

**ДЕЯКІ МАКСИМАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ МОМЕНТІВ  
ВІНЕРІВСЬКИХ ІНТЕГРАЛІВ, ПОБУДОВАНИХ  
ЗА ФРАКТАЛЬНИМ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ**

КРВАВИЧ Ю.В., МІШУРА Ю.С.

10 Січня 2000 року

АБСТРАКТ. В даній роботі знайдено верхні та нижні оцінки в нерівності для моментів супремумів вінерівських інтегралів, побудованих за фрактальним броунівським рухом. Одержані оцінки застосовано до моментів розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, що містять фрактальний броунівський рух.

The upper and lower maximal estimations for moments of Wiener integrals with respect to fractional Brownian motions are established. They are applied to the solutions of stochastic differential equations involving fractional Brownian motion.

1. ВСТУП.

Розглянемо повний ймовірнісний простір  $(\Omega, F, P)$  з фільтрацією  $(F_t, t \geq 0)$ . Цю сукупність будемо позначати  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ . Далі скрізь в роботі будемо позначати через  $(B_t^H, (F_t)_{t \geq 0}, P)$  - фрактальний броунівський рух (ФБР) з індексом Хюрста  $H \in (1/2, 1)$ , що характеризується наступними властивостями:

- (1)  $B_t^H$  - процес зі стаціонарними приростами;
- (2)  $B_0^H = 0$ , та  $E B_t^H = 0$  для всіх  $t > 0$ ;
- (3)  $E (B_t^H)^2 = |t|^{2H}$  для всіх  $t > 0$ ;
- (4)  $B_t^H$  - гаусівський процес;
- (5) траєкторії випадкового процесу  $B_t^H$  є неперервними.

Для кожного  $t > 0$  будемо позначати

$$(B_t^H)^* := \sup_{s \leq t} |B_s^H|.$$

В силу автомодельності процесу  $B_t^H, t \geq 0$ , яку можна записати у вигляді  $B_{at}^H \stackrel{d}{=} a^H B_t^H$  ( $\stackrel{d}{=}$  - означає рівність за розподілом), маємо  $(B_{at}^H)^* \stackrel{d}{=} a^H (B_t^H)^*$ , звідки для довільного  $T > 0$   $E \left( (B_t^H)^* \right)^p = K(p, H) T^{pH}$ ,  $K(p, H) = E \left( (B_1^H)^* \right)^p$ ,  $p > 0$ . В роботі [1] наведені максимальні нерівності для  $B_\tau^H$ ,  $\tau$  - випадковий момент зупинки. Зокрема, для випадку  $H > 1/2$ , доведено, що для кожного  $p > 0$  і кожного випадкового моменту зупинки  $\tau$  існують константи  $c(p, H)$  та  $C(p, H)$  такі, що :

$$c(p, H) E(\tau^{pH}) \leq E((B_\tau^H)^*)^p \leq C(p, H) E(\tau^{pH}).$$

В даній роботі ми досліджуємо верхню та нижню оцінки в нерівності для моментів супремумів вінерівських інтегралів відносно ФБР. Перш ніж перейти до

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 60G15, 60G44, 60H10.

дослідження, слід нагадати саме означення вінерівського інтеграла відносно ФБР ([2],[3]).

Для  $H > 1/2$  визначимо інтегральний оператор  $\Gamma$ :

$$\Gamma f(t) = H(2H-1) \int_0^\infty f(s) |s-t|^{2H-2} ds,$$

а також визначимо скалярний добуток

$$\langle f, g \rangle_\Gamma = \langle f, \Gamma g \rangle = H(2H-1) \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)g(t) |s-t|^{2H-2} ds dt,$$

де  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - звичайний скалярний добуток в  $L_2[0, \infty)$ . Позначимо через  $L_2^\Gamma$  - простір еквівалентних класів вимірних функцій  $f$  таких, що  $\langle f, f \rangle_\Gamma < \infty$ . Тепер ясно, що відображення

$$B_t^H \mapsto \chi_{[0,t]}$$

можна продовжити до ізометрії між гаусовим простором, породженим  $B_t^H, t \geq 0$ , як найменшим замкненим лінійним підпростором  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , що містить  $B_t^H$ , та простором  $L_2^\Gamma$ . Для  $f \in L_2^\Gamma$ , інтеграл  $\int_0^\infty f(t) dB_t^H$  тепер можна визначити як образ функції  $f$  в цій ізометрії.

Зауважимо, що  $\mathbb{E} \left| \int_0^\infty f(t) dB_t^H \right|^2 = H(2H-1) \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)g(t) |s-t|^{2H-2} ds dt$ . Далі скрізь припускається, що  $f$  задовольняє умову

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t)f(s) |s-t|^{2H-2} ds dt < \infty. \quad (1)$$

В роботі [4] для інтегралів  $\int_a^b f(t) dB_t^H, 0 \leq a < b \leq \infty$ , які визначаються як

$$\int_a^b f(t) dB_t^H = \int_0^\infty \chi_{\{t \in [a,b]\}} f(t) dB_t^H, \text{ одержано оцінку}$$

$$\mathbb{E} \left( \left| \int_a^b f(t) dB_t^H \right|^p \right) \leq c(p, H) \|f\|_{L^{1/H}(a,b)}^p, \quad p > 0.$$

В роботі [5] одержано подібні оцінки для інтегралів вигляду

$$\int_a^b w(t,s) f(s) dB_s^{1/2},$$

де

$$w(t,s) = \begin{cases} \frac{c}{C} s^{-\alpha} (t-s)^{-\alpha} & , s \in (0, t) \\ 0 & , s > t \end{cases},$$

$\alpha = H - \frac{1}{2}$ ,  $C = \sqrt{\frac{H}{(H-\frac{1}{2})B(H-\frac{1}{2}, 2-2H)}}$ ,  $c = \frac{1}{B(H+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-H)}$ ,  $B_s^{\frac{1}{2}}$  - стандартний вінерівський процес.

В даній роботі одержано верхні та нижні оцінки для моментів супремумів інтегралів вигляду  $I_\tau = \int_0^\tau f(t) dB_t^H$  як для детермінованих, так і для випадкових  $\tau$ . Оцінки на детермінованих інтервалах одержані за рахунок гаусовості  $I_\tau$ , на випадкових - завдяки представленню ФБР за допомогою так званого мартингала Молчана ([6],[7],[3]). Ці оцінки суттєво залежать від властивостей функції  $f$ .

## 2. ВЕРХНЯ ОЦІНКА НА НЕВИПАДКОВОМУ ІНТЕРВАЛІ.

Позначимо  $\zeta_T^* := \left( \int_0^T f(s) dB_s^H \right)^* := \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(s) dB_s^H \right|$ . Зауважимо, що процес  $\zeta_t^* = \int_0^t f(s) dB_s^H$ ,  $t \in [0, T]$  - гаусівський, і значить, для нього мають місце ентропійні оцінки максимуму. В зв'язку з цим розглянемо на відрізку  $[0, T]$  напівметрику  $\rho_\zeta$ , породжену процесом  $\zeta_t$ , тобто

$$\rho_\zeta^2(s, t) := \mathbb{E} (\zeta_t - \zeta_s)^2 = \int_s^t \int_s^t f(u)f(v)|u - v|^{2H-2} du dv.$$

Позначимо  $N(T, \varepsilon)$  найменшу можливу кількість точок в  $\varepsilon$ -сітці відрізка  $[0, T]$ ,

$H(T, \varepsilon) = \ln N(T, \varepsilon)$  метричну  $\varepsilon$ -ентропію цього відрізка в напівметриці  $\rho_\zeta$ ,

$D(T, \varepsilon) = \int_0^\varepsilon H(T, u)^{1/2} du$ .

**Лема 1.** У введений напівметриці  $\rho_\zeta$  має місце оцінка

$$D(T, \varepsilon) \leq \int_0^\varepsilon \left[ \ln \left( 1 + v^{-1/H} C(H) \int_0^T |f(u)|^{1/H} du \right) \right]^{1/2} dv, \quad (2)$$

$C = C(H)$ -деяка постійна.

*Доведення.* В роботі [4] доведено, що

$$\int_0^T \int_0^T f(u)f(v)|u - v|^{2H-2} du dv \leq C_1(H) \|f\|_{L_{1/H}[0, T]}^2. \quad (3)$$

Тоді для будь-якого  $\varepsilon > 0$  метрична  $\varepsilon$ -ентропія відрізка  $[0, T]$ , очевидно, не перевищує  $\ln \left( 1 + \varepsilon^{-1/H} (C_1(H))^{1/2H} \int_0^T |f(u)|^{1/H} du \right)$ , звідки випливає (2) з  $C(H) = (C_1(H))^{1/2H}$ .

**Теорема 1.** Для будь-якого  $p > 0$  має місце оцінка

$$\mathbb{E} (\zeta_T^*)^p \leq C_p(H) \|f\|_{L_{1/H}(0, T)}^{pH}.$$

*Доведення.* Позначимо

$$\sigma^2 = \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \zeta_t^2 = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \int_0^t f(u)f(v)|u - v|^{2H-2} du dv.$$

Тоді, згідно з теоремою 1 ([8], с.141) і наслідком до неї, для будь-якого  $r > 4\sqrt{2}D(T, \sigma/2)$  має місце нерівність

$$P\{\zeta_T^* > r\} \leq 1 - \Phi \left( \frac{(r - 4\sqrt{2}D(T, \sigma/2))}{\sigma} \right),$$

де  $\Phi$  - функція стандартного нормального розподілу. Оскільки

$$\mathbb{E} (\zeta_T^*)^p \leq p \int_0^\infty x^{p-1} (1 - F(x)) dx,$$

де  $F(x) = P\{\zeta_T^* < x\}$ , то з (2) отримуємо ( $D = D(T, \sigma/2)$ )

$$\begin{aligned} E(\zeta_T^*)^p &\leq p \int_0^{4\sqrt{2}D} x^{p-1}(1-F(x)) dx + p \int_{4\sqrt{2}D}^{\infty} x^{p-1}(1-F(x)) dx \leq (4\sqrt{2}D)^p + \\ &\quad + p \int_0^{\infty} (x + 4\sqrt{2}D)^{p-1} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) dx \leq (4\sqrt{2}D)^p + \\ &\quad + p2^{p-1} \int_0^{\infty} x^{p-1} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) dx + p(4\sqrt{2}D)^{p-1} \int_0^{\infty} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) dx \leq \\ &\quad \leq (4\sqrt{2}D)^p + p2^{p-1}\sigma^p c_1(p) + p(4\sqrt{2}D)^{p-1}\sigma c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $c_1(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) dx$ ,  $c_2 = \int_0^{\infty} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) dx$ .

Далі, оцінимо  $D = D(T, \sigma/2)$ . В силу леми 1

$$\begin{aligned} D &\leq \int_0^{\sigma/2} \left[ \ln \left( 1 + v^{-1/H} C(H) \int_0^T |f(u)|^{1/H} du \right) \right]^{1/2} dv \leq \\ &\leq HC_3^H \int_0^{\infty} z^{1/2} \frac{e^z dz}{(e^z - 1)^{H+1}}, \end{aligned}$$

де  $c_3 = C(H) \int_0^T |f(u)|^{1/H} du$ .

Отже,  $D \leq c_4 \|f\|_{L_{1/H}(0,T)}$ . Далі, очевидно,  $\sigma \leq c_5 \|f\|_{L_{1/H}(0,T)}$ . Якщо підставити останні оцінки в (4), отримаємо доведення.

### 3. НИЖНЯ ОЦІНКА НА НЕВИПАДКОВОМУ ІНТЕРВАЛІ.

В роботі [4] наведено контрприклад, який показує, що оцінка, протилежна до (3), не має місця. Тому і нижня оцінка для  $\zeta_T^*$  буде гіршою, в порівнянні з теоремою 1. Далі в цьому розділі вважаємо, що  $f = f(s) > 0$  на  $[0, T]$ . Позначимо  $f_* = \inf_{s \in [0, T]} f(s)$ , і нехай  $f_* > 0$ .

**Теорема 2.** Для будь-якого  $T > 0$  має місце оцінка

$$E(\zeta_T^*)^p \geq C_p T^{pH} f_*^p.$$

*Доведення.* Згідно з нижньою оцінкою за Судаковим (теорема 5, [8], с.152), для будь-якого  $\varepsilon > 0$ ,

$$E(\zeta_T^*)^p \geq (E \zeta_T^*)^p \geq C_p H(T, \varepsilon)^{p/2} \varepsilon^p.$$

Але,  $H(T, \varepsilon) = \ln N([0, T], \varepsilon)$ , і, очевидно,  $N(T, \varepsilon) \geq 1 \vee \frac{Tf_*^{1/H}}{\varepsilon^{1/H}}$ . Тоді

$$H(T, \varepsilon) \geq \ln \left( 1 \vee \frac{Tf_*^{1/H}}{\varepsilon^{1/H}} \right).$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(\varepsilon) = \ln \left( 1 \vee \frac{Tf_*^{1/H}}{\varepsilon^{1/H}} \right)^{1/2} \quad \varepsilon, \varepsilon > 0$$

і знайдемо її найбільше значення. Достатньо розглянути  $\varepsilon < T^H f_*$ , і тоді

$$\max_{\varepsilon < T^H f_*} \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} e^{-1/2} T^H f_*,$$

звідси і отримуємо доведення.

## 4. ВЕРХНЯ ОЦІНКА НА ВИПАДКОВОМУ ІНТЕРВАЛІ.

Розглянемо процес  $I_t = \int_0^t f(s) dB_s^H$ ,  $t > 0$ , де  $f$  – детермінована, вимірна, додатня функція, що задовольняє умову (1). Покладемо, далі, для кожного  $t > 0$ :  $g(t) := \frac{1}{f(t)}$ , і нагадаємо, що  $\alpha = H - \frac{1}{2}$ .

**Теорема 3.** *Нехай функція  $s^\alpha f(s)$  монотонно не спадає на  $[0, \infty)$ . Тоді для кожного  $p > 0$  і випадкового моменту зупинки  $\tau$  існує константа  $C(p, H)$  така, що виконується нерівність*

$$\mathbb{E} (I_\tau^*)^p \leq C(p, H) \left( \mathbb{E} \left( (f(\tau))^{\frac{pH}{2H-1}} \tau^{pH} \right) \right)^{\frac{2H-1}{H}} \left( \mathbb{E} (\tau^{pH}) \right)^{\frac{1-H}{H}}.$$

*Зауваження 1.* Якщо  $|f(x)| \leq f^* < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то

$$\mathbb{E} |I_\tau^*|^p \leq C(p, H) (f^*)^p \mathbb{E} \tau^{pH}.$$

*Доведення.* Нехай

$$Y_t = \int_0^t s^{\frac{1}{2}-H} dB_s^H,$$

тоді

$$B_t^H = \int_0^t s^{H-\frac{1}{2}} dY_s,$$

і тому

$$I_t = \int_0^t s^{H-\frac{1}{2}} f(s) dY_s.$$

Використовуючи тепер, інтегрування за частинами, отримуємо верхню оцінку для  $I_t^*$ :

$$I_t^* = \sup_{s \leq t} |I_s| = \sup_{s \leq t} \left| t^\alpha f(t) Y_t - \int_0^t Y_s d(s^\alpha f(s)) \right| \leq 2f(t) t^\alpha Y_t^*.$$

Для процесу  $Y_t$ , використовуючи, згідно з теоремою 3.2 ([1]), його представлення через мартингал  $M_t = \int_0^t w(t, s) dB_s^H$ , а саме  $Y_t = 2H \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dM_s$ , можна отримати наступну оцінку

$$Y_t^* \leq 4Ht^\alpha M_t^*.$$

Із цих двох верхніх оцінок для кожного  $t > 0$  ми отримуємо

$$I_t^* \leq 8HM_t^* t^{2\alpha} f(t),$$

або ж для випадкового моменту зупинки  $\tau$  ми маємо

$$I_\tau^* \leq 8HM_\tau^* \tau^{2\alpha} f(\tau).$$

Звідси, для довільного  $p > 0$

$$\mathbb{E} (I_\tau^*)^p \leq (8H)^p \mathbb{E} (\tau^{2\alpha p} (f(\tau))^p (M_\tau^*)^p). \quad (5)$$

Використовуючи нерівність Гельдера до правої частини нерівності (5), отримаємо

$$\mathbb{E} (\tau^{2\alpha p} (f(\tau))^p (M_\tau^*)^p) \leq \left( \mathbb{E} (\tau^{2\alpha pq} (f(\tau))^{pq}) \right)^{\frac{1}{q}} \left( \mathbb{E} (M_\tau^*)^{pr} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

де  $q = \frac{H}{2\alpha} = \frac{H}{2H-1} > 1$  і  $r = \frac{H}{1-H}$ . Із загальної нерівності Буркхолдера-Девіса-Ганді випливає, що для довільного  $p > 0$  і випадкового моменту зупинки  $\tau$  існують константи  $c_p, C_p > 0$  такі, що справедлива наступна оцінка для мартингала  $M_t$

$$c_p c_2^p \mathbb{E} \tau^{p(1-H)} \leq \mathbb{E} (M_\tau^*)^p \leq c_2^p C_p \mathbb{E} \tau^{p(1-H)}.$$

Тепер, використовуючи її, отримуємо нерівність

$$\mathbb{E} (M_\tau^*)^{pr} \leq c_2^p C_p \mathbb{E} \tau^{\frac{1-2\alpha}{2} pr} = c_2^p C_p \mathbb{E} \tau^{pH}. \quad (6)$$

Покладемо  $C(p, H) := (8H)^p (c_2^p C_p)^{\frac{1-H}{H}}$  тоді

$$\mathbb{E} (I_\tau^*)^p \leq C(p, H) \left( \mathbb{E} \left( (f(\tau))^{\frac{pH}{2H-1}} \tau^{pH} \right) \right)^{\frac{2H-1}{H}} \left( \mathbb{E} \tau^{pH} \right)^{\frac{1-H}{H}},$$

і теорему доведено.

#### 5. Нижня оцінка на випадковому інтервалі.

Нехай  $T > 0$  фіксоване. Покладемо  $M_g(T) = \sup_{s \in (0, T]} g(s)$ .

**Теорема 4.** *Нехай для довільного  $t \in (0, T]$  функція  $g$  задовольняє нерівність*

$$g'(s) \geq \left( \frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha}{t-s} \right) g(s), \quad 0 < s < t. \quad (7)$$

Тоді для довільного  $p > 0$  та випадкового моменту зупинки  $\tau \leq T$  існує константа  $c(p, H) > 0$ , для якої виконується нерівність

$$\mathbb{E} (I_\tau^*)^p \geq c(p, H) (M_g(T))^{-p} \mathbb{E} \tau^{pH}.$$

*Доведення.* Нехай  $a, b \in (0, 1)$  є константи, такі що  $a < b$ . Тоді, використовуючи представлення мартингала  $M_t$  ([1]), маємо

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^{at} w(t, s) dB_s^H + \int_{at}^{bt} w(t, s) dB_s^H + \int_{bt}^t w(t, s) dB_s^H := \\ &:= M_t(a) + \int_{at}^{bt} w(t, s) g(s) dI_s + M_t(1-b). \end{aligned} \quad (8)$$

Інтегруючи за частинами середній доданок рівності (8), ми можемо оцінити його наступним чином:

$$\begin{aligned} \left| \int_{at}^{bt} w(t, s) g(s) dI_s \right| &= \left| w(t, bt) g(bt) I_{bt} - w(t, at) g(at) I_{at} - \int_{at}^{bt} I_s d(w(t, s) g(s)) \right| \leq \\ &\leq I_t^* \left( M_g(T) t^{-2\alpha} (b^{-\alpha} (1-b)^{-\alpha} + a^{-\alpha} (1-a)^{-\alpha}) + \int_{at}^{bt} |d(s^{-\alpha} (t-s)^{-\alpha} g(s))| \right). \end{aligned}$$

Далі спробуємо дослідити похідну функції  $\varphi(s) := s^{-\alpha} (t-s)^{-\alpha} g(s)$

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = s^{-\alpha-1} (t-s)^{-\alpha-1} (\alpha(2s-t)g(s) + (t-s)sg'(s)).$$

Використовуючи умову (7) теореми ми переконаємось, що  $\varphi$  є монотонно зростаючою на  $[0, t]$ , а отже її варіація на  $[at, bt]$  дорівнює

$$V_\varphi = t^{-2\alpha} (b^{-\alpha}(1-b)^{-\alpha}g(bt) - a^{-\alpha}(1-a)^{-\alpha}g(at)).$$

Звідси

$$\left| \int_{at}^{bt} w(t, s)g(s)dI_s \right| \leq C(a, b, H)M_g(T)t^{-2\alpha}I_t^*,$$

де  $C(a, b, H) = 2((b^{-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + a^{-\alpha}(1-a)^{-\alpha})$ . Тепер, ми можемо оцінити  $\xi_t := t^{2\alpha}|M_t|$  наступним чином

$$\xi_t = t^{2\alpha}|M_t| \leq t^{2\alpha}|M_t(a) + M_t(1-b)| + C(a, b, H)M_g(T)I_t^*.$$

Відомо ([1]), що для довільного  $p > 0$  та випадкового моменту зупинки  $\tau$  існує константа  $z_p > 0$  така, що справедлива наступна нижня оцінка для  $p$ -моменту (тобто моменту порядку  $p$ )  $\xi_t^*$ :

$$\mathbf{E}(\xi_\tau^*)^p \geq z_p \mathbf{E}(\tau^{pH}).$$

Звідси для випадкового моменту зупинки  $\tau$ :

$$z_p \mathbf{E} \tau^{pH} \leq (C(a, b, H))^p (M_g(T))^p \mathbf{E}(I_\tau^*)^p + \mathbf{E}(\tau^{2\alpha}|M_\tau(a) + M_\tau(1-b)|)^p.$$

Далі використаємо наступні оцінки, отримані в роботі [1]:

$$|M_\tau(a)| \leq 8H \left( \frac{a}{1-a} \right)^{H-\frac{1}{2}} M_\tau^*;$$

$$|M_\tau(1-b)| \leq 8H \left( \frac{1-b}{b} \right)^{H-\frac{1}{2}} M_\tau^*;$$

$$\mathbf{E}(\tau^{2H-1}M_\tau(a))^p \leq (8H)^p \left( \frac{a}{1-a} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} c_2^p C_p \mathbf{E} \tau^{pH};$$

$$\mathbf{E}(\tau^{2H-1}M_\tau(1-b))^p \leq (8H)^p \left( \frac{1-b}{b} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} c_2^p C_p \mathbf{E} \tau^{pH},$$

для того, щоб отримати нижню оцінку для  $p$ -моменту процесу  $I_\tau^*$ :

$$\mathbf{E}(I_\tau^*)^p \geq \frac{z_p - (8H)^p c_2^p C_p \left[ \left( \frac{a}{1-a} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} + \left( \frac{1-b}{b} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} \right]}{(C(a, b, H))^p} (M_g(T))^{-p} \mathbf{E} \tau^{pH}.$$

Тепер, взявши  $a$  достатньо близьким до 0 і  $b$  достатньо близьким до 1, можна отримати коефіцієнт  $c(p, H) := \frac{z_p - (8H)^p c_2^p C_p \left[ \left( \frac{a}{1-a} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} + \left( \frac{1-b}{b} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} \right]}{(C(a, b, H))^p}$  нижньої оцінки додатнім. Звідси отримуємо доведення теореми.

*Зауваження 2.* Клас функцій, що задовольняє умові (7) є непорожнім. До нього належать, наприклад функції вигляду  $g(s) = s^\gamma e^{\beta s}$ ,  $s > 0$ ,  $\gamma \geq \alpha$ ,  $\beta \geq 0$ .

6. ОЦІНКИ МОМЕНТІВ НА ВИПАДКОВОМУ ІНТЕРВАЛІ ДЛЯ  
ДЕЯКОГО КЛАСУ ПІДІНТЕГРАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ.

Із вище викладених результатів видно, що структура оцінок для моментів супремумів вінерівських інтегралів відносно ФБР суттєво залежить як і від виду самої підінтегральної функції, так і від її властивостей.

В наступній теоремі знайдено верхню та нижню оцінки на випадковому інтервалі для моментів супремумів вінерівських інтегралів відносно ФБР з підінтегральними степеневими функціями. В цьому випадку умови теорем 3 та 4 можна послабити. Нехай далі функція  $f(s) = s^\gamma$ ,  $\gamma > -2\alpha$ ,  $I_\tau = \int_0^\tau s^\gamma dB_s^H$ . Тоді справедлива наступна теорема.

**Теорема 5.** Для кожного  $p > 0$  і випадкового моменту зупинки  $\tau$  існують константи  $c(p, H), C(p, H) > 0$ , для яких виконується нерівність

$$c(p, H) \mathbb{E} \tau^{p(H+\gamma)} \leq \mathbb{E} (I_\tau^*)^p \leq C(p, H) \mathbb{E} \tau^{p(H+\gamma)}. \quad (9)$$

*Доведення.* 1) *Верхня оцінка.* Використовуючи міркування, аналогічні до викладок в теоремі 3, можна легко отримати наступну оцінку

$$\mathbb{E} (I_\tau^*)^p \leq (8H)^p \mathbb{E} \left( \tau^{(2\alpha+\gamma)p} (M_\tau^*)^p \right). \quad (10)$$

Застосуємо тепер, нерівність Гельдера до правої частини нерівності (10), щоб отримати

$$\mathbb{E} \left( \tau^{(2\alpha+\gamma)p} (M_\tau^*)^p \right) \leq \left( \mathbb{E} \tau^{(2\alpha+\gamma)pq} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \mathbb{E} (M_\tau^*)^{pr} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

де  $q = \frac{1+2\alpha+2\gamma}{4\alpha+2\gamma} > 1$  і  $r = \frac{1+2\alpha+2\gamma}{1-2\alpha}$ . Далі, використовуючи верхню оцінку (6) для моменту  $M_t^*$  і означення константи  $C(p, H)$  з теоремі 3, отримуємо верхню оцінку.

2) *Нижня оцінка.* Як і в доведенні теоремі 4, для  $a, b \in (0, 1)$   $a < b$  розглянемо розклад (8) мартингала  $M_t$  і спробуємо оцінити середній доданок цього розкладу. Похідна функції  $\varphi$ , введеної в доведенні теоремі 4, при  $g(s) = s^{-\gamma}$ ,  $\gamma > -2\alpha$  тепер дорівнює

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = s^{-\alpha-\gamma-1}(t-s)^{-\alpha-1} ((\gamma+2\alpha)s - (\gamma+\alpha)t)$$

і має одну точку екстремума на відрізку  $[0, t]$   $dt$ ,  $d = \frac{\gamma+\alpha}{\gamma+2\alpha}$  при  $\gamma > -\alpha$ , і не має жодної при  $-2\alpha \leq \gamma \leq -\alpha$ . Її варіацію  $V_\varphi$  на відрізку  $[at, bt]$  можна оцінити наступним чином

$$V_\varphi \leq t^{-2\alpha-\gamma} (b^{-\gamma-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + 2|d|^{-\gamma-\alpha}(1-d)^{-\alpha} + a^{-\gamma-\alpha}(1-a)^{-\alpha}).$$

Звідси

$$\left| \int_{at}^{bt} w(t, s) s^{-\gamma} dI_s \right| \leq C(a, b, H, \gamma) t^{-2\alpha-\gamma} I_t^*,$$

де  $C(a, b, H, \gamma) = 2 \frac{c}{C} (b^{-\gamma-\alpha}(1-b)^{-\alpha} + |d|^{-\gamma-\alpha}(1-d)^{-\alpha} + a^{-\gamma-\alpha}(1-a)^{-\alpha})$ .

Для процесу  $\xi_t = t^{2\alpha+\gamma} |M_t|$  маємо

$$\xi_t \leq t^{2\alpha+\gamma} |M_t(a) + M_t(1-b)| + C(a, b, H, \gamma) I_t^*.$$

Звідси, для випадкового моменту зупинки  $\tau$  та довільного  $p > 0$  маємо

$$\mathbb{E} (\xi_\tau^*)^p \leq (C(a, b, H, \gamma))^p \mathbb{E} (I_\tau^*)^p + \mathbb{E} (\tau^{2\alpha+\gamma} |M_\tau(a) + M_\tau(1-b)|)^p.$$

Оцінимо, тепер, для довільного  $p > 0$   $p$ -момент процесу  $\xi_t^*$ . За формулою Іто для процесу  $\xi_t^2$  і обмеженого випадкового моменту зупинки  $\tau$  маємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \xi_\tau^2 &= \mathbb{E} \left( \tau^{4\alpha+2\gamma} |M_\tau|^2 \right) = \mathbb{E} \left( (4\alpha + 2\gamma) \int_0^\tau M_s^2 s^{4\alpha+2\gamma-1} ds + \int_0^\tau s^{4\alpha+2\gamma} 2M_s dM_s \right) + \\ &+ \mathbb{E} \left( \int_0^\tau s^{4\alpha+2\gamma-2\alpha} ds \right) \geq \frac{1}{1+2\alpha+2\gamma} \mathbb{E} \tau^{1+2\alpha+2\gamma}. \end{aligned}$$

Для випадку  $p \neq 2$  можна довести нерівність

$$\mathbb{E} (\xi_\tau^*)^p \geq z_p \mathbb{E} \tau^{p(\gamma+H)}, \quad z_p > 0 \quad (11)$$

аналогічно до доведення лема 3.1 ([1]), з використанням нерівності Ленгляра, а також представлення Новікова з роботи [9]. Далі, використовуючи оцінку (6) моменту  $M_\tau^*$  і нерівність Гельдера з показниками  $q = \frac{1+2\alpha+2\gamma}{4\alpha+2\gamma} > 1$  та  $r = \frac{1+2\alpha+2\gamma}{1-2\alpha} > 1$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  отримуємо оцінки  $p$ -моментів  $\tau^{2\alpha+\gamma} M_\tau(a)$  і  $\tau^{2\alpha+\gamma} M_\tau(1-b)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\tau^{\gamma+2\alpha} M_\tau(a))^p &\leq (8H)^p \left( \frac{a}{1-a} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} \left( \mathbb{E} \tau^{(2\alpha+\gamma)pq} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \mathbb{E} (M_\tau^*)^{pr} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq (8H)^p \left( \frac{a}{1-a} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} (c_2^p C_p)^{\frac{1}{r}} \mathbb{E} \tau^{p(H+\gamma)}, \end{aligned} \quad (12)$$

аналогічно

$$\mathbb{E} (\tau^{\gamma+2\alpha} M_\tau(1-b))^p \leq (8H)^p \left( \frac{1-b}{b} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} (c_2^p C_p)^{\frac{1}{r}} \mathbb{E} \tau^{p(H+\gamma)}. \quad (13)$$

звідси з (11)-(13) отримуємо нижню оцінку  $p$ -моменту процесу  $I_\tau^*$ :

$$\mathbb{E} (I_\tau^*)^p \geq c(p, H) \mathbb{E} \tau^{p(H+\gamma)},$$

де

$$c(p, H) = \frac{z_p - (8H)^p (c_2^p C_p)^{\frac{1}{r}} \left[ \left( \frac{a}{1-a} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} + \left( \frac{1-b}{b} \right)^{p(H-\frac{1}{2})} \right]}{(C(a, b, H, \gamma))^p}.$$

Тепер, взявши  $a$  достатньо близьким до 0 і  $b$  достатньо близьким до 1, можна отримати коефіцієнт  $c(p, H)$  нижньої оцінки додатнім. Теорему доведено.

## 7. Оцінки моментів розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь, що містять ФБР.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння вигляду

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t) dB_t^H, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

де коефіцієнт  $a(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  - вимірна функція, що задовольняє умову Ліпшиця

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq L_1 |x - y| \quad (15)$$

з деякою постійною  $L_1 > 0$  та умову росту

$$|a(t, x)| \leq L_2(1 + |x|), \quad (16)$$

$b$  задовольняє умову (1) та умову неперервності процесу  $I_t = \int_0^t b(v) dB_v^H$ . Оскільки процес  $I_t$  гаусівський, то, згідно [8, с.169], достатньою умовою його неперервності є скінченність інтеграла Дадлі. Нехай функція  $b \in L_{1/H}[0, T]$  для будь-якого  $T > 0$ . Тоді для інтеграла Дадлі має місце оцінка (2), причому права частина нерівності (2), в свою чергу оцінюється величиною  $\int_0^\varepsilon v^{-\frac{1}{2H}} dv C(H) \|b\|_{L_{1/H}[0, T]}^2 < \infty$ . Тобто, за умови  $b \in L_{1/H}[0, T]$ ,  $T > 0$  інтеграл  $I_t$  має неперервну модифікацію, яка і буде розглядатись.

**Теорема 6.** Нехай функція  $a$  задовольняє умову (15), функція  $b$  – умову

$$b \in L_{1/H}[0, T], \text{ для довільного } T > 0. \quad (17)$$

Тоді на  $[0, \infty)$  існує єдиний неперервний розв'язок  $X_t$  стохастичного диференціального рівняння (14).

*Доведення.* Спочатку покажемо, що оператор

$$(AX)_t := \xi_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + I_t,$$

де  $\xi_0 \in F_0$  – вимірна випадкова величина,  
є оператором стиску в будь-якому просторі

$$S_p := \{\xi(t, \omega), 0 \leq t \leq T_p, \xi(t) - F_t \text{- вимірна, } \sup_{0 \leq t \leq T_p} \mathbb{E} |\xi_t|^p < \infty\}, p > 1,$$

з нормою  $\|\xi\| = \left( \sup_{0 \leq t \leq T_p} \mathbb{E} |\xi_t|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ , якщо  $\mathbb{E} |\xi_0|^p < \infty$ ,  $T_p < L_1^{\frac{p}{1-p}}$ .

Справді, з умов (15), (16), для  $x \in S_p$  маємо

$$\mathbb{E} |(AX)_t|^p \leq C_p \left( \mathbb{E} |\xi_0|^p + \mathbb{E} |I_t|^p + C(T_p) L_2 \left( 1 + \int_0^t \mathbb{E} |X_s|^p \right) \right),$$

$C_p, C(T_p) > 0$ ,

тобто  $AX \in S_p$ , якщо  $X \in S_p$ ;

далі,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |(AX)_t - (AY)_t|^p &\leq \mathbb{E} \left( \int_0^t (a(s, X_s) - a(s, Y_s)) ds \right)^p \leq \\ &\leq L_1 \mathbb{E} \left( \int_0^t |X_s - Y_s| ds \right)^p \leq L_1^p T_p^{p-1} \mathbb{E} \int_0^t |X_s - Y_s|^p ds, \end{aligned}$$

тобто  $\|AX - AY\| \leq L_1 T_p^{1-\frac{1}{p}} \|X - Y\| =: L \|X - Y\|$ , де  $L < 1$ . Отже, на відрізку  $[0, T_p]$  рівняння (14) має єдиний розв'язок. Крім того, якщо шукати цей розв'язок методом послідовних наближень, причому взяти за нульове наближення  $X_s^0 \in S_p$ ,  $X^0$  – неперервний процес на  $[0, T_p]$ , то з неперервності інтегралів  $\int_0^t a(s, \cdot) ds$  та  $I_t$  ми отримаємо:  $X_t$  – неперервний процес в  $S_p$ . Доведення теореми отримаємо тепер, якщо будемо ”продовжувати” розв'язок, а саме, розглянемо ”наступне” рівняння

$$X_t = \xi_0^{(k)} + \int_{kT_p}^t a(s, X_s) ds + (I_t - I_{kT_p}), \quad (18)$$

$k \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_0^{(k)} = X_{kT_p}$  – розв'язок ”попереднього” рівняння, взятий в точці  $t = kT_p$ . Існування, єдиність та неперервність розв'язку рівняння (18) доводиться аналогічно до попереднього.

Покладемо тепер для будь-якого  $C > 0$  і довільного моменту зупинки  $\tau$

$$\tau_c := \tau \wedge \inf\{t > 0 : |X_t| \geq C\}$$

Зауважимо, що згідно з теоремою 6, розв'язок рівняння (14) є неперервним на  $[0, \tau_c]$ .

Покладемо ще

$$\zeta_\tau^* := \sup_{t \leq \tau} |X_t|.$$

**Теорема 7.** Нехай функція  $a$  задовольняє умови (15) і (16), функція  $b$  задовольняє умову (17) та умову теореми 3. Тоді:

1) для довільного  $T > 0$  і довільного моменту зупинки  $\tau \leq T$  має місце оцінка

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\zeta_\tau^*)^p &\leq 4^p e^{4^p L_1^p T^{p-1}} \times \\ &\times \left( \mathbb{E} |X_0|^p + L_1^p T^p + C(p, H) \left( \mathbb{E} \left( (b(\tau))^{\frac{pH}{2H-1}} \tau^{pH} \right) \right)^{\frac{2H-1}{H}} \left( \mathbb{E} \tau^{pH} \right)^{\frac{1-H}{H}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

де  $C(p, H)$  – константа, визначена в теоремі 3.

2) якщо, крім того, функція  $b$  обмежена, то для тих же моментів зупинки має місце оцінка

$$\mathbb{E} (\zeta_\tau)^p \leq 4^p e^{4^p L_1^p T^{p-1}} \left( \mathbb{E} |X_0|^p + L_1^p T^p + C(p, H) (b^*)^p \mathbb{E} \tau^{pH} \right), \quad (20)$$

де  $b^* := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |b(x)|$ .

*Доведення.* Так як функція  $a$  задовольняє умови теореми 6, то існує єдиний неперервний на  $[0, \infty)$  розв'язок рівняння (14). Використовуючи умови (15), (16) оцінимо спочатку  $p$ -момент  $\zeta_{\tau_c}^*$

$$\begin{aligned} (\zeta_{\tau_c}^*)^p &\leq \left( |X_0| + L_1 \tau_c + L_1 \int_0^{\tau_c} \zeta_s^* ds + I_{\tau_c}^* \right)^p \leq \\ &\leq 4^p \left( L_1 \int_0^{\tau_c} \zeta_s^* ds \right)^p + 4^p |X_0|^p + 4^p L_1^p \tau_c^p + 4^p (I_{\tau_c}^*)^p \leq \\ &\leq 4^p L_1^p \int_0^{\tau_c} (\zeta_s^*)^p ds \tau_c^{p-1} + 4^p |X_0|^p + 4^p L_1^p \tau_c^p + 4^p (I_{\tau_c}^*)^p. \end{aligned}$$

Звідси, за нерівністю Гронула

$$(\zeta_{\tau_c}^*)^p \leq 4^p e^{4^p L_1^p \tau_c^{p-1}} \left( |X_0|^p + L_1^p \tau_c^p + (I_{\tau_c}^*)^p \right),$$

а отже

$$\mathbb{E} (\zeta_{\tau_c}^*)^p \leq 4^p e^{4^p L_1^p T^{p-1}} \left( \mathbb{E} |X_0|^p + L_1^p T^p + \mathbb{E} (I_{\tau_c}^*)^p \right).$$

Звідси, застосовуючи теорему 3 і зауваження до неї для оцінювання  $p$ -моменту  $I_{\tau_c}^*$ , отримуємо 1) та 2) для  $\tau = \tau_c$ . Теорему доведемо, якщо перейдемо до границі при  $C \rightarrow \infty$ .

#### REFERENCES

1. Novikov, A. and Valkeila, E., *On some maximal inequalities for fractional Brownian motions*, Statistics&Probability Letters **44** (1999), 47–55.
2. Huang, S. and Cambanis, S., *Stochastic and multiple Wiener itnaegrals for Gaussian processes*, The Annals of Probability **6** (1978), 585–614.
3. Norros, I., Valkeila, E. and Virtamo, J., *An elementary approach to a Girsanov formula and other analitical results on fractional Brownian motions*, Bernoulli **5** (1999), 571–587.
4. Mémin, J., Mishura, Yu. and Valkeila, E., *Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to fractional Brownian motions*, Preprint **5** (1999), 571–587.
5. Alos, E., *Maximal inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to fractional Brownian motions*, Manuscript (1999).
6. Молчан Г.М., *Гауссовские процессы с асимптотически степенным спектром*, Теория вероятностей и ее применение **14** (1969), 556–559.

7. Молчан Г.М., Голосов Ю.И., *Гауссовские стационарные процессы с асимптотически степенным спектром*, Доклады АН СССР т.**184** (1969), 546–549.
8. Лифшиц М.А., *Гауссовские случайные функции*, Теория вероятностей и мат. статистика (1999), по. Киев:ТВиМС, 571–587.
9. Новиков, А.А., *О неравенствах моментов для стохастических интегралов*, Теория вероятностей и ее применение **16** (1971), 538–541.

КАФ. МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ПРОСП. ГЛУШКОВА 6, КИЇВ 03127, УКРАЇНА.  
*E-mail address:* [krvavych@yahoo.com](mailto:krvavych@yahoo.com)

КАФ. МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ПРОСП. ГЛУШКОВА 6, КИЇВ 03127, УКРАЇНА.  
*E-mail address:* [myus@mechmat.univ.kiev.ua](mailto:myus@mechmat.univ.kiev.ua)