

# 1 Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot D &= \rho \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} D &= \epsilon \epsilon_0 E \\ B &= \mu \mu_0 H \\ j &= \sigma E \end{aligned}$$

# 2 Campo electrostático en el vacío

Estamos hablando de campo electrostático exclusivamente por lo que no hay campo magnético ( $B = 0$ ,  $H = 0$ ). En cuanto al vector desplazamiento  $D = \epsilon_0 E + P$ , si no hay dieléctricos no habrá polarización (vacío) con lo que reducimos las ecuaciones de Maxwell a 2:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} = 0 & \longrightarrow \text{no hay fuentes vectoriales de campo} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} & \longrightarrow \text{Las fuentes escalares de campo son las cargas} \end{aligned} \tag{2}$$

El potencial de campo electrostático se define como el trabajo necesario para traer una carga unidad desde el infinito hasta un punto en el seno de un campo electrostático:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Éste se relaciona directamente con el campo:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$

La fuerza de interacción entre dos cargas (la que crea el campo y la que introducimos en su seno viene como:

$$F = qE$$

Si definimos una superficie cerrada  $S$  aprovechando unas determinadas condiciones de simetría en el problema calcularemos el campo sobre cualquier punto de dicha superficie gracias al teorema de gauss:

$$\underbrace{\oint_S E ds}_{\text{flujo}} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int_V \rho dV}_{q, \text{ encerrada}}$$

## 2.1 Medios conductores

En el interior de un conductor no hay campo, por lo tanto el potencial es constante y no hay cargas, éstas se distribuyen por la superficie del conductor.

## 2.2 Desarrollo multipolar

Partiendo de la expresión del potencial,  $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$ , desarrollemos en serie de Taylor el término  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{r \cdot r'}{r^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{3(r \cdot r')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right) + \dots$  obtenemos los siguiente términos:

- TÉRMINO MONOPOLAR (carga puntual)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int_V \rho(r') dV'}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- TÉRMINO DIPOLAR (dipolo eléctrico)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3} \underbrace{\int_V r' \rho(r') dV'}_{\vec{p}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3} \vec{p}$$

El momento dipolar  $\vec{p}$  viene dado por:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(r') dV'$$

El generado por dos cargas puntuales será, pues:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

Un dipolo en el seno de un campo eléctrico, posee un potencial de la forma:  $V = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos\theta$ . Tenderá a adoptar la posición de menor potencial, es decir, a alinearse con el campo eléctrico pero en sentido contrario. Dicho giro es causado por un par de fuerzas:  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E}$

- TÉRMINO CUADROPOLAR (cuadrupolo eléctrico)

$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{r^5} \underbrace{\int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(r') dV'}_{Q_{ij}}$$

# 3 Campo electrostático en medios materiales

Como ya no estamos en el vacío, lo primero que hemos de cambiar es la constante de permitividad que pasará de ser  $\epsilon_0$  a  $\epsilon_0 \epsilon_r$ . Además, en el momento en que tengamos dieléctricos, habrá polarización  $P$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} = 0 & \longrightarrow \text{no hay fuentes vectoriales de campo} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho(r) & \longrightarrow \text{Las fuentes escalares son las cargas libres y ligadas} \end{aligned} \tag{3}$$

Un dipolo eléctrico crea en su entorno un campo electrostático de la forma:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

Polarización de un dieléctrico es el cociente entre el momento dipolar total y el volumen del dieléctrico:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

Mediante la SUSCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA ( $\chi$ ), la polarización es proporcional al campo en el interior del dieléctrico, el cual es a su vez proporcional al campo exterior mediante la PERMITIVIDAD ELÉCTRICA ( $\epsilon_r = 1 + \chi$ ):

$$P = \chi \epsilon_0 E_{int} = \chi \epsilon_0 \frac{E}{\epsilon_r}$$

Un dieléctrico polarizado crea un potencial a su alrededor con la forma:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\int_S \frac{\sigma_p}{r} dS}_{\text{superficial}} + \underbrace{\int_V \frac{\rho_p}{r} dV}_{\text{interior}} \right] \begin{cases} \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \\ \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \end{cases}$$

Las cargas de polarización son cargas ligadas (no se mueven). La suma de cargas de superficie e interiores en todo el dieléctrico ha de ser, pues, cero.

## 3.1 Fronteras de dieléctricos

Normal	Paralela
$u_n \cdot (D_2 - D_1) = \sigma$	$u_n \times (E_2 - E_1) = 0$
$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2t} = E_{1t}$

$$\frac{tg(\theta_2)}{tg(\theta_1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

# 4 Campo Magnetostático en el vacío

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} & \longrightarrow \text{Las fuentes de campo son corrientes (vectoriales)} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \longrightarrow \text{No hay fuentes escalares de campo} \end{aligned} \tag{4}$$

## 4.1 Corriente eléctrica

Llamamos densidad de corriente  $\vec{j}$  al producto de la densidad volumétrica de carga por la velocidad que dichas cargas llevan.

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

Intensidad de corriente en una superficie :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\frac{VA-B}{R}}_{\text{Ohm} \rightarrow \vec{j} = \sigma_c \vec{E}}$$

1

Ecuación de continuidad:

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dq}{dt} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Cuando introducimos carga en un material, tarda un cierto tiempo en distribuirse por el mismo. Éste es el TIEMPO DE RELAJACIÓN:

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma_c}$$

<sup>1</sup>Donde  $\sigma_c$  es la conductividad.

<sup>2</sup>Si  $q = cte$ ,  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ .

## 4.2 Iteración entre corrientes

Sean dos circuitos 1 y 2:

$$\vec{E}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) = -\vec{E}_{12}$$

El campo magnetostático creado por un circuito en un punto r viene dado por:

$$d\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}' \times (r - r')}{|r - r'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV'$$

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV'$$

En un punto alejado, podemos calcularlo como:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \right]$$

Definamos el TEOREMA DE AMPERE en un circuito cerrado c, que nos ayudará a obtener en campo magnético aprovechando simetrías:

$$\oint_c \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

Una partícula q que se mueva con velocidad v en el seno de un campo magnético B experimenta una fuerza:

$$F = (v \times B)q$$

## 4.3 Momento magnético

$$\vec{m} = I \vec{s}$$

donde  $\vec{s}$  es el área encerrada por el circuito orientada según la regla de Maxwell. Una partícula moviéndose en el seno de un campo magnético tenderá a girar, esto es, sufrirá la acción de un par de fuerzas:

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$$

El POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR se define como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

El POTENCIAL MAGNÉTICO ESCALAR creado por un dipolo se define como:

$$V_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Para un circuito:

$$V_m = -\frac{I\Omega}{4\pi}$$

donde  $\Omega$  es el ángulo sólido con que se ve al circuito desde r:  $\Omega = \int_S \frac{d\vec{s} \cdot \vec{r}}{r^3}$ .

## 5 Campo magnetostático en medios materiales

Al tener medios materiales nos encontraremos con corrientes de imanación.

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_m) \quad \rightarrow$ Las fuentes vectoriales son corrientes reales y de imanación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow$ No hay fuentes escalares de campo
---

(5)

Podemos definir una nueva magnitud  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = -\nabla \cdot V_m$  con:

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad \rightarrow$ Las fuentes de campo son corrientes (vectoriales) $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = \rho_m \quad \rightarrow$ Las fuentes escalares vienen de la imanación
---

(6)

### 5.1 Imanación

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

Un material imanado crea un campo:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 \vec{\nabla} V_m$$

$$V_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \cdot (r - r')}{|r - r'|^3} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m}{|r - r'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_m}{|r - r'|} dS' \left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = M \vec{u}_n \rightarrow \text{superficie} \\ \sigma_m = -\nabla \cdot \vec{M} \rightarrow \text{volumen} \end{array} \right.$$

Las líneas de $\vec{M}$ van de	$\ominus$ a $\oplus$	sólo por dentro.
Las líneas de $\vec{H}$ van de	$\oplus$ a $\ominus$	por dentro y por fuera.
Las líneas de $\vec{B}$ van de	$\ominus$ a $\oplus$	por dentro y al revés por fuera.

## 5.2 Polos magnéticos

Un material imanado presenta polos magnéticos.

## 5.3 Frontera entre dos medios

Las componentes normales a la frontera del campo magnético B son iguales por ambos lados:

$$B_{2n} = B_{1n}$$

Las componentes tangenciales del campo H en la frontera se igualarán en ausencia de corrientes superficiales( $\vec{k}$ ).

$$\vec{n} \times (H_2 - H_1) = \vec{k}$$

## 6 Inducción electromagnética y movimiento de partículas

Llamamos flujo magnético a:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s}$$

La fuerza que actúa sobre un puente de unión móvil evitando que éste se abra:

$$F = IlB$$

donde l es la longitud del puente.

La fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula en el seno de un campo electromagnético:

$$F = q(\vec{E} + v \times \vec{B})$$