УДК 519.21

ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ДРОБОВИХ ІНТЕГРАЛІВ, ЯДРА ЯКИХ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ.

DIFFERENTIABILITY OF FRACTIONAL INTEGRALS WITH KERNELS THAT DEFINED BY FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

Ю.В. Крвавич
Yu.V. Krvavych
Київський університет імені Тараса Шевченка, аспірант
krvavych@yahoo.com

Ю.С. Мішура
Yu.S. Mishura
Київський університет імені Тараса Шевченка, доктор фіз-мат. наук, професор
myus@mechmat.univ.kiev.ua

Анотація
В статті доведено стохастичну теорему Фубіні для вінерівських інтегралів відносно фрактального броунівського руху (ФБР). За її допомогою одержано умови середньоквадратичної і потраєкторної диференційовності дробових інтегралів, ядра яких містять ФБР.

The stochastic Fubini theorem for Wiener integrals concerning the fractional Brownian motion (FBM) is proved in the present paper. Due to this theorem, the mean-square differentiability and path differentiability conditions of fractional integrals with kernels that defined by FBM are obtained.

1. Вступ. Необхідність диференціювати дробові стохастичні інтеграли, ядра яких містять фрактальний броунівський рух, виникає при заміні міри і застосуванні теореми Гірсанова до процесів з "довгостроковою залежністю" ("long-range dependence"). Нехай, наприклад, на канонічному ймовірнісному просторі задано стохастичний "дифузійний" процес вигляду

$x_t = \int_0^t I_1(s)\,ds + I_2(t)$, де $I_i(t) = \int_0^t \alpha_i(s)\,dB_s^H$ - вінерівський інтеграл відносно ФБР (відповідні позначення наведено в п.2). Припустимо, що $\alpha_2(t) > 0$ і визначимо

$$c(t) = I_1(t)\left(\alpha_2(t)\right)^{-1} \; . \tag{1}$$

Тоді, якщо існує похідна дробового інтегралу,

$$\beta(t) := \frac{d}{dt}\int_0^t u^{1/2-H}\,(t-u)^{1/2-H}\,c(u)\,du\,, \tag{2}$$

і $K_c^t(s) := s^{1/2-H}\frac{d}{ds}\int_s^t v^{2H-1}\,(v-s)^{1/2-H}\,\beta(v)\,dv$, то згідно з теоремою 1 ([1]), процес $\left(\hat{B}_t^H\right) = B_t^H - \int_0^t c(s)\,ds$ буде процесом ФБР відносно нової міри $\hat{P}$ такої, що $\left(\frac{d\hat{P}}{dP}\right)_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right\}$, де $M_t = \int_0^t K_c^t(s)\,dB_s^H$ - гаусівський мартингал, $\langle M\rangle_t = \int_0^t K_c^t(s)\,c(s)\,ds$. При цьому в роботі [1] неявно припускається, що похідна $\beta(t)$ існує для будь-якої неперервної функції $c(t)$. Це не так навіть для функцій, що належать до деякого гельдерового класу, про що свідчить приклад, наведений в лемі 1. З іншого боку, достатня умова диференційовності дробових інтегралів, тобто існування похідних Рімана-Ліувілля, міститься в [2, стор. 43], і цією умовою є абсолютна неперервність $c(u)$, що надто звужує клас допустимих ядер для нашого випадку (більш загальні умови на ядро $c(s)$ наведені в [2, стор. 185] для того, щоб існувала похідна за Маршо від дробового інтегралу, але похідні Рімана-Ліувілля і Маршо не співпадають на функціях типу (1)).

В даній статті наведенно досить загальні достатні умови на ядро $c(t)$ типу (1) для існування дробової похідної (2) і представлення дробового інтегралу, як інтегралу від своєї похідної. Як допоміжний результат, одержано стохастичну теорему Фубіні для вінерівських інтегралів відносно ФБР. Досліджено властивості похідної $\beta(t)$, доведено її неперервність з ймовірністю 1 на кожному відрізку, що не містить 0.

Відзначимо, що індекс Хюрста фрактального процесу, що входить в ядро $c(t)$, в наших теоремах не обов'язково збігається з показником H в інтегралі (2).

2. Означення ФБР та вінерівських інтегралів відносно ФБР. Розглянемо повний ймовірнісний простір (Ω, F, P) з фільтрацією $(F_t, t \ge 0)$. Цю сукупність будемо позначати $(\Omega, F, (F_t)_{t\ge 0}, P)$.

<u>Означення 1.</u> *Фрактальним броунівським рухом з індексом Хюрста* $H \in (1/2, 1)$ *називається випадковий процес* $(B_t^H, (F_t)_{t\ge 0}, P)$*, який характеризується наступними властивостями:*

1) B_t^H *- процес з стаціонарними приростами;* *2)* $B_0^H = 0$ *та* $\mathrm{E}B_t^H = 0\ \forall t > 0$ *;*

3) $\mathrm{E}\left|B_t^H\right|^2 = t^{2H}\ \forall t > 0$*;* *4)* B_t^H *- гаусівський процес;*

5) траєкторії випадкового процесу B_t^H *є неперервними.*

Перш ніж досліджувати диференційовність дробового інтегралу, ядро якого визначається за допомогою фрактального броунівського руху, слід нагадати означення вінерівського інтегралу відносно ФБР ([3]). Термін "вінерівський" означає інтеграл з невипадковою підінтегральною функцією. Для $H > \frac{1}{2}$ визначимо інтегральний оператор Γ:

$$\Gamma f(t) := H(2H-1)\int_0^{\infty} f(s)\left|s-t\right|^{2H-2} ds,$$

а також визначимо скалярний добуток $< f, g >_{\Gamma} := < f, \Gamma g >= H(2H-1)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(s)g(t)\left|s-t\right|^{2H-2} dsdt$,

де $< \circ > -$ звичайний скалярний добуток $L_2([0,\infty])$.

Позначимо через $L_2^{\Gamma} -$простір еквівлентних класів вимірних функцій f таких, що $< f, f >_{\Gamma} < \infty$. Тепер ясно, що відображення $B_t^H \mapsto 1_{[0,t)}$ можна продовжити до ізометрії між гаусовим простором породженим $\{B_t^H, t \ge 0\}$, як найменшим замкненим лінійним підпростором $L_2(\Omega, F, P)$, що містить $\{B_t^H, t \ge 0\}$ та простором L_2^{Γ}. Для $f \in L_2^{\Gamma}$ інтеграл $\int_0^{\infty} f(s) dB_s^H$ тепер можна визначити як образ функції f в цій ізометрії.

Зауважимо, що $\mathrm{E}\left|\int_0^{\infty} f(s)\, dB_s^H\right|^2 = H(2H-1)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(s) f(u)\left|u-s\right|^{2H-2} du\, ds$.

3. Основні результати. В даному розділі вивчається питання диференційовності дробового інтегралу $\Phi(t) = \int_0^t \phi(t,s)\, ds$, ядро якого визначається за допомогою фрактального броунівського руху, а саме

$$\phi(t,s) = K_{H_0}(t,s)\int_0^s \alpha(u)\, dB_u^H, H \in (1/2,1), H_0 \in (1/2,1), \qquad (3)$$

де

$$K_{H_0}(t,s) := (t-s)^{1/2-H_0}\ \beta\left(s/t\right),\ 0 < s < t.$$

При доведенні диференційовності дробового інтегралу з ядром (3) ми будемо використовувати стохастичну теорему Фубіні, а тому спочатку сформулюємо та доведемо її.

<u>Теорема 1 (стохастична теорема Фубіні)</u>

Нехай невипадкова, вимірна функція $f = f(t,s) : R_+^2 \to R$ *задовольняє наступні умови*

$$\int_0^T\int_0^T\int_0^T |f(t,s)||f(t,u)||s-u|^{2H-2}\,ds\,du\,dt<+\infty,$$
$$\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |f(t_1,s)||f(t_2,u)||s-u|^{2H-2}\,ds\,du\,dt_1\,dt_2<+\infty \tag{4}$$

Тоді існують інтеграли

$$I_1=\int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\,dt\right)dB_s^H;\qquad I_2=\int_0^T\left(\int_0^T f(t,s)\,dB_s^H\right)dt$$

і виконується рівність $I_1=I_2$ *з ймовірністю 1*.

Доведення.

1) Спочатку покажемо, що твердження теореми справедливе для обмежених, вимірних f.

Нехай $c:=\sup\limits_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)|<+\infty$, тоді згідно [4] існує послідовність простих функцій $\{P_n(t,s):(t,s)\in[0,T]^2, n\geq 1\}$ така, що $P_n \rightrightarrows f$, $n\to+\infty$ на $[0,T]^2$ і

$$P_n(t,s):=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\left(\chi_{A_{n+}^k}(t,s)-\chi_{A_{n-}^k}(t,s)\right)+n\left(\chi_{B_{n+}}(t,s)-\chi_{B_{n-}}(t,s)\right),$$

де

$$A_{n+}^k:=\left\{(t,s)\in[0,T]^2:\frac{k}{2^n}\leq f(t,s)<\frac{k+1}{2^n}, k=\overline{0,n2^n-1}\right\},\ B_{n+}:=\left\{(t,s)\in[0,T]^2: f(t,s)\geq n\right\},$$
$$A_{n-}^k:=\left\{(t,s)\in[0,T]^2:-\frac{k+1}{2^n}<f(t,s)\leq-\frac{k}{2^n}, k=\overline{0,n2^n-1}\right\},\ B_{n-}:=\left\{(t,s)\in[0,T]^2: f(t,s)\leq -n\right\}$$

Слід зауважити, що для простих функцій виконується стохастична теорема Фубіні.

Далі для обмеженої функції f і $\forall n\geq 1$:

$$|I_1-I_2|=\left|\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))dt\right)dB_s^H-\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))dB_s^H\right)dt\right|\leq$$
$$\leq\left|\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))dt\right)dB_s^H\right|+\left|\int_0^T\left(\int_0^T (f(t,s)-P_n(t,s))dB_s^H\right)dt\right|=:L_{1n}+L_{2n}. \tag{5}$$

Тепер,

$$\mathrm{E}|L_{1n}|^2=H(2H-1)\int_0^T\int_0^T\left(\int_0^T (f(t_1,s)-P_n(t_1,s))dt_1\right)\left(\int_0^T (f(t_2,u)-P_n(t_2,u))dt_2\right)\times$$
$$\times|s-u|^{2H-2}ds\,du\leq H(2H-1)\left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^2\int_0^T\int_0^T|s-u|^{2H-2}ds\,du=$$
$$=\left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|f(t,s)-P_n(t,s)|\right)^2 T^{2H+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0; \tag{6}$$

$$\mathrm{E}\left| L_{2n} \right|^2 \le T \int_0^T \mathrm{E}\left| \int_0^T \left(f(t,s) - P_n(t,s) \right) dB_s^H \right|^2 dt =$$

$$= T\, H(2H-1) \int_0^T \left(\int_0^T \int_0^T \left(f(t,s) - P_n(t,s) \right)\left(f(t,u) - P_n(t,u) \right) \left| s-u \right|^{2H-2} ds\, du \right) dt \le$$

$$\le \left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2} \left| f(t,s) - P_n(t,s) \right| \right)^2 T^{2H+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \qquad (7)$$

Звідси з оцінок (5) - (7) отримуємо твердження теореми для обмежених функцій f.

2) Нехай тепер f задовольняє умови (4). Зауважимо, що для послідовності функцій $f_n(t,s) = f(t,s)\,\chi_{\{|f(t,s)|\le n\}}(t,s),\ n\ge 1$ виконується твердження стохастичної теореми Фубіні.

Далі позначимо

$$A_n := \{(t_1,s)\in [0,T]^2 : \left| f(t_1,s) \right| \ge n\}; \quad B_n := \{(t,s,u)\in [0,T]^3 : \left| f(t,s) \right| \ge n, \left| f(t,u) \right| \ge n\}.$$

Тоді $\forall n \ge 1$

$$\left| \int_0^T \left(\int_0^T f(t,s)\, dt \right) dB_s^H - \int_0^T \left(\int_0^T f(t,s)\, dB_s^H \right) dt \right| \le \left| \int_0^T \left(\int_0^T f(t,s)\,\chi_{\{|f(t,s)|\ge n\}}(t,s) dt \right) dB_s^H \right| +$$

$$+ \left| \int_0^T \left(\int_0^T f(t,s)\,\chi_{\{|f(t,s)|\ge n\}}(t,s)\, dB_s^H \right) dt \right| =: I_{1n} + I_{2n};$$

$$\mathrm{E}\left| I_{1n} \right|^2 = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T \left(\int_0^T f(t_1,s)\,\chi_{A_n}(t_1,s)\, dt_1 \right) \left(\int_0^T f(t_2,u)\,\chi_{A_n}(t_2,u)\, dt_2 \right) \left| s-u \right|^{2H-2} ds\, du \le$$

$$\le H(2H-1) \iint_{A_n} \iint_{A_n} \left| f(t_1,s) \right| \left| f(t_2,u) \right| \left| s-u \right|^{2H-2} dt_2\, du\, dt_1\, ds \to 0,\ n\to+\infty;$$

$$\mathrm{E}\left| I_{2n} \right|^2 \le T\, H(2H-1) \int_0^T \int_0^T \int_0^T f(t,s)\,\chi_{A_n}(t,s)\, f(t,u)\,\chi_{A_n}(t,u) \left| s-u \right|^{2H-2} ds\, du\, dt \le$$

$$\le T\, H(2H-1) \iiint_{B_n} \left| f(t,s) \right| \left| f(t,u) \right| \left| s-u \right|^{2H-2} ds\, du\, dt \to 0, n\to+\infty.$$

Звідси отримаємо твердження теореми для функцій f.

Перш ніж перейти до розгляду питання про диференційовність дробового інтегралу Φ, слід зауважити, що навіть у випадку, коли функція $c(s)$ є дійсною та гельдеровою, похідна функції $I(t) := \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} c(s)\, ds$ може не бути скрізь визначеною на $[0,\infty)$, про що свідчить наступний результат.

Лема 1. *Нехай* $c(s)=\begin{cases} s+(t_0-t_1)^{1-r}-t_1, & s\in[0,t_1) \\ (t_0-s)^{1-r}, & s\in[t_1,t_0] \\ -(s-t_0)^{1-r}, & s>t_0 \end{cases}$, *де* $t_0>t_1>0$, $r\in\left(\frac{3}{2}-H,1\right)$, $H\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Тоді в точці $t=t_0$ *похідна функції* $I(t)$ *не існує.*

Доведення. Зауважимо, що $\exists A>0:\forall s_1,s_2\ge 0\ \ |c(s_1)-c(s_2)|\le A\max\left\{|s_1-s_2|^{1-r},|s_1-s_2|\right\}$ і

$$\forall t>0: I(t)=\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} c(s)\,ds=t^{2-2H}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H}u^{\frac{1}{2}-H}c(tu)\,du=:t^{2-2H}I_1(t).$$

Дослідимо тепер похідну $I_1(t)$ в точці $t=t_0$.

$$\frac{I_1(t_0+h)-I_1(t_0)}{h}=\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H}u^{\frac{1}{2}-H}u\,\frac{c(t_0u+hu)-c(t_0u)}{hu}du\,.$$

При $h\to 0$ для $\theta:=\frac{t_1}{t_0}\in(0,1)$ маємо :

$$\lim_{h\to 0}\frac{I_1(t_0+h)-I_1(t_0)}{h}=\int_0^\theta (1-u)^{\frac{1}{2}-H}u^{\frac{3}{2}-H}du-(1-r)t_0^{-r}\int_\theta^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H-r}u^{\frac{3}{2}-H}du\,,$$ де перший

доданок дорівнює $B_\theta\left(\frac{5}{2}-H,\frac{3}{2}-H\right)$, а другий нескінченний, оскільки

$$\left|\int_\theta^1 (1-u)^{\frac{1}{2}-H-r}u^{\frac{3}{2}-H}du\right|\ge\theta^{\frac{3}{2}-H}\left|\left(-\frac{(1-u)^{\frac{3}{2}-H-r}}{\frac{1}{2}-H-r}\right)\Bigg|_\theta^1\right|=\infty\,.$$

Отже, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{I_1(t_0+h)-I_1(t_0)}{h}=-\infty$. □

Теорема 2 *Нехай функція* $\alpha:R_+\to R$ *- обмежена та вимірна, функція* $\beta:(0,1]\to R$ *задовольняє наступні умови:*

1) $m:=\sup\limits_{u\in(0,1]}|u\beta(u)|<+\infty$,

2) $\int_0^1 |\beta(u)|^2du<+\infty$,

тоді функція $\delta_t=\int_0^t \alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)dB_u^H$ *визначена для кожного* $t>0$, $\mathrm{E}\int_0^t |\delta_t|^2dt<+\infty$ *і*

виконується наступне співвідношення $\int_0^t \delta_s\,ds=t^{H_0-3/2}\Phi(t), t>0$.

Доведення.

Нехай $c:=\sup\limits_{u\in R_+}|\alpha(u)|<+\infty$. Покажемо, що для кожного $t>0$ функція δ_t визначена.

Дійсно, $\forall t>0$:

$$\mathrm{E}|\delta_t|^2=H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \alpha(u)\frac{u}{t^2}\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)|u-v|^{2H-2}du\,dv\le$$

$$\le c^2 H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \frac{u}{t^2}\frac{v}{t^2}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{1/2-H_0}\left|\beta\left(\frac{u}{t}\right)\right|\left(1-\frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0}\left|\beta\left(\frac{v}{t}\right)\right|\,|u-v|^{2H-2}\,du\,dv=$$

$$\le c^2 t^{2H-2} m^2 H(2H-1)\int_0^1\int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0}(1-v)^{1/2-H_0}|u-v|^{2H-2}\,du\,dv=$$

$$=c^2 m^2 t^{2H-2} H L_0 < +\infty ,$$

де $L_0 = \mathrm{B}(2H, 2-2H)+\dfrac{2H-H_0+1/2}{2^{2H-H_0-1/2}(3/2-H_0)(1+2H-2H_0)}>0$.

Наступна оцінка забезпечує скінченність інтеграла $\int_0^t |\delta_s|^2\,ds$.

$$\forall\, t>0: \qquad \int_0^t \mathrm{E}|\delta_s|^2\,ds \le c^2 m^2 t^{2H-1} H L_0 < +\infty .$$

Також з умов теореми випливає і скінченність наступних двох інтегралів

$$\int_0^t\int_0^s \alpha(u) K_{H_0}(t,s)\,dB_u^H\,ds\ ,\quad \int_0^t\int_u^t \alpha(u) K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H\ ,\ t>0. \tag{8}$$

Дійсно:

$$\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_0^s \alpha(u) K_{H_0}(t,s)\,dB_u^H\,ds\right|^2 \le t\int_0^t \left|K_{H_0}(t,s)\right|^2 \mathrm{E}\left|\int_0^s \alpha(u)\,dB_u^H\right|^2 ds=$$

$$=t\int_0^t \left|K_{H_0}(t,s)\right|^2 H(2H-1)\int_0^s\int_0^s \alpha(u)\alpha(v)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\,ds\le$$

$$\le H(2H-1)c^2 t^{3-2H_0+2H}\left\{\int_0^{1/2}(1-s)^{1-2H_0}\beta^2(s)\,ds+\int_{1/2}^1(1-s)^{1-2H_0}\beta^2(s)\,ds\right\}\le$$

$$\le H(2H-1)c^2 t^{3-2H_0+2H}\left\{2^{2H_0-1}\int_0^1\beta^2(s)\,ds+m_{1/2}\frac{2^{2H_0-2}}{2-2H_0}\right\}<\infty ,$$

де $m_{1/2}=\sup\limits_{u\in[1/2,1]}|\beta(u)|^2<+\infty$.

Для другого інтегралу маємо таку оцінку:

$$\mathrm{E}\left|\int_0^t\int_u^t \alpha(u) K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H\right|^2 = H(2H-1)\int_0^t\int_0^t \alpha(u)\alpha(v)\left(\int_u^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)\times$$

$$\times\left(\int_v^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)|u-v|^{2H-2}\,du\,dv\le c^2 H(2H-1)\int_0^t\int_0^t\left(\int_0^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)^2|u-v|^{2H-2}\,du\,dv=$$

$$= c^2 H(2H-1)t^{2H}\left(\int_0^t K_{H_0}(t,s)\,ds\right)^2 \le c^2 H(2H-1)t^{2H+1}\int_0^t \left|K_{H_0}(t,s)\right|^2 ds = c^2 H(2H-1)t^{2H+1}\times$$

$$\times\int_0^t (t-s)^{1-2H_0}\beta^2\left(\frac{s}{t}\right)ds \le H(2H-1)c^2 t^{3-2H_0+2H}\left\{2^{2H_0-1}\int_0^1 \beta^2(s)\,ds + m_{1/2}\frac{2^{2H_0-2}}{2-2H_0}\right\} < \infty$$

Звідси, для інтегралів (8) виконуються умови стохастичної теореми Фубіні.

А отже, використовуючи стохастичну теорему Фубіні, можна зробити наступні перетворення для функції Φ:

$$\Phi(t) = \int_0^t K_{H_0}(t,s)\int_0^s \alpha(u)\,dB_u^H\,ds = \int_0^t\int_u^t \alpha(u)K_{H_0}(t,s)\,ds\,dB_u^H =$$

$$= t^{3/2-H_0}\int_0^t\int_{u/t}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H =: t^{3/2-H_0}F(t), t > 0.$$

Для інтегралів $\int_0^t |\delta_s|^2 ds$ та $F(t)$, в силу їх скінченності, теж виконуються умови стохастичної теореми Фубіні, а отже її можна використати в наступних перетвореннях:

$$\int_0^t \delta_s\,ds = \int_0^t\int_0^s \alpha(u)\frac{u}{s^2}K_{H_0}\left(\frac{u}{s}\right)dB_u^H\,ds = \int_0^t\int_u^t \alpha(u)\frac{u}{s^2}K_{H_0}\left(\frac{u}{s}\right)ds\,dB_u^H =$$

$$= \int_0^t\int_{u/t}^1 \alpha(u)K_{H_0}(s)\,ds\,dB_u^H = F(t) = t^{H_0-3/2}\Phi(t). \ \square$$

<u>Наслідок.</u> *Функція* $\Phi(t) = t^{3/2-H_0}\int_0^t \delta_s\,ds$ *належить до класу* $AC[0,T]\ \forall T > 0$ ([2]), *отже для майже всіх* $\omega\in\Omega$, $\forall t > 0$: $\Phi'(t) = (3/2-H_0)t^{1/2-H_0}\int_0^t \delta_s\,ds + t^{3/2-H_0}\delta_t$.

Знайдемо додаткові умови, при яких δ_t буде похідною в середньому квадратичному функції $t^{H_0-3/2}\Phi(t)$ для всіх $t > 0$.

<u>Теорема 3.</u> *Нехай виконуються умови <u>Теореми 2</u> та, крім того,* $\beta\in C((0,1])$, *тоді* δ_t *- похідна в середньому квадратичному в точці* $t > 0$ *функції* $t^{H_0-3/2}\Phi(t)$.

<u>Доведення.</u>

Як з'ясувалось вище (теорема 2), для диференційованості функції Φ достатньо довести диференційованість функції F.

Для $h > 0$:

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H - \frac{1}{h}\int_0^t\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)K_{H_0}(1,s)\,ds\,dB_u^H +$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^t \int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\, dB_u^H \;-\frac{1}{h}\int_0^t \int_{u/t}^1 \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\, dB_u^H \;=$$

$$=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\, dB_u^H \;+\frac{1}{h}\int_0^t \int_{u/(t+h)}^{u/t} \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\, dB_u^H \;=: I_1(t,h)+I_2(t,h).$$

Далі зробимо наступні оцінки:

$$\mathrm{E}\left|I_1(t,h)\right|^2=\frac{H(2H-1)}{h^2}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h}\left(\int_{u/(t+h)}^1 \alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\right)\left(\int_{v/(t+h)}^1 \alpha(v)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\right)\times$$

$$\times\left|u-v\right|^{2H-2} du\, dv \le c^2\,\frac{H(2H-1)}{h^2}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h}\left(\int_{t/(t+h)}^1 K_{H_0}(1,s)\, ds\right)^2 \left|u-v\right|^{2H-2} du\, dv \underset{h\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} c^2\, H(2H-1)\lim_{h\to 0}\left(\frac{t}{(t+h)^2}\left(1-\frac{t}{t+h}\right)^{1/2-H_0}\beta\left(\frac{t}{t+h}\right)\right)^2\left(\left(3/2-H_0\right)h^{1/2-H_0}\right)^{-2}\lim_{h\to 0} h^{1-2H_0+2H} =$$

$=c^2\, H(2H-1)\dfrac{t^{2H_0-3}\beta^2(1)}{\left(3/2-H_0\right)^2}\lim\limits_{h\to 0} h^{1-2H_0+2H}=0$, $t>0$. Для інтегралу $I_2(t,h)$ маємо наступні оцінки:

$$\mathrm{E}\left| I_2(t,h)-\int_0^t \alpha(u)\frac{d}{dt}\left(\int_{u/t}^1 K_{H_0}(1,s)\, ds\right) dB_u^H\right|^2=\mathrm{E}\left| I_2(t,h)-\delta_t\right|^2=$$

$$=\mathrm{E}\left| I_2(t,h)-\int_0^t \alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right) dB_u^H\right|^2 = H\left(2H-1\right)\int_0^t\int_0^t\left(\alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h}\int_{u/(t+h)}^{u/t}\alpha(u)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\right)\left(\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)-\frac{1}{h}\int_{v/(t+h)}^{v/t}\alpha(v)\, K_{H_0}(1,s)\, ds\right)\times$$

$$\times\left|u-v\right|^{2H-2} du\, dv =: J_{t,h}.$$

Слід зауважити, що підінтегральна функція останнього інтегралу $J_{t,h}$ майже скрізь збігається до 0 при $h\to 0$. Покажемо, що він ще й має інтегровану мажоранту, а отже, за теремою Лебега прямує до 0 при $h\to 0$.

$$J_{t,h}\le H\left(2H-1\right)\left\{\int_0^t\int_0^t\left|\alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)\right|\left|u-v\right|^{2H-2} du\, dv+\right.$$

$$+\int_0^t \left|\alpha(v)\frac{v}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t}\right)\right| \left|\frac{1}{h}\int_{u/(t+h)}^{u/t}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right| |u-v|^{2H-2}du\,dv\ +$$

$$+\int_0^t \left|\alpha(u)\frac{u}{t^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t}\right)\right| \left|\frac{1}{h}\int_{v/(t+h)}^{v/t}\alpha(v)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right| |u-v|^{2H-2}du\,dv\ +$$

$$\left.+\int_0^t \left|\frac{1}{h}\int_{u/(t+h)}^{u/t}\alpha(u)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right| \left|\frac{1}{h}\int_{v/(t+h)}^{v/t}\alpha(v)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right| |u-v|^{2H-2}du\,dv\ \right\} =: L_{t,h}$$

Для $0<h<1$ справедлива оцінка

$$:\left|\frac{1}{h}\left(\int_{v/(t+h)}^{v/t}\alpha(v)\,K_{H_0}(1,s)\,ds\right)\right| \le c\frac{1}{h}\int_{v/(t+h)}^{v/t}(1-s)^{1/2-H_0}|\beta(s)|\,ds \le c\left(1-\frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0}\frac{1}{h}\int_{v/(t+h)}^{v/t}|\beta(s)|\,ds \le$$

$$\le c\left(1-\frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0}\frac{1}{h}\int_{t/(t+h)}^{1}|\beta(s)|\,ds \le c\sqrt{m_{t/(t+1)}}\,\frac{1}{t}\left(1-\frac{v}{t}\right)^{1/2-H_0}.$$ Звідси

$$L_{t,h} \le c^2\,t^{2H-2}\,m^2\,H(2H-1)\int_0^1\int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0}(1-v)^{1/2-H_0}|u-v|^{2H-2}du\,dv\ +$$

$$+2\,c^2\,t^{2H-2}\,m\,\sqrt{m_{t/(t+1)}}\,H(2H-1)\int_0^1\int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0}(1-v)^{1/2-H_0}|u-v|^{2H-2}du\,dv\ +$$

$$+c^2\,t^{2H-2}\,m_{t/(t+1)}\,H(2H-1)\int_0^1\int_0^1 (1-u)^{1/2-H_0}(1-v)^{1/2-H_0}|u-v|^{2H-2}du\,dv < +\infty.$$

Отже, δ_t - похідна в середньому квадратичному в точці $t>0$ функції $F(t)=t^{H_0-3/2}\Phi(t)$. □

Сформулюємо додаткові умови, при виконанні яких $\Phi(t)$ буде для майже всіх $\omega\in\Omega$ неперервно диференційованою на множинах вигляду $[r,R],\ \ R>r>0$.

<u>***Теорема 4.***</u> *Нехай виконуються умови <u>Теореми 3</u> та, крім того, β - невід'ємна, монотонно незростаюча і така, що $u\beta(u)$ - монотонно неспадна,*

тоді δ_t - неперервний процес на довільному відрізку $[r,R],\ \ R>r>0$.

<u>Доведення.</u>

Для довільних $t_2>t_1>0$: $\{t_1,t_2\}\subset[r,R]$, де $R>r>0$ - фіксовані, маємо:

$$\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^2 \le 2\,\mathrm{E}\left|\int_0^{t_1}\alpha(u)u\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_2}\right)-\frac{1}{t_1^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_1}\right)\right]dB_u^H\right|^2 +$$

$$+2\,\mathrm{E}\left|\int_{t_1}^{t_2}\alpha(u)\,u\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_2}\right)dB_u^H\right|^2=2H(2H-1)\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}\alpha(u)\,u\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_2}\right)-\frac{1}{t_1^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_1}\right)\right]\times$$

$$\times\alpha(v)\,v\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t_2}\right)-\frac{1}{t_1^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t_1}\right)\right]|u-v|^{2H-2}\,du\,dv+$$

$$+2H(2H-1)\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\alpha(u)\,u\,\alpha(v)\,v\left[\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{u}{t_2}\right)\frac{1}{t_2^2}K_{H_0}\left(1,\frac{v}{t_2}\right)\right]|\,u-v\,|^{2H-2}\,du\,dv=:M+N$$

Для N неважко отримати наступну оцінку

$$N\le L_2\,(t_2-t_1)^{1-2H_0+2H},$$

де $L_2=\dfrac{L_1}{r^{1-2H_0+2H}}$, $L_1=\dfrac{c^2H\,m^2}{1-H_0}+\dfrac{c^2\,2H(2H-H_0+1/2)m^2}{2^{2H-H_0-1/2}\,(3/2-H_0)(2H-2H_0+1)}>0$.

Знаайдемо тепер оцінку для M .

$$M=2H(2H-1)\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}\alpha(u)\alpha(v)\left[\frac{1}{t_1}\frac{u}{t_1}\beta\left(\frac{u}{t_1}\right)\left(1-\frac{u}{t_1}\right)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2}\frac{u}{t_2}\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\left(1-\frac{u}{t_2}\right)^{1/2-H_0}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t_1}\frac{v}{t_1}\beta\left(\frac{v}{t_1}\right)\left(1-\frac{v}{t_1}\right)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2}\frac{v}{t_2}\beta\left(\frac{v}{t_2}\right)\left(1-\frac{v}{t_2}\right)^{1/2-H_0}\right]|\,u-v\,|^{2H-2}\,du\,dv$$

Зауважимо, що $\forall u\in(0,t_1]$, використовуючи монотонність функцій $u\beta(u),\beta(u)$, маємо

$$\frac{1}{t_1}\frac{u}{t_1}\beta\left(\frac{u}{t_1}\right)\left(1-\frac{u}{t_1}\right)^{1/2-H_0}>\frac{1}{t_2}\frac{u}{t_2}\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\left(1-\frac{u}{t_2}\right)^{1/2-H_0},$$

а отже,

$$(t_1-u)^{1/2-H_0}\,t_2^{\,5/2-H_0}>(t_2-u)^{1/2-H_0}\,t_1^{\,5/2-H_0}.$$

Звідси

$$M\le c^2\,2H\,(2H-1)\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}t_2^{\,2}\,\frac{u}{t_2}\beta\left(\frac{u}{t_2}\right)\frac{v}{t_2}\beta\left(\frac{v}{t_2}\right)\left[\frac{1}{t_1^{\,5/2-H_0}}(t_1-u)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2^{\,5/2-H_0}}(t_2-u)^{1/2-H_0}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t_1^{\,5/2-H_0}}(t_1-v)^{1/2-H_0}-\frac{1}{t_2^{\,5/2-H_0}}(t_2-v)^{1/2-H_0}\right]|\,u-v\,|^{2H-2}\,du\,dv\le$$

$$\le\frac{c^2\,2H\,(2H-1)m^2t_2^{\,2}}{t_1^{\,5/2-H_0}}\int_0^{t_1}\left[t_2^{\,5/2-H_0}(t_1-u)^{1/2-H_0}-t_1^{\,5/2-H_0}\,(t_2-u)^{1/2-H_0}\right]\times$$

$$\times\int_0^{t_1}(t_1-v)^{1/2-H_0}\,|\,u-v\,|^{2H-2}\,dv\;du\,.$$

Нехай далі:

$$L_3=\frac{1}{2H-1}+\frac{2H-H_0+1/2}{(2H-1)(3/2-H_0)2^{2H-H_0-1/2}}>0\,,L_4:=\frac{c^2\,2H\,(2H-1)m^2R^{2H+1}}{r^{5/2-H_0}}L_3>0\,.$$

$L_5 =: \frac{L_4}{2-2H_0}\left[R^{7/2-3H_0}(R-r)^{2H_0-1}+R^{5/2-H_0}\right] > 0$, тоді $M \le L_5(t_2-t_1)^{2-2H_0}$.

Отже,

$$N+M \le L_2(t_2-t_1)^{1-2H_0+2H}+L_5(t_2-t_1)^{2-2H_0}=(t_2-t_1)^{2-2H_0}\left(L_2(t_2-t_1)^{2H-1}+L_5\right)\le$$

$$\le (t_2-t_1)^{2-2H_0}\left(L_2(R-r)^{2H-1}+L_5\right)=: L_6(t_2-t_1)^{2-2H_0}, \qquad L_6>0.$$

Тобто: $\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^2 \le L_6(t_2-t_1)^{2-2H_0}$.

Тепер слід зауважити, що δ_t - гаусівський процес і $\mathrm{E}\delta_t=0$, а отже виконується наступне:

$$\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^{2n}=(2n-1)!!\sigma^{2n}, \text{ де } \sigma^2=\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^2.$$

Виберемо n наступним чином: $n=\left[\frac{1}{2-2H_0}\right]+1$, тоді

$$\mathrm{E}\left|\delta_{t_2}-\delta_{t_1}\right|^{2n}=(2n-1)!!\sigma^{2n}\le(2n-1)!!L_6^{\,n}(t_2-t_1)^{n(2-2H_0)}, \qquad (9)$$

причому $n(2-2H_0)>1$.

Оцінка (9), в силу умов теореми Колмогорова ([5]), означає неперервність δ_t. □

<u>Зауваження 1</u>*. *Функції $\beta(t)\equiv 1$ та $\beta(t)=t^{1/2-H_0}$ задовольняють умови теорем 2-4.

Література

1. *Kleptsyna, M.L., Le Breton, A., Rouland, M.C.* An elementary approach to filtering in systems with fractional Brownian observation noise.// INRIA, Rapport de recherche, №349.- 1998. - 38 p.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск : Наука и Техника, 1987.- 688с.
3. *Norros, I.E., Valkeila, E.* and *Virtamo, J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. //Bernoulli.-1999.- № 6.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 342с
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.- М..: Наука, 1971. – Том. 1. -664с.