Расчет страховых тарифов для малочисленных объектов с особыми характеристиками риска.

*Как известно при любой операции страхования существует риск, и для того, чтобы эта операция была осуществлена, страхователь должен «купить» этот риск по определенной цене, которая, в принципе, определяется страховым тарифом *. В данной работе изложен иллюстрационный метод оценки риска страхования малочисленных объектов с особыми характеристиками риска.*

Юрий Крвавич

Аспирант
КУ им. Т. Шевченка

Актуарий
НАСК "Оранта"

Киев

Игорь Ковтун

Начальник отдела актуарных расчетов и страховой статистики

НАСК "Оранта"

Киев

Предположим, у некоторой страховой компании появляется стратегический клиент (например, это может быть крупное предприятие, которое, уже по роду своей деятельности, характеризуется крупным и опасным страховым риском), который желает застраховать свое имущество на страховую сумму S, существенно превышающую среднее значение страховых сумм по всему портфелю компании. Также будем считать, что таких объектов страхования на территории Украины немного (скажем, в пределах 10). Следовательно, они имеют особенные характеристики риска. А именно, пусть p – вероятность наступления страхового события, k – случайный коефициент (в %) повреждения имущества, при условии, что это страховое событие произошло. Следует заметить, что на практике случайная величина (далее с.в.) k хорошо описывается Бэта-распределением, но в данной работе, для удобства иллюстрации результатов, предполагается равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ с.в. k.

Теперь перед актуариями компании стоит задача – рассчитать страховой тариф для данного объекта, при котором можно было бы с большой вероятностью гарантировать безубыточность этого страхования. Естественно, если бы клиентами компании были даже все объекты данного вида (а их, как мы условились, не более десяти), то применить методику расчета страховых тарифов по массовым рисковым видам, основанного на центральной предельной теореме (см. **[1]**), в этом случае нельзя.

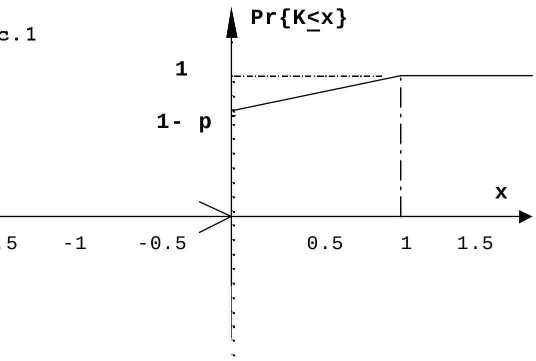
Если рассчитывать страховой тариф по данному объекту исходя только из распределения его индивидуального иска

$X = K \cdot S = I \cdot k \cdot S$, где $I = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$,

то довольно малой окрестности требуемой вероятности безубыточности страхования соответствует почти весь интервал *(0%, 100%)* страховых тарифов (состояние неопределенности (рис. 1)). Это видно из следующих соображений: функция распределения (см. **[2]**) с.в. K равна

$$\begin{aligned} &Pr\{K \le x\} = Pr\{I \cdot k \le x\} = \\ &= Pr\{I \cdot k \le x | I = 1\} \cdot Pr\{I = 1\} + \\ &+ Pr\{I \cdot k \le x | I = 0\} \cdot Pr\{I = 0\} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p \cdot (1 - x), & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Рис.1



Авторы данной работы предлагают расчет страхового тарифа, основываясь на оценке риска страхования по некоторой группе договоров G, которая состоит из данного объекта и уже действующего, однородного и хорошо сбалансированного портфеля договоров.

В любой крупной страховой компании всегда можно найти такой портфель. Поэтому мы предполагаем, что такой портфель P существует, N - количество его договоров; S_0 - страховая сумма по каждому договору P; $K_i \cdot S_0$ - случайная величина индивидуального иска по i - му договору P с параметрами $E(K_i) = m;\ Var(K_i) = d^2, i = \overline{1, N}$.

Пусть далее z_0 - страховой тариф для действующих договоров P; z - искомый страховой тариф для данного объекта; $L := \dfrac{S}{S_0}$ все договоры имеют одинаковый срок действия.

*) – везде в работе под страховыми тарифами понимают нетто-тариф.

Следует заметить, что $z_0 = m + \Phi^{-1}(0.95) \cdot \dfrac{d}{\sqrt{N}}$,

поэтому, рассматривая договора P в новой группе G, новый тариф для них будет равен $(1+\alpha)\cdot z_0$, где

$\alpha \in [0,1]$; Φ - функция стандартного нормального распределения.

Тогда страховой резерв по группе G в конце срока действия договоров равен

$$R_G = (1+\alpha)\cdot z_0 \cdot N \cdot S_0 + z \cdot L \cdot S_0 -$$

$$-\sum_{i=1}^{N} K_i \cdot S_0 - K \cdot L \cdot S_0$$

Дальше мы требуем, чтобы с вероятностью $\gamma \ge 0.95$ выполнялось неравенство $R_G \ge 0$, то есть

$$Pr\{R_G \ge 0\} = Pr\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{N}(K_i - m)}{\sqrt{N}\cdot d} + \frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot K \le \right.$$

$$\left. \le \frac{\alpha \cdot z_0 \cdot \sqrt{N}}{d} + \Phi^{-1}(0.95) + \frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot z \right\} =:$$

$$=: F_{N,L}\left(\frac{\alpha \cdot z_0 \cdot \sqrt{N}}{d} + \Phi^{-1}(0.95) + \frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot z \right) =$$

$$= \gamma \ge 0.95,$$

где $F_{N,L} -$ функция распределения суммы независимых случайных величин

$\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(K_i - m)}{\sqrt{N}\cdot d}$ и $\dfrac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot K$; как известно (см.**[2]**, **[3]**) она равна свертке функций распределений каждой из этих случайных величин. Заметим, что при большом N функция распределения с.в. $\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(K_i - m)}{\sqrt{N}\cdot d}$ совпадает с Φ с довольно высоким порядком точности; для с.в. $\dfrac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot K$ функция распределения равна

$$F_L(x) := Pr\left\{ \frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot K \le x \right\} =$$

$$= Pr\left\{ K \le \frac{\sqrt{N}\cdot d}{L}\cdot x \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p\cdot\left(1 - \dfrac{\sqrt{N}\cdot d}{L}\cdot x\right), & x \in \left[0, \dfrac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\right] \\ 1, & x > \dfrac{L}{\sqrt{N}\cdot d} \end{cases}$$

Отсюда, с помощью интегрирования по частям, мы можем найти $F_{N,L}$, а именно

$$F_{N,L}(x) = (\Phi * F_L)(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-t)\,dF_L(t) = \Phi(x)\cdot(1-p) +$$

$$+ p\cdot\frac{\sqrt{N}\cdot d}{L}\cdot \int_0^{L/\sqrt{N}\cdot d} \Phi(x-t)\,dt =$$

$$= \Phi(x)\cdot(1-p) + p\cdot\Phi\left(x - \frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\right) +$$

$$+ p\cdot\frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\cdot\left\{ x\cdot\left(\Phi(x) - \Phi\left(x - \frac{L}{\sqrt{N}\cdot d}\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(e^{\frac{-(x-\frac{L}{\sqrt{N}\cdot d})^2}{2}} - e^{\frac{-x^2}{2}} \right) \right\}.$$

Следовательно, мы находим

$$z = \frac{\sqrt{N}\cdot d}{L}\cdot\left(F_{N,l}^{-1}(\gamma) - \Phi^{-1}(0.95)\right) -$$

$$- \frac{\alpha\cdot N}{L}\cdot z_0$$

При расчете тарифа z следует обратить внимание на свойства функции $F_{N,L}$:

a) $F_{N,L}$ - непрерывная, возрастающая;

b) $F_{N,L}(x) \to 0, x \to -\infty$;

c) $F_{N,L}(x) \to 1, x \to +\infty$;

d) для любого действительного x выполняется неравенство $F_{N,L}(x) \le \Phi(x)$ (фрагмент этих функций на рис.2).

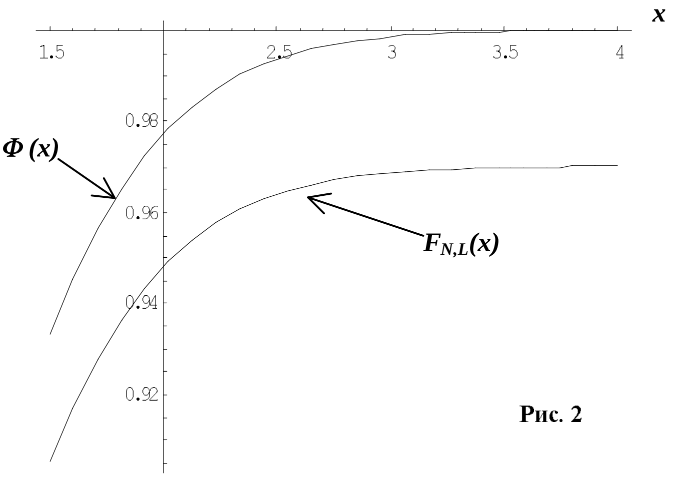


Рис. 2

Теперь рассмотрим конкретный пример. Пусть страховая сумма по данному объекту равна $S = 5\,000\,000$ гривен; на протяжении последних десяти лет среди всех объектов (их не более 10) произошло **2** события, соответствующие страховому риску данного объекта, то есть $p = 0.02$; также существует портфель P, количеством $N = 12000$ договоров, для каждого из которых:

1) страховая сумма равна $S_0 = 2500$ гривен;
2) действующий нетто-тариф, гарантирующий с вероятностью **0,95** безубыточность страхования по портфелю договоров P, равен $z_0 = 0.11\%$ (страховой нетто-взнос равен **2,75** гривен) и рассчитан с помощью параметров $m = 0.00073$ и $d^2 = 0.00062$ внутренней страховой статистики портфеля P.

Тогда искомый тариф z, гарантирующий с вероятностью $\gamma = 0.97$ безубыточность страхования по группе договоров G, линейно зависит от коефициента α так, как показано на рис.3.

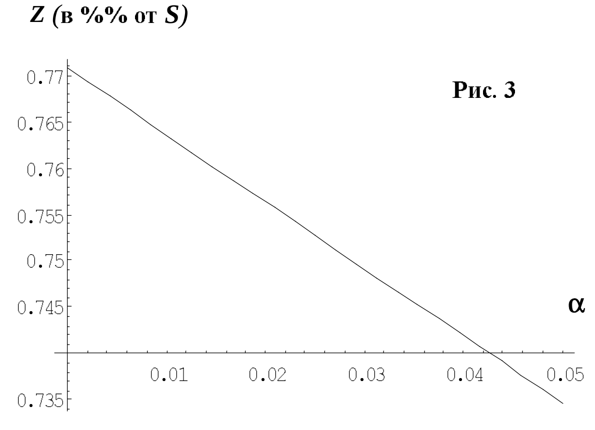


Рис. 3

В заключение данной работы хотелось бы заметить, что при условии Бэта-распределения с.в. k исследование аналитической формы функции распределения $F_{N,L}$ еще не завершено и является тематической частью плана написания кандидатской диссертации одним из соавторов. Также следует заметить, что построение графика функции $F_{N,L}$ осуществлялось с помощью программного пакета **Mathematica 3.0** .

Литература

[1]. ***Фалин Г.И.*** **«Математический анализ рисков в страховании»** **М.: Российский юридический издательский дом, 1994.**

[2]. ***Феллер В.*** **«Введение в теорию вероятностей и ее приложения»** **М.:Мир,1984,т.1,2.**

[3]. ***Петров В.В.*** **«Суммы независимых случайных величин»** **М.:Наука,1972.**