

PROGRAMA:

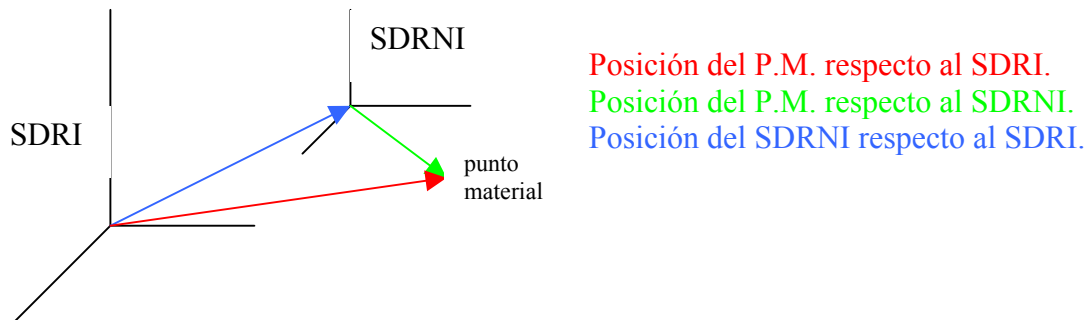
1. Fundamentos de la mecánica newtoniana. Sistemas inerciales y principio de relatividad de Galileo. Leyes de Newton. Ecuaciones de la dinámica newtoniana en sistemas no inerciales. Movimiento de una partícula sobre la superficie terrestre. El péndulo de Foucault.
2. Mecánica lagrangiana: Ligaduras, coordenadas generalizadas y espacio de configuración. Principio de D'Alembert. Ecuaciones de Lagrange para sistemas con ligaduras holónomas y cinemáticas lineales. Formulación lagrangiana del movimiento relativo a sistemas no inerciales.
3. Leyes de conservación en mecánica lagrangiana. Cálculo variacional. Principio de Hamilton. Integración de las ecuaciones del momento. Constantes del movimiento. Teorema de Noether.
4. Introducción a la mecánica hamiltoniana: Espacio de fases. Ecuaciones canónicas de Hamilton. Paréntesis de Poisson.
5. El problema de los dos cuerpos. Reducción al problema equivalente de un solo cuerpo. Campo de fuerzas central. El problema de Kepler. Dispersión en un campo de fuerzas central. Fórmula de Rutherford.
6. Fundamentos de la teoría de la relatividad especial: Incompatibilidad de la mecánica newtoniana y el electromagnetismo. Hechos experimentales. Postulados de Einstein. El espacio-tiempo en la relatividad especial.
7. Cinemática relativista: Transformaciones de Lorentz. Ley de composición de velocidades. Formulación cuadridimensional.
8. Dinámica relativista: La energía y el momento relativistas. Conservación del cuadrimomento. La equivalencia entre masa y energía. Colisiones relativistas. Sistemas de laboratorio y de centro de masas. Formulación lagrangiana de la mecánica relativista.

MECÁNICA ANALÍTICA



Apuntes de: Pablo M. García Corzo
A partir de las clases de *E. Maciá Barber*

Teorema de Coriolis:



$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{SDRI} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{SDRNI} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$$m \cdot \vec{a}_{NI} = \sum \vec{F} - m \left[\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \right]$$

Donde:

$$\left| \begin{array}{l} \ddot{\vec{R}} \rightarrow \text{Arrastre} \\ \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \rightarrow \text{Azimutal} \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \rightarrow \text{Comp. Centrífuga} \\ 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{NI} \rightarrow \text{Coriolis} \end{array} \right.$$

SISTEMAS DISIPATIVOS

Los consideraremos sólo si actúan en la dirección del sistema (y en oposición de sentidos).

$F(v) \Rightarrow$ sólo depende de la velocidad del sistema.

$$F(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2$$

a_0 , Rozamiento Coulombiano

$$\text{Dinámico: } m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \Rightarrow v - v_0 = -\mu g t \Rightarrow x = x_0 + \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

a_1 , Disipación de Stokes

$$m \frac{dv}{dt} = -6R\pi\eta v = a_1 v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{a_1}{m} dt \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \mapsto \tau^{-1} \text{cte. Tiempo}$$

¡v sólo llega a 0 en un tiempo infinito!

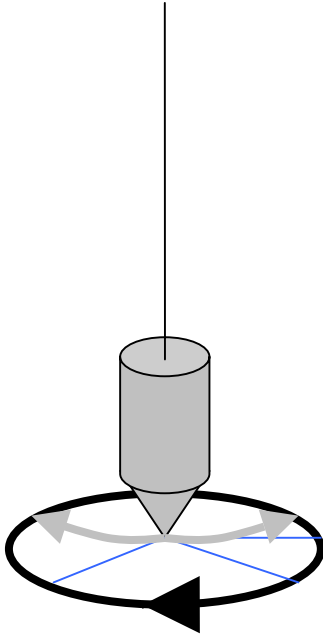
$$x = x_0 + v_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_\infty = x_0 + v_0 \tau$$

Sin embargo no recorre un espacio infinito.

a_2 , Newton

$$\text{-Froude: } m \frac{dv}{dt} = -\beta v^2 \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + \left(\frac{v_0 \beta}{m} \right) t} \Rightarrow x = x_0 + \frac{m}{\beta} \log \left(1 + \left(\frac{v_0 \beta}{m} \right) t \right)$$

Péndulo de Foucault:



Básicamente, se trata de demostrar que la tierra gira, y que no es, por tanto, un sistema de referencia inercial.

Para ello, se monta un péndulo de grandes dimensiones que describirá, además de las oscilaciones normales de todo péndulo, un movimiento lento de giro como se muestra en el dibujo.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x - 2mw_0(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \operatorname{sen} \lambda) \\ m\ddot{y} = F_y - 2mw_0\dot{x} \operatorname{sen} \lambda \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2mw_0\dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

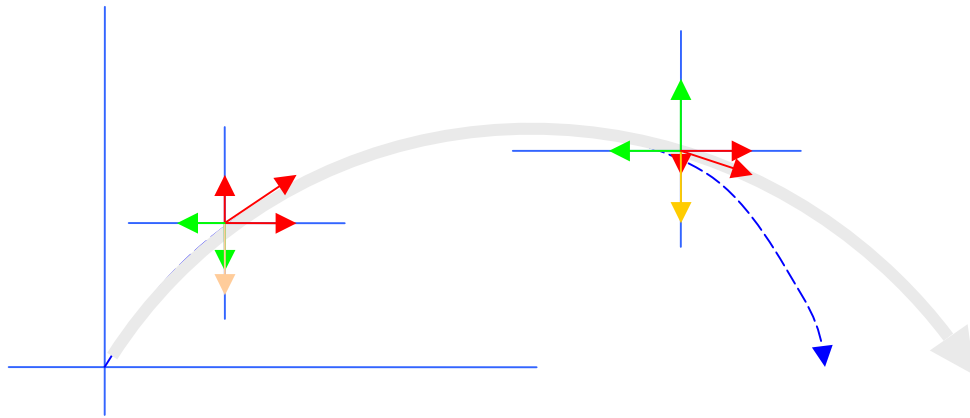
$$\begin{cases} F_x = \frac{-T}{ml} x \\ F_y = \frac{-T}{ml} y \\ F_z = \frac{T}{ml} (l - z) \rightarrow z \approx \text{cte} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{T}{m} = g_0 - 2w_0\dot{x} \cos \lambda \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{l} x + 2w_0\dot{y} \operatorname{sen} \lambda + \frac{2w_0}{l} x\dot{x} \cos \lambda \\ \ddot{y} = -\frac{g}{l} y + 2w_0\dot{x} \operatorname{sen} \lambda + \frac{2w_0}{l} y\dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\Omega^2 x + 2\alpha\dot{y} \\ \ddot{y} = -\Omega^2 y - 2\alpha\dot{x} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \alpha = w_0 \operatorname{sen} \lambda \end{array} \right.$$

$$i\ddot{x} + \ddot{y} = -\Omega^2 (ix + y) + 2\alpha i(i\dot{x} + \dot{y})$$

PROYECTIL DE TARTAGLIA:



Rozamientos

Velocidades

Peso

Trayectoria real

Trayectoria parabólica

$$F(v) = a_0 + a_1v + a_2v^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{m}{\beta} \log \left\{ 1 + \left(\frac{v_{0x}\beta}{m} \right) t \right\} \\ y = y_0 + \frac{m}{\beta} \log \left\{ \frac{\cos \left(A - \left(\frac{\beta g}{m} \right) t \right)}{\cos(A)} \right\} \end{cases}$$

$$\left\langle A = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta}{m} v_{0y}^2} \right\rangle$$

Ligaduras

Definición

Condiciones del movimiento de un S^{ma} mecánico

Ligaduras:

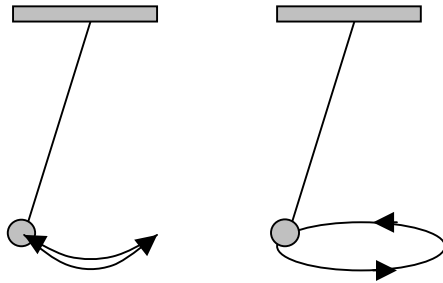
ESTRUCTURALES:

Cuerda del péndulo ($l=cte$)

Superficie sobre la que nos movemos

Eje de rotación

MODO DE ACTIVACIÓN



Fuerzas de ligadura

Las responsables de las ecuaciones de ligadura.

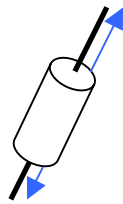
Ecuaciones de ligadura

Describen el resultado de la acción de las fuerzas de ligadura.

Clasificación de las ecuaciones de ligadura:

Bilaterales

$$\sum F = 0$$



Cinemáticas $\rightarrow f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$

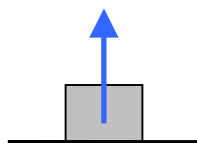
Geométricas $\rightarrow f(\vec{r}, t) = 0$

Estacionarias $\rightarrow f(\vec{r}) = 0$

Cinem. Integrables $\rightarrow \Delta \vec{f} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Unilaterales

$$\sum F \geq 0$$



Fase activa: $F=0$

Fase inactiva: $F>0$

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

Holónomo:

Todas las ligaduras son:
-geométricas
-cinemáticas integrables
-estacionarias

Holónomo...

-Esclerónomo: Ligaduras **cinemáticas integrables** o ligaduras **estacionarias**.

-Reónomo: Ligaduras **geométricas**.

No Holónomo:

Al menos una ligadura es **cinemática no integrable**.

Grados de libertad:

Nº de variables independientes en un sistema.

Sistema de partículas:

$$g = 3N - K$$

nº de partículas

grados de libertad nº de ecs. de ligadura

Sistema con sólidos rígidos:

$$g = 6M + 3N - K$$

grados de libertad nº de partículas

nº de sólidos rígidos nº de ecs. de ligadura

PRINCIPIO DE D'ALAMBERT (1743)

Desplazamientos y velocidades posibles:

Efectos de las ligaduras $\rightarrow \sum_i \vec{a}_{i,k} \cdot \dot{\vec{r}}_i + a_{k,0} = 0$ (donde k son ligaduras e i coordenadas)

Desplazamiento virtual ($\delta \vec{r}$)

$$\left. \begin{array}{l} \sum \vec{a}_{i,k} \cdot d\vec{r}_i + a_{k,0} dt = 0 \\ \sum \vec{a}_{i,k} \cdot d\vec{r}_i' + a_{k,0} dt = 0 \end{array} \right| \sum \vec{a}_{i,k} (d\vec{r}_i' - d\vec{r}_i) = \sum \vec{a}_{i,k} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

P^{pio} de los trabajos virtuales

Ligadura ideal:

El trabajo realizado por las fuerzas de ligadura asociadas al desplazamiento es nulo para todo desplazamiento virtual.

$$\vec{\phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

La condición necesaria y suficiente para un stma. esté en equilibrio es que la suma de los trabajos realizados por la resultante de las fuerzas se anule para todo trabajo virtual.

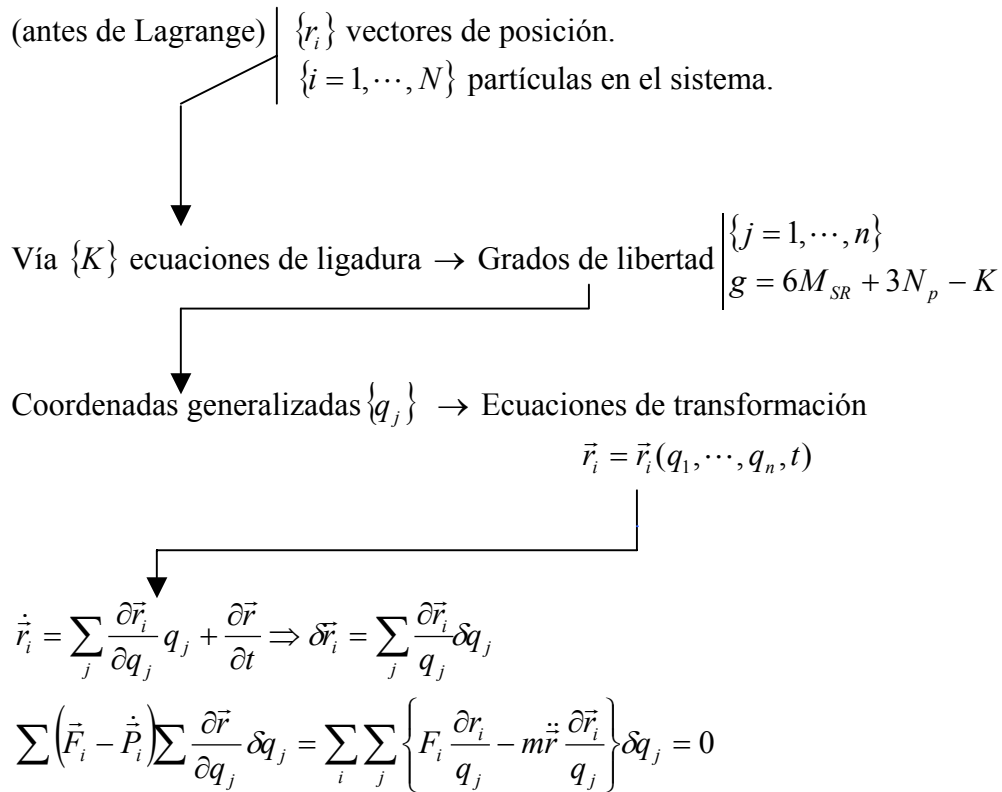
$$\text{Stma .Equilibrio} \Leftrightarrow \sum (\vec{F}_i + \vec{\phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \mapsto \forall \delta \vec{r}_i$$

P^{pio} de D'Alambert(1743)

$$\left. \begin{array}{l} F_i + \phi_i = \vec{p} \\ \sum (\vec{F}_i - \dot{\vec{P}}_i + \vec{\phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \end{array} \right|$$

$$\sum (\vec{F}_i' - \vec{P}_i) \cdot \delta \vec{r}_i$$

ECUACIONES DE LAGRANGE:



Fuerza generalizada:

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

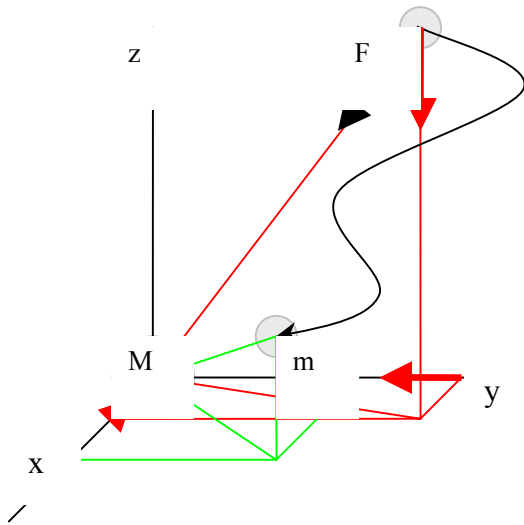
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$L = T - U$$

Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

TEORÍA DEL POTENCIAL



Newton (1687)

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F}_x = -G \frac{Mm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i})$$

Lagrange (1777)

“Substancia”

$$V_{(x,y,z)} = -G \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} (+C)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} x$$

$$\vec{F}_x = -m \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$$



es afectada por un campo generado por M y descrito por

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$$



Laplace (1782)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{GM}{r^3} - 3 \frac{GM}{r^5} x^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Pasando a Energías...

Energía Potencial

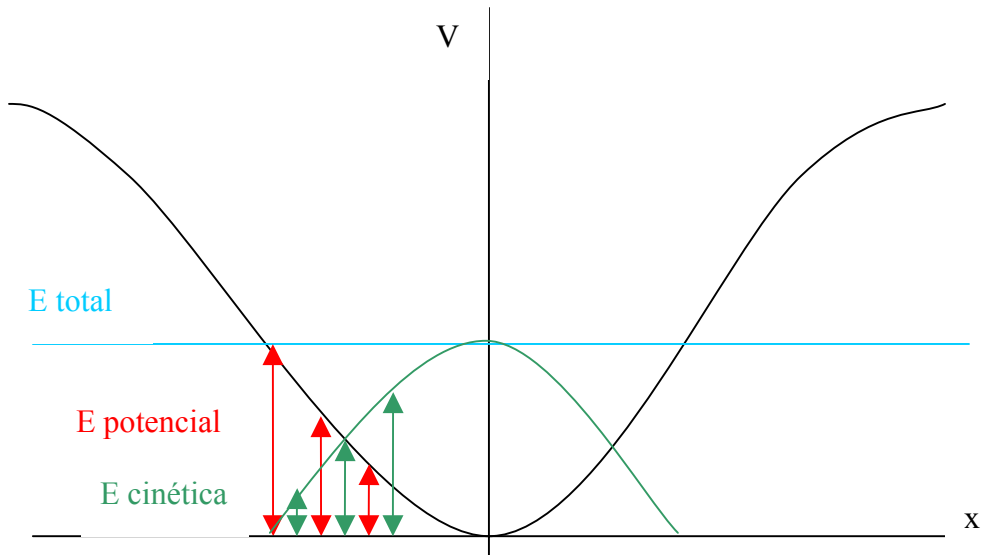
$$dW = -m \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -mdV \quad \left| \quad U_{(x,y,z)} = mV_{(x,y,z)} \right.$$

$$W_A^B = -m(V_B - V_A)$$

$$\text{Campo conservativo} \quad \left| \begin{array}{l} \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \end{array} \right| \quad \text{Teorema de Stokes}$$

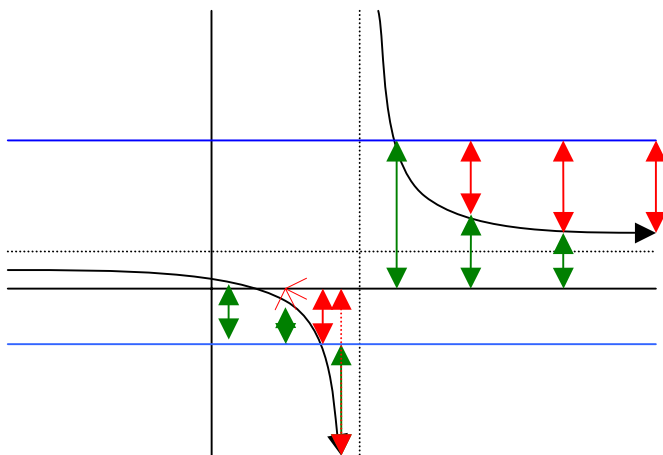
Potenciales en 1-D

(interpretación de gráficas de energías o esquemas energéticos)



Ejemplo de aplicación:

Problema 14:



Si partimos de una energía mayor que uno, la energía potencial descenderá hacia la izquierda, por tanto, el sistema se acelerará en dicha dirección con una aceleración que irá disminuyendo hasta una velocidad constante.

Si partimos de una energía menor que uno, la energía potencial disminuirá bruscamente hacia el punto asintótico en $x=4$, lanzándose a velocidades desmesuradas

MECÁNICA LAGRANGIANA

1.- Grados de libertad.

$N = n^\circ$ partículas

$K = n^\circ$ ecuaciones de ligadura

$$g \equiv n = 3 \cdot N - K$$

2.- Elección de coordenadas generalizadas.

$$q_j \equiv q_j(t)$$

3.- Explicitar las ecuaciones de transformación.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t)$$

4.- Transformación de las coordenadas energéticas.

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \Rightarrow T(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$U(x, y, z) \Rightarrow U(q_j, t)$$

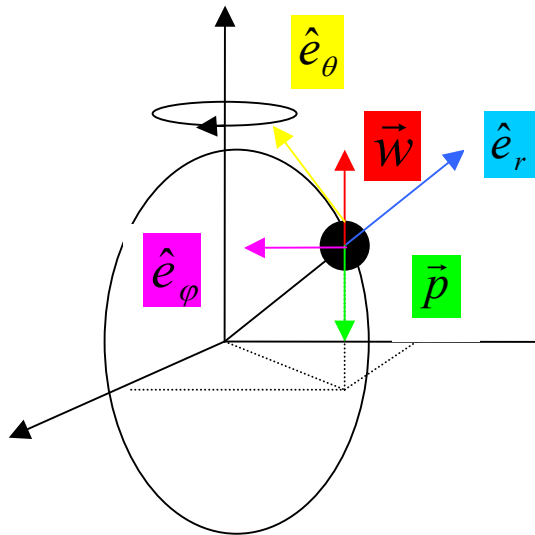
5.- Expresión del Lagrangiano y ecuaciones de Lagrange.

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \begin{cases} 0 & (\text{conservativo}) \\ Q_j & (\text{no conservativo}) \end{cases}$$

Ejemplo 1 :

Aro con bola deslizante: (estudio Newtoniano)



La bola estaría perforada e incrustada en el aro que gira de modo que pudiera desplazarse por su perímetro.

\hat{e}_θ es tangente al aro.

\hat{e}_r sigue la dirección radial.

\hat{e}_ϕ va en la dirección tangente al giro descrito por \vec{w} .

Peso

ligaduras

coriolis

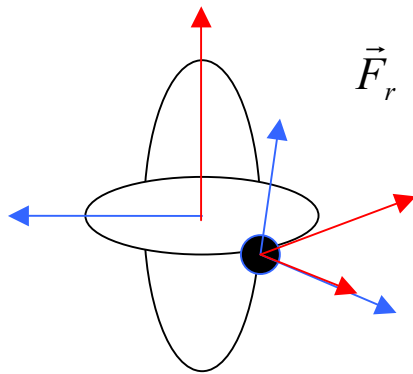
$$\sum \vec{F} = mg (\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \text{sen} \theta) + F_r \hat{e}_r + F_\phi \hat{e}_\phi$$

Ligaduras:

Peso

Centrifuga (i)

Centrifuga (ii)



$$\vec{F}_r = -mg \cos \theta - m \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{R} - mRw^2 \text{sen}^2 \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \text{sen} \theta + w^2 \text{sen} \theta \cos \theta$$

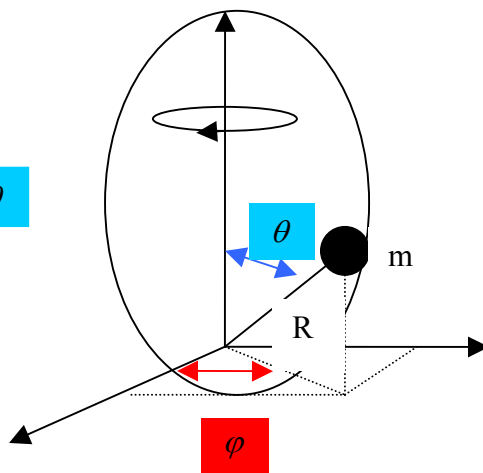
$$F_\phi = -2mwR\dot{\theta} \cos \theta$$

Aro con bola deslizante: (estudio Lagrangiano)

Ligaduras: $r = R$ $K = 2 \Rightarrow g \equiv n = 3 \cdot 1 - 2$
 $\varphi = \omega t$

Coordenadas generalizadas:

θ



Ecs. de transformación: $\left\{ \begin{array}{l} x = R \operatorname{sen} \theta \cos \omega t \\ y = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega t \\ z = R(1 - \cos \theta) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + R^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ \dot{z}^2 = R^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{array} \right.$

Coordenadas energéticas:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$$

$$U = mgz = mgR(1 - \cos \theta)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + mgR(\cos \theta - 1)$$

Ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}$$

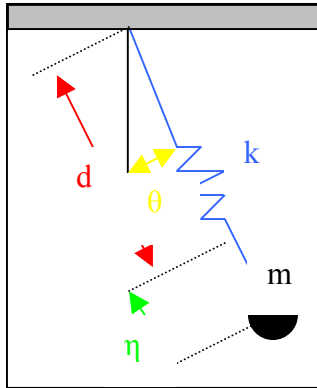
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m R^2 \omega^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - mgR \operatorname{sen} \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \operatorname{sen} \theta - \omega^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0$$

Ejemplo 2:

Péndulo con hilo extensible (Hooke):

Donde d es la longitud natural del hilo,



η es la elongación,

k la constante de elasticidad del hilo,

m es la masa que pende,

θ es el ángulo respecto a la vertical.

Ligaduras:

$$F = -k\eta \rightarrow U_e = \frac{1}{2}k\eta^2$$

$$z = 0$$

$$g \equiv n = 3 \cdot 1 - 1$$

(θ, η)

Ecuaciones de transformación:

$$x = (d + \eta) \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{\eta} \sin \theta + (d + \eta) \dot{\theta} \cos \theta$$

$$y = -(d + \eta) \cos \theta \Rightarrow \dot{y} = -\dot{\eta} \cos \theta + (d + \eta) \dot{\theta} \sin \theta$$

Coordenadas energéticas:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{\eta}^2 + (d + \eta)^2 \dot{\theta}^2]$$

$$U = U_g + U_e = mgh + \frac{1}{2}k\eta^2 = -mg(d + \eta) \cos \theta + \frac{1}{2}k\eta^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m[\dot{\eta}^2 + (d + \eta)^2 \dot{\theta}^2] - mg(d + \eta) \cos \theta + \frac{1}{2}k\eta^2$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(d + \eta)^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(d + \eta) \sin \theta$$

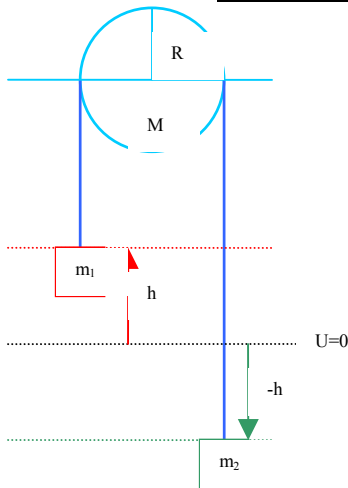
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m\dot{\eta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = m(d + \eta)\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - k\eta$$

$$(d + \eta)\ddot{\theta} + 2\dot{\eta}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\eta} - (d + \eta)\dot{\theta}^2 - g \cos \theta + \frac{k}{m}\eta = 0$$

MÁQUINA DE ATWOOD



Ecuaciones de ligadura:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = -R; x_2 = R & \text{Modo de activación} \\ z_1 = z_2 = cte & \\ y_1 = -y_2 & \text{Geométrica} \end{array}$$

$$g = 3 \cdot 2 - 5 = 1 \Rightarrow h$$

Coordenadas generalizadas:

$$h = y_1 = -y_2$$

$$\dot{h} = \dot{y}_1$$

Coordenadas energéticas:

$$T = T_r + T_t = \frac{1}{2} \frac{(MR^2)}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right)$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = gh(m_1 - m_2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right) - gh(m_1 - m_2)$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = \dot{h} \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = g(m_1 - m_2)$$

$$\ddot{h} \left(\frac{M}{2} + m_1 + m_2 \right) + g(m_1 - m_2) = 0$$

POTENCIALES GENERALIZADOS

Para llegar a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$
$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad \mapsto \quad U = U(q_j, t)$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Ahora tenemos:

$$G = G(q, \dot{q}, t) \left\{ \begin{array}{l} Q_j = \frac{\partial G}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ L = T - G \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{array} \right.$$
$$G(q_j, \dot{q}_j, t) = G_0(q, t) + \sum g_j \dot{q}_j$$



Ver paralelismo de notación
en sistemas naturales

SISTEMAS NATURALES: (Gantmájér pg 60 y 92)

Aquellos Sistemas clásicos en los que el potencial de la fuerzas es el potencial ordinario o bien el generalizado, serán denominados sistemas naturales.

i) Pongámonos en el caso en que tengamos un potencial ordinario:

$$U = U(q_i, t)$$

Energía cinética:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \sum m \left(\sum \frac{\partial r}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{i,k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i + a_0$$

$$a_{i,k} = \sum m \frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial r}{\partial q_k}$$

$$a_i = \sum m \frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2$$

$$L = T - U = L_2 + L_1 + L_0$$

$$L_2 = T_2$$

$$L_1 = T_1$$

$$L_0 = T_0 - U$$

ii) En el caso de un potencial generalizado:

$$U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$U = \sum_{i=1}^n V_i \dot{q}_i + V = V_1 + V$$

(Ver paralelismo de notación en potenciales generalizados)

$$L = T - U = L_2 + L_1 + L_0$$

$$L_2 = T_2$$

$$L_1 = T_1 - V_1$$

$$L_0 = T_0 - V$$

Función de disipación de Rayleigh:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \mapsto j = (1, \dots, n); L = T - G = T - G_0 - G_1$$

Para fuerzas disipativas con forma de ley de Stokes:

$$\vec{F}_i = (-k\vec{r}); \vec{r} = (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k})$$

$$\wp \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_x \dot{x}_i^2 + k_y \dot{y}_i^2 + k_z \dot{z}_i^2)$$

$$-\nabla_v \wp = - \left(\frac{\partial \wp}{\partial \dot{x}_i} \hat{i} + \frac{\partial \wp}{\partial \dot{y}_i} \hat{j} + \frac{\partial \wp}{\partial \dot{z}_i} \hat{k} \right) = \vec{F}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \nabla_{v_i} \wp \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$- \sum_i \sum_{j,k} \frac{\partial \wp}{\partial v_j} \frac{\partial v_k}{\partial q_j} = - \frac{\partial \wp}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \wp}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{dL}{dt} ; L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[-L + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] = \sum \left[-\frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Función de la energía:

$$h = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \rightarrow h = h(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\sum \frac{\partial \wp}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \text{Cuando } \left. \begin{array}{l} \wp = 0 \\ t \notin L \end{array} \right\} h = cte$$

Integral
de Jacobi

Si la función es homogénea:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i = nF$$



$$\frac{dh}{dt} = -2\wp - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Ecuación de la energía (caso general)

$$h = T_2 - T_0 + G_0$$

i) Si el sistema es conservativo:

$$\wp = 0 \Rightarrow \dot{h} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\text{ii) Si } t \notin L \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{h} = 0$$

$$\mapsto h = cte = T_2 - T_0 + G_0$$

$$\text{iii) Si } t \notin Ecs.Trans. \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\mapsto h = cte = T_2 + G_0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Conservación energía "estándar":} \\ \frac{1}{2}mv^2 + mgh \end{array} \right. \end{array}$$

(Gantmájer pg72)

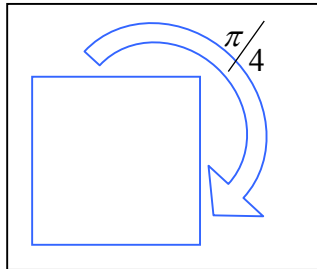
En un sistema esclerónimo en el que la velocidad no dependa explícitamente del tiempo:

$$\wp = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \quad \text{El doble de la función de Rayleigh es igual a la velocidad de decrecimiento de la energía.}$$

LEYES DE CONSERVACIÓN Y SIMETRÍAS

Noción de Simetría:

- Aplicamos una transformación (Heráclito)
- Buscamos invariantes (Parménides)



$$f(x) = x^2 \cos x$$

$$x' = -x$$

$$f(x') = f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x$$

Simetría asociada a las ecuaciones de Lagrange:

Transformación:

$$t' = \lambda t; \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$L \rightarrow L\left(q, \frac{dq}{dt'}, t\right)$$

$$\frac{dq}{dt'} = \dot{q}' = \frac{dq}{\lambda dt}$$

$$\frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{\lambda dt} \left(\frac{\partial L}{\lambda^{-1} \partial \dot{q}} \right)}_{\text{in variante}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

¡Atención!

Si $\lambda = -1 \Rightarrow t \rightarrow -t$ ¡¡¡Futuro = Pasado??!!

COORDENADAS CÍCLICAS E INTEGRALES PRIMERAS

Definición 1.- Momento conjugado: $P_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$	Definición 2.- Coordenada cíclica: $q_j \text{ cíclica} \Rightarrow q_j \notin L$
---	--

T^{ma}: Si una coordenada es cíclica, su momento se conserva.

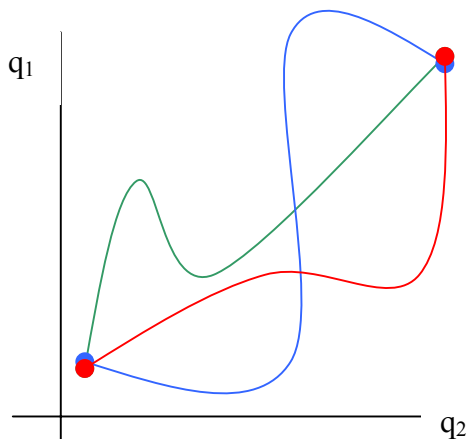
$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \left\{ \begin{array}{l} (2) \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \\ \mapsto \frac{dP_j}{dt} = 0 \Rightarrow P_j = cte \end{array} \right.$$

Definición 3.- Una función $\Phi(q, \dot{q}, t)$ es $\int 1^a$ si mantiene su valor constante al sustituir sus variables por valores particulares.

Definición 4.- Un S^{tma} es integrable si todas sus q_j pueden ser expresadas en términos de funciones elementales o de integrales primeras.

Integral de acción.

Espacio de configuraciones.



Construimos un espacio con las coordenadas generalizadas.

¿Qué trayectoria sigue un sistema en el espacio de configuraciones?

Integral de acción:

$$S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$$

PRINCIPIO DE HAMILTON:

De todas las trayectorias posibles entre dos puntos en el espacio de configuraciones, nuestro sistema seguirá aquel que haga extrema (Max, min o P.I.) su integral de acción.

SIMETRÍA	CANTIDAD CONSERVADA	
HOMOGENEIDAD (no puntos distintos)	Espacio	Momento lineal
	Tiempo	Energía
ISOTROPÍA (no direcciones preferentes)	Espacio	Momento angular

BÚSQUEDA DE SIMETRÍAS

$$S = \int_{T_A}^{T_B} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt$$

Teorema de Noether:

Si la integral de acción de un sistema permanece invariante ante una transformación paramétrica:

$$\left. \begin{aligned} q'_j(t) &= q_j(t) + \varepsilon \psi_j(q_j, t) \\ \dot{q}'_j(t) &= \dot{q}_j(t) + \varepsilon \dot{\psi}_j(q_j, t) \\ t' &= t + \varepsilon \Phi(q_j, t) \end{aligned} \right\} J = \underbrace{\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] \Phi - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \psi_j}_{(cantidad\ conservada)}$$

$$J = h\Phi - \sum_{j=1}^n P_j \psi_j$$

i. Si q_i es cíclica ($\rightarrow q_i \notin L$)

$$\left. \begin{aligned} q'_1 &= q_1 \\ \vdots \\ q'_i &= q_i + \varepsilon \\ \vdots \\ q'_n &= q_n \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(trivialmente) \Rightarrow L' = L \\ &\psi_j = \delta_{ij} \\ &\Phi = 0 \end{aligned} \left\} \begin{aligned} S' &= \int L' dt' = \int L dt = S \quad (in\ var\ iante) \\ J &= h\Phi - \sum P_j \psi_j = -P_j = cte. \end{aligned}$$

ii. Si $t \notin L \Rightarrow L' = L$ (trivial)

$$\left. \begin{array}{l} q'_1 = q_1 \\ \vdots \\ q'_n = q_n \\ t' = t + \varepsilon \end{array} \right\} \text{(trivialmente)} \Rightarrow L' = L$$

$S' = S$ (in variante)

$$\left. \begin{array}{l} \psi_j = 0 \\ \Phi = 1 \end{array} \right\} J = h\Phi - \sum P_j \psi_j = h = cte.$$

PRINCIPIO DE HAMILTON

PRINCIPIO DE HAMILTON:

De todas las trayectorias posibles entre dos puntos en el espacio de configuraciones, nuestro sistema seguirá aquel que haga extrema (Max, min o P.I.) su integral de acción.

$$\delta S \equiv 0 \quad , \quad S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1(t, \alpha) = q_1(t, 0) + \alpha \eta_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t, \alpha) = q_n(t, 0) + \alpha \eta_n(t) \end{array} \right\} \delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) \cdot d\alpha$$

$$\eta_j(t_A) = \eta_j(t_B) = 0$$

$$d\alpha \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = \int \sum \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right\} dt =$$

$$= \int \sum \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial \alpha \partial t} \right\} dt =$$

$$= \int \sum \langle \text{Ecs. Lagrange} \rangle \eta_j dt d\alpha$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

(Modo de obtener fuerzas de ligadura con Lagrange)

Principio de Hamilton

$$S = \int L dt \Rightarrow [\text{min}] \quad \delta S = 0$$

$$q(t, \alpha) = q(t, 0) + \alpha \eta(t) \xrightarrow{\downarrow} \delta S = \sum_j \int \{Ecs.Lg.\} \delta q_j dt \equiv 0$$

Sistema HOLÓNOMO
Ligadura integrable.

$$\sum_j \bar{\nabla} f \ddot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

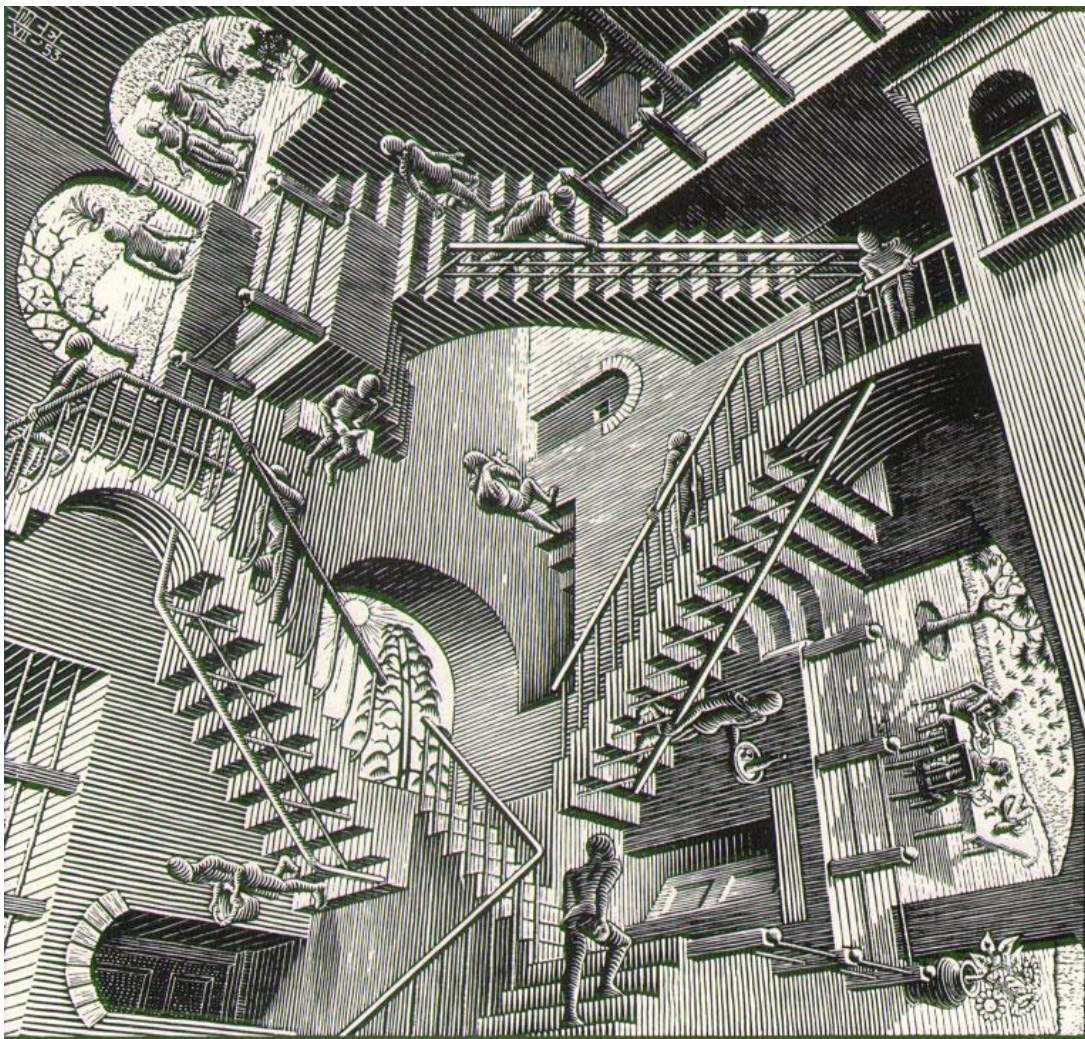
Sistema NO HOLÓNOMO
Ligadura no integrable.

$$\sum_j a_{ij} dq_j + a_{i0} dt = 0$$

$$\sum_j a_{ij} \delta q_j = 0$$

TEMA 6

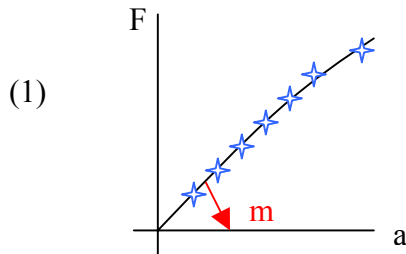
INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL (o restringida).



1.- Precedentes de la teoría. (1895-1905)

1895.- J.J. Thomson descubre el electrón:

- Partícula.
- Masa.
- Carga.



$$\vec{F} = q(\vec{E} \times \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{q}{m}\right)}_{(1)} (\vec{E} \times \vec{v} \times \vec{B})$$

-Kauffmann: $m = m(v)$

-Transición de fuerzas a energías:

$$dw = \vec{F} d\vec{r} = m \vec{a} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt \Rightarrow W_{O-A} = m \int_0^A v dv = \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow$$

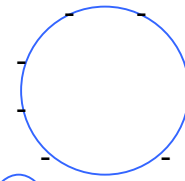
$$\mapsto m = \frac{W_{O-A}}{v_A^2} = \frac{2}{v_A^2} \underbrace{\int_0^A e \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{\text{Lorentz (2)}} \equiv m$$

Masa electromagnética = Masa inercial

-Concepciones del electrón:

1902.- Abraham:

Esfera sólida con carga en su superficie. Concepción clásica de radio electrónico.



1904.- Bucherer:

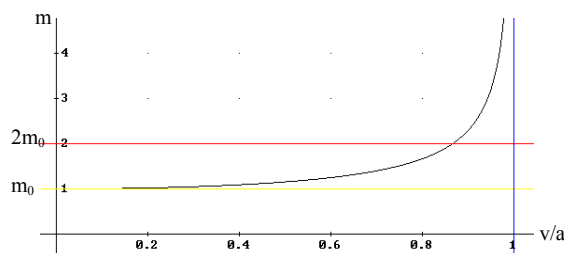
Volumen constante. "Deformable"



1904.- Lorente:

Volumen \neq cte.

$$m = \frac{m_0}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}}_{a=c(luz)}}$$



2.- Motivaciones conceptuales.

-ARISTÓTELES:

“El cuerpo en movimiento se detiene cuando la fuerza que lo empuja deja de actuar.”

-GALILEO:

“Toda velocidad, una vez impartida a un cuerpo, se conservará sin alteración mientras no existan causas externas de aceleración o frenado [...] de esto se infiere que el movimiento sobre un plano horizontal es perpetuo.”

-NEWTON:

“Un cuerpo en reposo, o en movimiento, se mantendrá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sobre él actúen fuerzas exteriores que lo obliguen a modificar dichos estados.”

(Ley de inercia.)

-Sistema de coordenadas inercial o de Galileo:

Un sistema de coordenadas cuyo estado de movimiento sea tal que con relación a él se cumple la ley de inercia lo llamaremos sistema de coordenadas de Galileo.

-Teorema de adición de velocidades (Galileo-Newton):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{array} \right\} \text{Invariantes frente a } \left\{ \begin{array}{l} \text{NEWTON} \rightarrow \vec{f} = -G \frac{mm'}{r^3} \vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \\ \text{COULOMB} \rightarrow \vec{f} = -K \frac{qq'}{r^3} \vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \end{array} \right.$$

De donde se deduce que para todos los sistemas de coordenadas de Galileo, tanto las leyes de gravitación como las leyes de la electrostática son invariantes.

-Ecuaciones de Maxwell:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \text{!!!NO INVARIANTES!!! ante Galileo.}$$

-1888.- emisión y recepción de una onda de radio.

$$\nabla^2 E_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

-Si invariantes ante transformaciones de Lorentz:

$$\left. \begin{array}{l} x' = \frac{x \pm vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\}$$

PRIMER POSTULADO DE LA RELATIVIDAD

“Las leyes de la física han de ser invariantes para todo observador inercial”

