \int\limits_0^t \psi_s\, ds$ є ДБР відносно міри $\overline{\mathbb{Q}}$ (дивись теорему 4 з [40], а також [41], [42]). Звичайно, ми зацікавлені в рівності $\widetilde{\mathbb{Q}}_T = \overline{\mathbb{Q}}_T = \mathbb{Q}_T$, звідки, зокрема випливає,

$$Z_t = \int\limits_0^t \varphi_s\, dW_s. \tag{3.10}$$

Тому, ми хочемо знайти φ_s і ψ_s таким чином, щоб сумарний знос дорівнював

$$\sigma_1\int\limits_0^t \varphi_s\, ds + \sigma_2\int\limits_0^t \psi_s\, ds = -\int\limits_0^t e(s, X_s)\, ds. \tag{3.11}$$

У такому разі $\int\limits_0^t e(s, X_s)\, ds + \sigma_1\int\limits_0^t X_s\, dW_s + \sigma_2\int\limits_0^t X_s\, dB_s^H = \sigma_1\int\limits_0^t X_s\, d\widehat{W}_s + \sigma_2\int\limits_0^t X_s\, d\widehat{B}_s^H$.

З (3.11) отримуємо, що

$$\sigma_1\varphi_t + \sigma_2\psi_t = -e(t, X_t), \quad t \in [0, T].$$

Далі застосуємо перетворення Абеля до наступного співвідношення

$$C_1 \int_0^t (t-s)^{1/2-H} s^{1/2-H} \psi_s \, ds = \int_0^t \delta_s \, ds = C_2 \int_0^t s^{1/2-H} \varphi_s \, ds :$$

$$C_1 \int_0^t (t-u)^{H-3/2} \int_0^u (u-s)^{1/2-H} s^{1/2-H} \psi_s \, ds \, du =$$

$$= C_2 \int_0^t (t-u)^{H-3/2} \int_0^u s^{1/2-H} \varphi_s \, ds \, du,$$

або

$$C_0 B_1 \int_0^t s^{1/2-H} \psi_s \, ds = \int_0^t \frac{(t-u)^{H-1/2}}{H-1/2} u^{1/2-H} \varphi_u \, du.$$

Продиференціювавши останню рівність, дістанемо

$$C_0 B_1 t^{1/2-H} \psi_t = \int_0^t (t-u)^{H-3/2} u^{1/2-H} \varphi_u \, du,$$

і

$$\sigma_1 \varphi_t + \frac{t^{H-1/2}}{C_0 B_1} \sigma_2 \int_0^t (t-u)^{H-3/2} u^{1/2-H} \varphi_u \, du = -e(t, X_t),$$

нехай далі $t^{1/2-H} \varphi_t = \Theta_t$, тоді

$$\sigma_1 \Theta_t + \frac{\sigma_2}{C_0 B_1} \int_0^t (t-u)^{H-3/2} \Theta_u \, du = -\widehat{e}(t, X_t).$$

Це є рівняння Вольтерра зі слабкою особливістю, і його розв'язок має вигляд

$$\Theta_t = -\frac{\widehat{e}(t, X_t)}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{(t-s)^{n(H-1/2)-1}}{\Gamma(n(H-1/2))} \widehat{e}(s, X_s) \, ds,$$

де $\rho = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 C_0 B_1} \Gamma(H-1/2)$.

Отже, ми довели наступний результат.

Теорема 3.2.1. *За виконання умов (3.7), (3.8), (3.9) і (3.10) рівняння (3.1) набуває вигляду*

$$dX_t = \sigma_1 X_t \, d\widehat{W}_t + \sigma_2 X_t \, d\widehat{B}_t^H$$

відносно міри $\mathbb{Q}$.

3.3. Дробове рівняння Бюргерса та умови фінансової рівноваги ринку

Означення 3.3.1. *Фінансовий ринок основних цінних паперів, ціна акцій якого описується рівнянням (3.1), перебуває у фінансовій рівновазі на* $[0,T]$, *якщо* $\Theta_t t^{H-1/2}$ *і відношення правдоподібності* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ *є функціями від* t *і* W_t, *і не залежать від траєкторії* $W_s, \ \ s < t$.

Це означення узагальнює звичайне означення фінансової рівноваги ([57], [58]), в котрому вимагається траєкторна незалежність $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ від $W_s, \ \ s \le t$, а ядро просто дорівнює $e(t, W_t)$. Зауважимо, що фінансовий ринок, ціна акцій якого описується рівнянням (3.1), не допускає арбітраж, як це випливає з [58].

Означення 3.3.2. *Функція* Θ_t, *що задовольняє умови означення 3.3.1, задовольняє дробове рівняння Бюргерса з індексом* H, *якщо* $g(t, W_t) := \Theta_t t^{H-1/2}$ *задовольняє звичайне рівняння Бюргерса*

$$-g(s,x)g_2'(s,x) = g_1'(s,x) + \frac{1}{2} g_{22}''(s,x)$$

Теорема 3.3.1. *Якщо фінансовий ринок є у фінансовій рівновазі, то* Θ_t *задовольняє дробове рівняння Бюргерса.*

Доведення. Покладемо

$$G(t, W_t) := \int\limits_0^t \Theta_s s^{H-1/2}\, dW_s - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \Theta_s^2 s^{2H-1}\, ds.$$

Далі доведення теореми аналогічне до доведення теореми 2.5.1.

Розділ 4

ПОТРАЄКТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ ВІНЕРІВСЬКИХ ІНТЕГРАЛІВ І ПРОЦЕСІВ ВОЛЬТЕРРА, ПОБУДОВАНИХ ЗА ДБР, ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ АРБІТРАЖУ

В цьому розділі розглянуто питання про умови існування та відсутності арбітражу для трьох видів (B, S)–ринку акцій та облігацій. Для першого виду, що визначається "дробовою" акцією, доведено відсутність еквівалентної мартингальної міри, і побудовано приклад інвестиційного портфеля, що допускає арбітраж. У випадках другого виду, що визначається "модифікованою дробовою" акцією, та третього виду (B, S)–ринку, як моделі з "однорідним" ядром, доведено відсутність арбітражу.

4.1. Відсутність мартингальної міри у випадку "чистої дробової" акції

Розглянемо (B,S)-ринок основних цінних паперів з випадковим "чистим дробовим" процесом ціни акції $\left(S_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$:

$$S_t = \exp\left(X_t\right) := \exp\left\{\int\limits_0^t \nu(s)\,ds + \int\limits_0^t \mu(s)\,dB_s^H\right\} \tag{4.1}$$

та процесом ціни облігації $\left(B_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$: $B_t = \mathbf{e}^{rt}$, $r \geq 0$, $t \geq 0$; де μ, ν є невипадкові, вимірні функції.

Для зручності, далі в роботі, акцію, ціна якої визначена процесом 4.1, будемо називати "чистою дробовою", а процес X_t будемо називати показником цієї акції.

Означення 4.1.1. *([59]) Випадковий процес* $\left(Z_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *називається семімартингалом, якщо його можна подати у такому вигляді:*

$$Z_t = M_t + A_t,$$

де M - це локальний мартингал, A – процес локально обмеженої варіації.

Нехай далі, позначимо квадратичну варіацію процесу Z_t через $[Z]_t$, і зауважимо, що справджується таке

$$[Z]_t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = A^c \\ M = 0 \end{cases},$$

де $A = A^c$ – неперервний процес.

Як відомо з [43], (B,S)–ринок є безарбітражним, коли існує міра $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, відносно якої $U_t = \frac{S_t}{B_t}$ є мартингалом, а відсутність еквівалентної мартингальної міри не є достатньою умовою для існування арбітражу (B,S)–ринку. Виведемо співвідношення між існуванням мартингальної міри і властивістю траєкторій процесу U_t.

Лема 4.1.1. *Мартингальна міра $\mathbb{P}^*$ існує тоді і тільки тоді, коли процес X_t є семімартингалом.*

Доведення. Відомо з [43], що процес $U_t = \frac{S_t}{B_t} = \exp(X_t - rt)$ є мартингалом відносно деякої міри $\mathbb{P}^*$ (далі скрізь $\mathbb{P}^*$– мартингал) тоді і тільки тоді, коли $U_t M_t$ є $\mathbb{P}$–мартингалом, де $M_t = \exp\left\{Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t\right\}$, де $Y_t = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$. Отже, тоді $Z_t := U_t M_t = \exp\left\{X_t + Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t - rt\right\}$ є $\mathbb{P}$–мартингал.

За формулою Іто маємо:

$$X_t + Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t - rt = \ln Z_t = \ln Z_0 + \int\limits_0^t \frac{1}{Z_s}\,dZ_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{1}{Z_s^2}\,d\langle Z\rangle_s;$$

враховуючи те, що $\int\limits_0^t \frac{1}{Z_s}\,dZ_s$ є локальним мартингалом, $\int\limits_0^t \frac{1}{Z_s^2}\,d\langle Z\rangle_s$ є процесом локально обмеженої варіації, отримуємо семімартингальність процесу $X_t + Y_t - \frac{1}{2}\langle Y\rangle_t - rt$, а отже X_t є семімартингал.

Наслідок 4.1.1. *Якщо процес X_t не є семімартингалом, то еквівалентної мартингальної міри для процесу U_t не існує.*

Теорема 4.1.1. *Нехай μ є обмежена вимірна відмінна від нуля на множині додатньої лебегової міри функція. Тоді процес $R_t = \int\limits_0^t \mu(s)\,dB_s^H$ не семімартингал.*

Доведення. Очевидно, R_t не є неперервним процесом локально обмеженої варіації. Тому з Означення 4.1.1 випливає, що для доведення теореми достатньо перевірити, що квадратична варіація $[R]_t = 0$.

Нехай $c := \sup\limits_{s\in(-\infty;+\infty)} |\mu(s)| < \infty$. $\forall n \geq 1$ задамо поділ $\lambda = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ відрізка $[0,\, t]$, $t > 0$ з діаметром поділу $|\lambda|$. Тоді

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(R_{t_{k+1}} - R_{t_k}\right)^2\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\mu(s)\,dB_s^H\right|^2 \leq$$

$$\leq c^2H(2H-1)\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|s-t|^{2H-2}\,ds\,dt =$$

$$= c^2H\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(|t_{t_{k+1}} - t|^{2H-1} - |t_k - t|^{2H-1}\right)\,dt = c^2\sum_{k=0}^{n-1}|t_{t_{k+1}} - t_k|^{2H} \leq$$

$$\leq c^2|\lambda|^{2H-1}\sum_{k=0}^{n-1}|t_{t_{k+1}} - t_k| = c^2t|\lambda|^{2H-1} \to 0,\ |\lambda| \to 0.$$

Наслідок 4.1.2. *З Леми 4.1.1 та Теореми 4.1.1 випливає, що у випадку дробової акції еквівалентна мартингальна міра відсутня.*

Далі ми покажемо, що для дробової акції (4.1), в якій $\nu(t) \equiv r$, можна побудувати самофінансований портфель $\pi(t)$, що являє собою інвестицію певного капіталу в акції і допускає арбітраж для (B,S)–ринку.

Процес

$$G_t := \int\limits_0^t \pi(s)(B_s)^{-1}\left[\mu(s)\,dB_s^H + (\nu(s) - r)\ ds\right] =$$

$$= \int\limits_0^t \pi(s)(B_s)^{-1}\mu(s)\,dB_s^H \tag{4.2}$$

називається процесом дисконтованого доходу. З економічної точки зору це означає, що доход від акцій в період між s і $s+ds$ дорівнює

(кількість акцій)(приріст акції) - (сила доходності ооблігації),

або

$$\frac{\pi(s)}{S_s}dS_s - \frac{\pi(s)}{B_s}dB_s; \tag{4.3}$$

а далі, дисконтуючи останній вираз (4.3) за допомогою множника $(B_s)^{-1}$ та інтегруючи від 0 до t, отримаємо (4.2).

Означення 4.1.2. *Портфель π називається арбітражним (або допускає арбітраж), якщо виконуються наступні умови:*

1) $\mathbb{P}\{G_0 = 0\} = 1;$

2) $\mathbb{P}\{G_t \geq 0\} = 1,\ t > 0;$

3) $\mathbb{P}\{G_t > 0\} > 0,\ t > 0.$

Теорема 4.1.2. *Портфель* $\pi(t) = 2S_t\left(\exp\left(\int\limits_0^t \mu(s)\, dB_s^H\right) - 1\right)$ *арбітражний.*

Доведення. Спочатку слід зауважити, що для процесу $S_t = \exp\left(rt + \int\limits_0^t \mu(s)\, dB_s^H\right)$ виконується

$dS_t = S_t\left(r\, dt + \mu(t)\, dB_t^H\right)$, або, що те саме, $S_t = 1 + r\int\limits_0^t S_u\, du + \int\limits_0^t S_u\, \mu(u)\, dB_u^H$, зокрема при $r = 0$ маємо

$$\exp\left(\int\limits_0^t \mu(u)\, dB_u^H\right) - 1 = \int_0^t \mu(u) \exp\left(\int\limits_0^u \mu(s)\, dB_s^H\right) dB_u^H \tag{4.4}$$

Тепер, використовуючи співвідношення (4.4), обчислимо G_t:

$$G_t = \int_0^t \pi(s)\,(B_s)^{-1}\mu(s)\,dB_s^H = \int_0^t 2\exp\left(\int_0^s \mu(u)\,dB_u^H + rs\right)\exp(-rs)\times$$

$$\times\left(\exp\left(\int_0^s \mu(u)\,dB_u^H\right) - 1\right)\mu(s)\,dB_s^H = 2\int_0^t \mu(s)\,\exp\left(2\int_0^s \mu(u)\,dB_u^H\right)\times$$

$$\times dB_s^H - 2\int_0^t \mu(s)\,\exp\left(\int_0^s \mu(u)\,dB_u^H\right)\,dB_s^H = \exp\left(\int_0^t 2\mu(s)\,dB_s^H\right) - 1 -$$

$$-2\left(\exp\left(\int_0^t \mu(s)\,dB_s^H\right) - 1\right) = \left(\exp\left(\int_0^t \mu(s)\,dB_s^H\right) - 1\right)^2.$$

Звідси видно, що G_t задовольняє умовам 1) - 3) Означення 4.1.2.

Самофінансований портфель, що допускає арбітраж, був побудований в роботі [35] для окремого випадку "дробової" акції $\mu \equiv 1$.

4.2. Умови безарбітражності ринку у випадку моделі ціни акції, що визначається процесом Вольтерра

Змодифікуємо акцію (4.1) таким чином, щоб перетворити її показник X_t на семімартингал.

Нехай

$$X_t = \int_0^t K(t,s)\,a(s)\,ds + \int_0^t K(t,s)\,b(s)\,dB_s^H, \tag{4.5}$$

де a і b невипадкові, вимірні функції,

$K(t,s) = \begin{cases} 0, \ s > t, \\ s^{\frac{1}{2}-H}(t-s)^{\frac{1}{2}-H}, \ 0 < s < t \end{cases}$ ядро, введене в роботі [39].

Будемо шукати a і b так, щоб показник X_t був семімартингалом, а саме мав вигляд

$$X_t := \int\limits_0^t \alpha(s)\,ds + \int\limits_0^t \beta(s)\,dW_s, \ \left(W_s = B_s^{\frac{1}{2}}\right) \tag{4.6}$$

Теорема 4.2.1. *Справджуються наступні твердження:*

1) Нехай $\forall B > 0 \ \ s^{\frac{1}{2}-H}a(s) \in \mathcal{AC}\left([0,B]\right)$, *тоді існує похідна*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{1}{2}-H}a(u)\,du, \ t > 0 \tag{4.7}$$

і інтеграл $\int\limits_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{1}{2}-H}a(u)\,du$ *можна подати у вигляді* $\int\limits_0^t \alpha(u)\,du$, *де* $\alpha(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}-H}\,u^{\frac{1}{2}-H}a(u)\,du, \ t > 0.$

2) Нехай $\forall t \in \mathbb{R}, \ \ b(t) = c \equiv const$,

тоді при $\beta(u) = c_H\, c u^{\frac{1}{2}-H}$, *де* $C_H = \left(\frac{2H\,\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\,\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$, *виконується рівність*

$$\int\limits_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H}s^{\frac{1}{2}-H}b(s)\,dB_s^H = \int\limits_0^t \beta(s)\,dW_s, \ t > 0 \tag{4.8}$$

Доведення. 1) Нехай $\forall B > 0, \ \ s^{\frac{1}{2}-H}a(s) \in \mathcal{AC}\left([0,B]\right)$.

Ця умова необхідна і достатня для існування розв'язку рівняння Абеля ([50]):

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}\int\limits_0^t \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)\, s^{\frac{1}{2}-H}a(s)}{(t-s)^{H-\frac{1}{2}}}\,ds = \int\limits_0^t \alpha(s)\,ds, \ t > 0 \tag{4.9}$$

і цей розв'язок дорівнює $\alpha(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}-H}u^{\frac{1}{2}-H}a(u)\,du, \ t > 0.$

2) В цьому пункті доведення знайдемо умови на β і b, за яких місце рівність

$$\int_0^t s^{\frac{1}{2}-H} b(s)\, dB_s^H = \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \beta(s)\, dW_s, \ \ t>0 \tag{4.10}$$

Покладемо $\Phi(t) := \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-H}\, b(t)}, \ \ t>0$. Одночасно до обох частин рівності (4.10) застосуємо наступне перетворення :

$$A_1 := \int_0^t \Phi'(s) \left(\int_0^s u^{\frac{1}{2}-H}\, b(u)\, dB_u^H \right) ds =$$

$$= \int_0^t \Phi'(s) \left(\int_0^s (s-u)^{H-\frac{1}{2}}\, \beta(u)\, dW_u \right) ds =: A_2.$$

Звідси

$$A_1 = \Phi(t) \int_0^t u^{\frac{1}{2}-H}\, b(u)\, dB_u^H - B_t^H = \Phi(t) \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}}\, \beta(u)\, dW_u - \int_0^t z(t,u)\, dW_u$$

де ядро $z(t,u) = \left(H-\frac{1}{2}\right) c_H\, u^{\frac{1}{2}-H} \int_u^t v^{H-\frac{1}{2}}\, (v-u)^{H-\frac{3}{2}}\, dv$ було розглянуто в [39].

$$A_2 = \Phi(t) \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}}\, \beta(u)\, dW_u - \left(H-\frac{1}{2}\right) \int_0^t \Phi(s) \int_0^s (s-u)^{H-\frac{3}{2}}\, \beta(u)\, dW_u\, ds =$$

$$= \Phi(t) \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}}\, \beta(u)\, dW_u - \left(H-\frac{1}{2}\right) \int_0^t \beta(u) \int_u^t (s-u)^{H-\frac{3}{2}}\, \Phi(s)\, ds\, dW_u$$

А тому : $\left(H-\frac{1}{2}\right) \int_0^t \beta(u) \int_u^t (s-u)^{H-\frac{3}{2}}\, \Phi(s)\, ds = z(t,u)$,

тобто $\beta(u) = c_H\, b(t)\, u^{\frac{1}{2}-H} = c_H c u^{\frac{1}{2}-H}, \ \ u>0$.

4.3. Умови безарбітражності ринку у випадку моделі ціни акції з "однорідним" ядром

Розглянемо випадок, коли показник X_t має вигляд

$$X_t = V_h^c(t) := \int\limits_0^t h(t-s)\, c(s)\, dW_s,\ t > 0 \tag{4.11}$$

В силу спеціального вигляду ядра h його доречно назвати однорідним. У випадку $c \equiv 1$ процес $V_h^c(t)$ докладно досліджено в [36].

В наступному твердженні сформульовані умови семімартингальності процесу $V_h^c(t)$, яка, згідно з параграфу 4.1, є достатньою умовою для відсутності арбітражу (B, S)–ринку.

Теорема 4.3.1. *1) Нехай $h \in \mathcal{AC}[0,t],\ t > 0$. Тоді, якщо*

$$\int\limits_0^t \left(h'(t-u)\, c(u)\right)^2 du < \infty, \tag{4.12}$$

то $V_h^c(t)$ семімартингал.

2) Якщо $V_h^c(t)$ семімартингал і c неспадна, то виконується умова (4.12).

Доведення. 1) За умовою $h(t) = h(0) + \int\limits_0^t h'(u)\, du$. Звідси, використовуючи стохастичну теорему Фубіні ([60]), маємо

$$V_h^c(t) = \int\limits_0^t h(t-s) c(s)\, dW_s = h(0)\int\limits_0^t c(s)\, dW_s + \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{t-s} h'(u)\, du\right) c(s)\, dW_s =$$

$$= h(0)\int\limits_0^t c(s)\, dW_s + \int\limits_0^t \int\limits_s^t h'(v-s) c(s) dv\, dW_s = h(0)\int\limits_0^t c(s)\, dW_s +$$

$$\int_0^t \int_0^v h'(v-s)c(s)dW_s\,dv = h(0)\int_0^t c(s)\,dW_s + \int_0^t V_{h'}^c(v)\,dv,$$

тобто $V_h^c(t)$ – семімартингал.

2) Нехай $V_h^c(t)$ допускає розклад $V_h^c(t) = M_t + A_t$, де M – локальний мартингал, A – процес локально обмеженої варіації. Тоді справджуються нерівності :

$$\forall s \in (0,t)\ \ \mathbb{E}\left(\operatorname*{Var}_{[s,t]} A\right) \geq \mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(V_h^c(t) - V_h^c(s)\right|\ \mathcal{F}_s)\right| \geq$$

$$\geq L\left(\int_0^s \left(h(t-u) - h(s-u)\right)^2\ c^2(u)\,du\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= L\left(\int_0^s \left(h(t-s-u) - h(u)\right)^2\ c^2(s-u)\,du\right)^{\frac{1}{2}},\ \ L > 0.$$

Тому семімартингальну властивість процесу $V_h^c(t)$ можна записати так:

$$\Sigma(t) := \sup_{\lambda\in\Lambda_t}\sum_{\lambda}\left(\int_0^{t_i}\left(h(t_{i+1}-t_i+u) - h(u)\right)^2\ c^2(t_i-u)\,du\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\frac{1}{L}\mathbb{E}\left(\operatorname*{Var}_{[0,t]} A\right) < \infty,$$

де Λ_t- множина всіх скінченних поділів відрізка $[0,t]$. Тепер для рівномірного поділу λ_n, $n \geq 1$ відрізка $[0,t]$ з діаметром $|\lambda_n| = \frac{t}{n}$, враховуючи монотонність c, маємо:

$$\forall\theta\in(0,t):\ \ \Sigma(t) \geq \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_0^{t_i}\left(h(t_{i+1}-t_i+u) - h(u)\right)^2\ c^2(t_i-u)\,du\right)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \sum_{i:t_i>\theta}\left(\int_0^{t_i}\left(h(t_{i+1}-t_i+u) - h(u)\right)^2\ c^2(t_i-u)\,du\right)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \left[\frac{t-\theta}{|\lambda_n|}\right] \left(\int\limits_0^\theta (h(|\lambda_n|+u) - h(u))^2 \; c^2(\theta-u)\, du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Звідси

$$\infty > \lim_{|\lambda_n|\to 0} \int\limits_0^\theta \left(\frac{h(|\lambda_n|+u) - h(u)}{|\lambda_n|} \right)^2 c^2(\theta-u)\, du = \int\limits_0^\theta (h'(u)\, c(\theta-u))^2 \; du =$$

$$= \int\limits_0^\theta (h'(\theta-u)\, c(u))^2 \; du.$$

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У дисертації отримано наступні результати:

1. Уперше сформульовано і доведено стохастичні теореми Фубіні для вінерівських інтегралів відносно ДБР і стохастичних інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором. Використовуючи ці теореми, знайдено:

   (a) умови диференційовності дробового інтеграла $\int\limits_0^t \phi(t,s)\,ds$, ядро якого визначається за допомогою вінерівського інтеграла відносно ДБР. Наведено приклад застосування диференціювання таких дробових інтегралів при заміні міри в лінійних стохастичних диференціальних рівняннях, що містять ДБР;

   (b) умови диференційовності дробового інтеграла $\int\limits_0^t \phi(t,s)\,ds$, ядро якого визначається за допомогою стохастичних інтегралів з випадковим інтеграндом і ДБР як інтегратором. Далі, за допомогою одержаних умов диференційовності знайдено умови заміни ймовірнісної міри для СДР, які представляють чисту дробову модель ціни акції. Для цієї чистої дробової моделі ринку акцій знайдено умову фінансової рівноваги.

2. Одержано нові верхні та нижні оцінки моментів супремумів інтегралів вигляду $I_\tau = \int\limits_0^\tau f(t)dB_t^H$ як для детермінованих, так і випадкових τ. Оцінки на детермінованих інтервалах одержані за рахунок гауссовості I_τ, на випадкових - завдяки представленню ДБР за допомогою так званого мартингала Молчана ([37–39]). Ці оцінки істотно залежать від властивостей функції f. У кінці розділу наведено приклад оцінювання моментів розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь, що містять ДБР.

3. Для СДР, що містять диференціали відносно вінерівського процесу та ДБР, а значить, представляють мішану дробову модель ціни акції на ринку основних цінних паперів, вперше знайдено умови існування і єдиності розв'язку; знайдено умову фінансової рівноваги для такого ринку.

4. Для чистої дробової моделі ринку акцій доведено відсутність еквівалентної мартингальної міри, і побудовано приклад інвестиційного портфеля, що допускає арбітраж; для змодифікованої за допомогою процесів Вольтерра чистої дробової моделі та моделі з "однорідним" ядром, знайдено умови відсутності арбітражу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bachelier L., Théorie de la speculation // Ann. Ecole Norm. Sup. – 1900. – v. 17 – pp. 21 – 86.

2. Black F., Scholes M., The pricing of options and corporate liabilities. //J. Polit. Economy – 1973. – v.3 – pp. 637 – 659.

3. Mandelbrot B.B., van Ness J.W., Fractional Brownian motions. Fractional noises and applications. // SIAM Review – 1968. – v.10, №4. – pp. 422 – 437.

4. Kleptsyna M.L., Kloeden P.E., Ahn V.V., Linear filtering with fractional Brownian motion. // Stochastic Anal. Appl. – 1998. – v. 16, № 5. – pp. 907 – 914.

5. Le Breton A., Filtering and parameter estimation in a simple linear system driven by a fractional Brownian motion. // Statist. Probab. Lett. – 1998. – v. 38, №3 – pp. 263 – 274.

6. Embrechts P., Klüpelberg C., Mikosh T., Modelling extremal evnts for insurance and finance. // Application of Mathematics, v.33. – Springer–

Verlag, Berlin. – 1997. – 645 pp.

7. Mandelbrot, Benoit B., Fractals and scaling in finance. Discontinuity, concentration, risk. // Selecta Volume E. With a forward by R.E. Gomory. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. – Springer – Verlag, New York. – 1997.

8. Dai W., Heyde C.C., Itô's formula with respect to fractional Brownian motion. // J. Appl. Math. Stochastic Anal. – 1996. – v.36, №4. – pp. 439 – 448.

9. Kasahara Yu., Matsumoto Yu., On Kallianpur–Robbins law for fractional Braownian motion. // J. Math. Kyoto Univ. – 1996. – v.36, №4. – pp. 815 – 824.

10. Rogers L.C.G. Arbitrage with fractional Brownian motion. // Math. Finance. – 1997. – v.7, №1. – pp. 95 – 105.

11. Ren F., Zhao X., Jiang F., Qui W., Su F., Qiang S., Shen P., Local fractional Brownian motions and Gaussian noises and application. // J. Fudan Univ. Nat. Sci. – 1996. – v.35, №4. – pp. 361 – 373.

12. Lin S.J., Stochastic analysis of fractional Brownian motions. // Stochastics Rep. – 1995. – v.55, №1–2. – pp. 121–140.

13. Yin Z.M., New methods for simulation of fractional Brownian motion. // J. Comput. Phys. – 1996. – v.127, №1. – pp. 66 – 72.

14. Gripenberg G., Norros I., On the prediction of fractional Brownian motion. // J. Appl. Probab.. – 1996. – v.33, №2. – pp. 400 – 410.

15. Sebastian K.L., Path integral representation for fractional Brownian motion. // J. Phys. – 1995. – v.28, №15. – pp. 4305 – 4311.

16. Giraitis L., Surgailis D., On short noise processes with long range dependence. // Probability theory and mathematical statistics. – 1989. – v.1 – pp. 401 – 408.

17. Peters E.E. Fractal market analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. // – Wiley. New York. – 1991.

18. Samorodnitsky G., Taqqu M.S., Stable Non-Gaussian Random Processes. // Chapman & Hall. New York. – 1994.

19. Duncan T. E., An approach to stochastic calculus for fractional Brownian motion. // to appear in Proceedings of Allerton Conference. 1998.

20. Philippe Carmona and Laure Coutin, Fractional Brownian Motion and the Markov Property. – Electronic Communications in Probability. – 1998. – Vol.3, no. 12, pp. 95–107.

21. Maccone C., On the fractional Brownian motions $B_{LH}(t)$ and on the process $B(t^{2H})$. // Lett. Nuovo Cimento (2). – 1983. – v.36, №2 – pp. 33 – 34.

22. Maccone C., Time rescaling and Gaussian properties of the fractional Brownian motions. // Nuovo Cimento B (11). – 1981. – v.65, №1 – pp. 259 – 271.

23. Mandelbrot B.B., On an eigenfunction expansion and on fractional Brownian motions. // Lett. Nuovo Cimento (2). – 1982. – v.33, №17 – pp. 549 –

550.

24. Taqqu M.S., A representation for self-similar processes. // Stochastic Process. Appl. – 1978. – v. 7, №1 – pp. 55 – 64.

25. Xue D.H., Zhu G.X., Zhu Ya.T., Xiong Yan, The stability analysis and description of fractional Brownian motion. J. Huazhong Univ. Sci. Tech. – 1995. – v.33, №10 – pp. 78 – 81.

26. Zaehle M., On the link between fractional and stochastic calculus. // In: Stochastic Dynamics, Eds. H. Crauel and M. Gundlach – Springer. – 1999.

27. Klingenhöfer F., Differential equation whith fractal noise //Ph.D. Thesis, University of Jena. – 1998.

28. Willinger W., Taqqu M. S. and Teverovsky V., Stock market prices and long-range dependence. // J. Finance and Stochastics. – 1999. – v. 3, pp. 1 – 13.

29. Zaehle M., Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. Part II.// Preprint.

30. Rusmaikina A., Stieltjes integrals of Holder continuous functions with applications to fractional Brownian motion. // Mathematics ArXiv electronic edition: http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0005/0005147.pdf

31. Schoenmakers J.G.M. and Kloeden P. E., Robust option replication for a Black- Scholes model extended with nondeterministic trends.// Preprint.

32. Novikov A. and Valkeila E., On some maximal inequalities for fractional Brownian motions. // Statistics and Probability Letters, **44** (1999), 47–55.

33. Mémin J., Mishura Yu. and Valkeila E., Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to fractional Brownian motions.// Preprint **214**. – University of Jyväskulä.

34. Hodges S. and Carverhill A., Quasi mean reversion in an efficient stock market: the characterisation of economic equilibria which support Black-Scholes option pricing. // The Economic Journal, **103** (1993), 395–405.

35. Shiryaev, A., On Arbitrage and replication for fractal models. // – Ma Phy Sto report, **20**, 1998 – 6 pp.

36. Carmona, Ph., Coutin, L. and Montseny, G., Applications of a representation of long memory Gaussian process.// Laboratory of Probability Theory and Statistics. – Toulouse, 1988. – 48 pp.

37. Молчан Г.М., Гауссовские процессы с асимптотически степенным спектром, // Теор. вероятност. и применен. **14** (1969), № 3, 556 – 559.

38. Молчан Г.М., Голосов Ю.И., Гауссовские стационарные процессы с асимптотически степенным спектром, // Доклады АН СССР **184**, (1969), 546 – 549.

39. Norros, I., Valkeila, E. and Virtamo, J., An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian

motions. – Bernoulli **55** – 1999. – 571–587.

40. Yu. Mishura and E. Valkeila Martingale transforms and Girsanov theorem for long-memory Gaussian processes // Statistics and Probability Letters. (2001).

41. Kleptsyna M.L., Le Breton A., Rouland M.C., An elementary approach to filtering in systems with fractional Brownian observation noise. // INRIA. Rapport de recherche. – 1998. – № 349. – 38 pp.

42. Decreusfond L. and Üstunel A. S., Stochastic analysis on the fractional Brownian motions. // Potential Analysis. – **10** (1999), pp. 177 – 214.

43. Shiryaev, A., Essential of Stochastic Finance (Facts, Models, Theory). // – World Scientific, 1999. – 834pp.

44. Krvavych Yu. and Mishura Yu., The stochastic Fubini theorem for integrals containing random integrand and fractional Brownian motion as integrator. // Theory of Random Processes **6 (22)**, № 1-2, (2000), – pp. 79 – 89.

45. Крвавич Ю.В., Мішура Ю.С. Дослідження умов існування та відсутності арбітражу в моделі (B,S)–ринку з фрактальним броунівським рухом. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2000. – Вип. 4, С. 9 – 16.

46. Крвавич Ю.В., Мішура Ю.С. Деякі максимальні нерівності для моментів вінерівських інтегралів, побудованих за дробовим броунівським рухом. // Теор. ймовірност. та матем. статист. – Вип. 61, 1999, С. 72 – 83.

47. Крвавич Ю.В., Мішура Ю.С. Диференційовність дробових інтегралів, ядра яких визначаються за допомогою фрактального броунівського руху. // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №1. – С. 30 – 40.

48. Krvavych Yu., Arbitrage opportunities on (B,S)–market defined by fractional Brownian motions. // Abstracts of the 23-rd RSC conference on Probability and Statistics. – Cardiff University. – 2000.

49. Krvavych Yu., On some problems of stochastic analysis of Wiener integrals that constructed by fractional Brownian motions.// Proceedings of International Scientific M. Kravchuk Conference. – Institute of Mathematics, Kyiv. – 2000. – pp. 445.

50. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. // – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

51. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. // – М.: Наука, 1981. – 496 с.

52. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов: В 3-х т.// – М.: Наука, 1971. – Т.1. – 664 с.

53. Лифшиц М.А. Гауссовские случайные функции. // "ТВiМС", Киев, 1999.

54. Новиков А.А. О моментных неравенствах для стохастических интегралов.// Теор. вероятност. и применен. **16**. – 1971, pp. 538 – 541.

55. Denis Feyel and Arnaud de la Pradelle, Fractional integrals and Brownian processes. // Preprint.

56. Zaehle M., Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. Part I // – Probab. Theory Relat. Fields **111**. – 1998, pp. 33–374.

57. Karatzas J. and Shreve S.E., Methods of Mathematical Finance.// Applications for Stochastic Modelling and Applied Probability. – **v. 39**. – Springer Verlag – 1998. – 408pp.

58. Mishura Yu. and Valkeila E., On arbitrage in the mixed Brownian - fractional Brownian market model. // University of Helsinki, Preprint – **261** – 2000. – 14 pp.

59. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н., Теория мартингалов.// М., "Наука", 1986.

60. Protter Ph., Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach // Springer – Verlag. 1999. – 302 pp.