# Ecuaciones de la Física Matemática

Pablo M. García Corzo

2003-04

## Índice

# 1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## 1.1 Ecuaciones De Primer Orden

- Separables $\boxed{y' = \frac{p(t)}{q(y)} \longmapsto \int q(y)dy = \int p(t)dt + C}$

- Homogéneas $\boxed{y' = f(\frac{y}{t}) \rightsquigarrow z = \frac{y}{t} \longmapsto \int \frac{dz}{f(z)-z} = Ln|t| + C}$

- del tipo $\boxed{\boxed{\text{y'=f(at+by)}} \rightsquigarrow z = at + by \longmapsto \int \frac{dz}{a+bf(z)} = t + C}$

- Lineales $\boxed{y' = a(t)y + f(t)}$

  - Lineal Homogénea $\boxed{f(t) = 0 \longmapsto y = Ce^{\int a(t)dt}}$
  - Lineal de coeficientes constantes
    $\boxed{a(t) = a \longmapsto y = Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}f(t)dt}$
  - Solución general $\boxed{y = Ce^{\int a(t)dt} + e^{\int a(t)dt}\int e^{-\int a(t)dt}f(t)dt}$

- Reducibles a lineales

  - Bernouilli $\boxed{y' = a(t)y + f(t)y^p \rightsquigarrow z = y^{1-p}}$
    $\boxed{z' = (1-p)a(t)z + (1-p)f/t)}$
  - Ricatti $\boxed{y' = a(t)y + b(t)y^2 + f(t) \rightsquigarrow}$ conociendo una solución particular $y_p$:
    $\boxed{u = y - y_p \longmapsto u' = [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u + b(t)u^2}$

- Exactas $\boxed{M(t,y) + N(t,y)y' = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}}$
  Buscamos una función de dos variables $U(t,y)$ tal que $U_t = M$ y $U_y = N$. La solución general será:
  $\boxed{U(t,y) = C}$

## 1.2 Sistemas y Ecuaciones Lineales

- Sea el $S^{tma}$ de n ecuaciones de primer orden

$$\left.\begin{array}{c} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \tag{1}$$

Toda ecuación de orden n se puede convertir en un $S^{tma}$ equivalente haciendo:

$$x^n = g(t, x, x', ..., x^{(n-1)}) \to \left\{\begin{array}{c} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right. \tag{2}$$

- El sistema (1) en notación vectorial: $\boxed{X' = A(t)X + f(t)}$

### 1.2.1 Sistema Homogéneo

- Consideremos el $S^{tma}$

$$X' = AX \tag{3}$$

- *SOLUCIÓN*

1. Tomemos la matriz A de coeficientes.
   - Calculemos su forma canónica de Jordan:

$$A = PJP^{-1}$$

2. Consideremos la solución

$$X(t) = e^{At}X(0)$$

3. Si invertir P es sencillo, lo calculamos y ya tenemos solución:

$$\boxed{X(t) = Pe^{Jt}P^{-1}X(0)}^{1}$$

4. Si no queremos invertir P, planteamos:

$$X(t) = Pe^{Jt}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \Big|_{t=0} X(0)$$

Obteniendo así $(\alpha, \beta, \gamma)$ para la solución:

$$\boxed{X(t) = Pe^{Jt}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

[1] La exponencial de una matriz diagonal es la matriz con la exponencial de cada elemento por separado:

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Sistema No Homogéneo

- Consideremos el $S^{tma}$ :

$$X' = A(t)X + f(t) \tag{4}$$

- Si $X(t_0) = X_0$, generalizamos los resultados para el $S^{tam}$ homogéneo del siguiente modo:

$$\boxed{X = Pe^{J(t-t_0)}P^{-1}X_0 + P\int_{t_0}^{t} e^{J(t-s)}P^{-1}f(s)ds}$$

### 1.2.3 Ecuaciones Lineales

- Tomamos las ecuaciones lineales como casos particulares de sistemas.
- Para resolverlas, tomaremos primero la ecuación homogénea que nos dará soluciones $x_1$ y $x_2$, con los que la solución general, plantearemos: $x = c_1x_1 + c_2x_2 + x_p$ Siendo $x_p$ una solución particular cualquiera, que podemos obtener (en caso de no encontrar una a primera vista) de: $x_p = x_2 \int \frac{x_1 f}{|W|}dt - x_1 \int \frac{x_2 f}{|W|}dt$

## 1.3 Soluciones por medio de series

- Sea la ecuación: $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0}$

### 1.3.1 Puntos Regulares

- $t = t_0$ será un punto regular si a y b en $t_0$ son funciones analíticas en $t_0$. En caso contrario, el punto será singular.
- Podemos desarrollar $a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ y $b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$
- Tendremos también una solución general de la forma:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightsquigarrow x' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} \rightsquigarrow x'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2}$$

### 1.3.2 Puntos Singulares Regulares

- $t_0$ es un punto singular regular de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ si $(t - t_0)a(t)$ y $(t - t_0)^2 b(t)$ son analíticas en $t_0$.
- Multiplicamos la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ si $(t - t_0)a(t)$ por $t^2$ y llamando $a^*(t) = ta(t)$ y $b^*(t) = t^2 b(t)$ tenemos:

$$\boxed{t^2 x'' + ta^*(t)x' + b^*(t) = 0}$$

- Planteamos el polinomio indicial:

$$q(r) = r(r-1) + a_0^* r + b_0^*$$

- Entonces, según las raíces del polinomio indicial $r_1, r_2$, tendremos las siguientes soluciones:
  1. Existe siempre una solución: $\boxed{x_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \ , \ c_0 \neq 0}$
  2. La segunda solución será, según los casos:
     **a)** si $r_1 - r_2$ no es cero ni entero positivo: $\boxed{x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \ , \ b_o \neq 0}$
     **b)** si $r_1 - r_2$ es cero: $\boxed{x_2 = t^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 Lnt}$
     **c)** si $r_1 - r_2 = n$ entero positivo: $\boxed{x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + a x_1 Lnt \ , \ b_0 \neq 0, a \in \Re}$

## 1.4 Mapas de Fases

- Sea :

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

- $\boxed{\text{Si } f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0 \text{ entonces } X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ es solución de equilibrio.}}$

- $\boxed{\text{Si } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ es solución, también lo es } X(t+C) = \begin{pmatrix} x(t+C) \\ y(t+C) \end{pmatrix} \text{ , con } C \in \Re}$

### 1.4.1 Ecuación diferencial de las Órbitas

- El primer paso para dibujar un mapa de fases es explicitar su Ecuación diferencial de las órbitas:

$$\boxed{\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}}}$$

- Podemos obtener información adicional mediante el campo vectorial v que, en cada punto, viene dado por: $\boxed{v(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$

### 1.4.2 Puntos Críticos

- Sea el $S^{tma}$ $\boxed{X' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X}$ donde $|A| = ad - bc \neq 0$.

- Definiremos los puntos críticos en función de los autovalores $\lambda_1$ y $\lambda_2$ de $A$.

**Nodo estable** $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

**Nodo inestable** $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

**Punto silla** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

**Nodo estelar estable** $\lambda$ doble $< 0$ , A diagonal.

**Nodo estelar inestable** $\lambda$ doble $> 0$ , A diagonal.

**Nodo de una tangente estable** $\lambda$ doble $< 0$ , A no diagonal.

**Nodo de una tangente inestable** $\lambda$ doble $> 0$ , A no diagonal.

**Centro** $\lambda = \pm qi$

**Foco estable** $\lambda = p \pm qi$ , $p < 0$

**Foco inestable** $\lambda = p \pm qi$ , $p > 0$

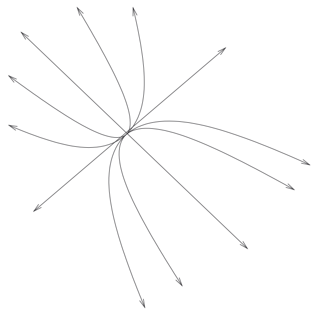

Ilustración 1: Nodo

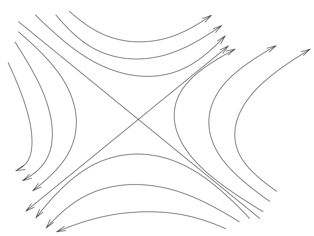

Ilustración 2: Punto de silla

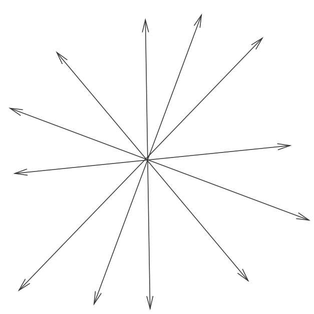

Ilustración 3: Nodo estelar

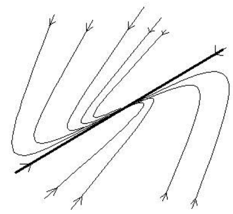

Ilustración 4: Nodo de una tangente

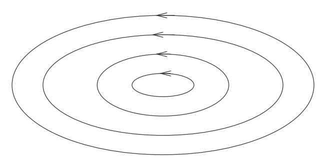

Ilustración 5: centro

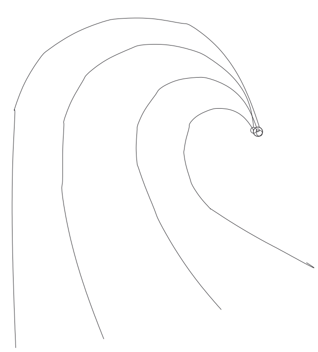

Ilustración 6: foco

# 2 Ecuaciones en derivadas parciales

## 2.1 Operadores Diferenciales

### 2.1.1 Teoría de Operadores Diferenciales

Definimos el operador diferencial L actuando sobre la función u como:

$$\boxed{Lu = \sum_\alpha a_\alpha(x) D^\alpha u}$$

Aplicaremos operadores diferenciales para manejar EDP's lineales:

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \longrightarrow Lu = f$$

Propiedades algebraicas de los operadores Diferenciales:

- Todo operador diferencial es un operador lineal: $L(\lambda u + \mu v) = \lambda(Lu) + \mu(Lv)$
- Suma de operadores: $(L + M)u = Lu + Mu$
- Producto de complejo por operador: $(\lambda L)u = \lambda(Lu)$
- Producto de operadores: $(LM)u = L(Mu)$
- Conmutador de operadores: $\boxed{[L, M]u = L(Mu) - M(Lu)}$

### 2.1.2 Operadores Frontera y condiciones iniciales

- Dirichlet: $l(u) = u|_S$
- Neumann: $l(u) = \frac{\delta u}{\delta n}\big|_S$
- Mixtas: $l(u) = \left(au + b\frac{\delta u}{\delta n}\right)\big|_S$

### 2.1.3 Problemas Lineales

$$\boxed{\begin{cases} Lu = f \\ l_i(u) = g_i \end{cases}}$$

## 2.2 EDP's de primer orden

### 2.2.1 Ecuaciones lineales y cuasilineales

Trataremos ecuaciones de la forma:

$$\boxed{\sum_i a_i u_{x_i} = F(u, x_i)}$$

Donde F puede contener términos no lineales[2].

[2]se dice ecuación cuasilineal a la que es lineal respecto a los términos de mayor orden.

### 2.2.2 Método de las curvas características

Sea la ecuación

$$yzu_x + xzu_y + xyu_z = -xyz^2u \tag{5}$$

Se trata de plantear el campo vectorial $\vec{V} = \sum_i a_i \hat{u}_{x_i}$ y de él obtener las curvas características $\frac{dx_i}{a_i} = \frac{dx_j}{a_j} = \frac{du}{F}$ que constituirán soluciones particulares de (5).

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} = \frac{du}{-xyz^2u} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y^2 - z^2 = C_2 \\ dz = \frac{du}{-z^2u} \Rightarrow u = C_3 e^{-\frac{1}{3}z^3} \end{array} \right.$$

La solución será función arbitraria (a determinar por condiciones frontera) de los resultados particulares obtenidos:

$$u = e^{\frac{-z^3}{3}} \theta(y^2 - z^2, x^2 - y^2)$$

## 2.3 EDP's de segundo orden

### 2.3.1 Tipos de ecuaciones

Sea la EDP de segundo orden, en forma genérica:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0 \tag{6}$$

donde:

$$\left. \begin{array}{l} a = a(x,y) \\ b = b(x,y) \\ c = c(x,y) \end{array} \right\} \text{evaluada en } (x_0, y_0) \tag{7}$$

Se dice que la ecuación es de carácter parabólico, hiperbólico o elíptico en un entorno del punto $(x_0, y_0)$ según:

$$\begin{array}{lcc} b^2 - ac < 0 & \rightarrow & \text{Elíptico} \\ b^2 - ac = 0 & \rightarrow & \text{Parabólico} \\ b^2 - ac > 0 & \rightarrow & \text{Hiperbólico} \end{array}$$

### 2.3.2 Coeficientes Constantes

Sea la ecuación(6) donde a, b y c $\in \Re$. Planteamos:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0$$

De ahí obtenemos dos familias de curvas características. Se trata de reparametrizar (6) con unas nuevas coordenadas que nos lleverán por cada familia de curvas características y que denotaremos como *coordenadas características*:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y = \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}x + C_1 & \Rightarrow & \zeta(x,y) \\ y = \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}x + C_2 & \Rightarrow & \eta(x,y) \end{array} \right.$$

Elegiremos las coordenadas de la reparametrización en función del tipo de ecuación que estemos tratando:

Caso Hiperbólico

$$C_1 = \underbrace{y - \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}x}_{\zeta(x,y)} \; ; \; C_2 = \underbrace{y - \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}x}_{\eta(x,y)}$$

Caso Parabólico

$$C_1 = \underbrace{y}_{\zeta} \underbrace{-\frac{b}{a}x}_{\eta}$$

Caso Elíptico

$$C_1 = \underbrace{y - \frac{b}{a}x}_{\zeta(x,y)} + i \underbrace{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}x}_{\eta(x,y)} \; ; \; C_2 = \underbrace{y - \frac{b}{a}x}_{\zeta(x,y)} - i \underbrace{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}x}_{\eta(x,y)}$$

## 2.4 Series y Transformadas de Fourier

### 2.4.1 Serie de exponenciales

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwx} \longrightarrow \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-inwx} u(x) dx \end{cases}$$

### 2.4.2 Serie de senos y cosenos

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos(nwx) + b_n sin(nwx)\right) \longrightarrow \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b cos(nwx) u(x) dx \\ b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b sin(nwx) u(x) dx \end{cases}$$

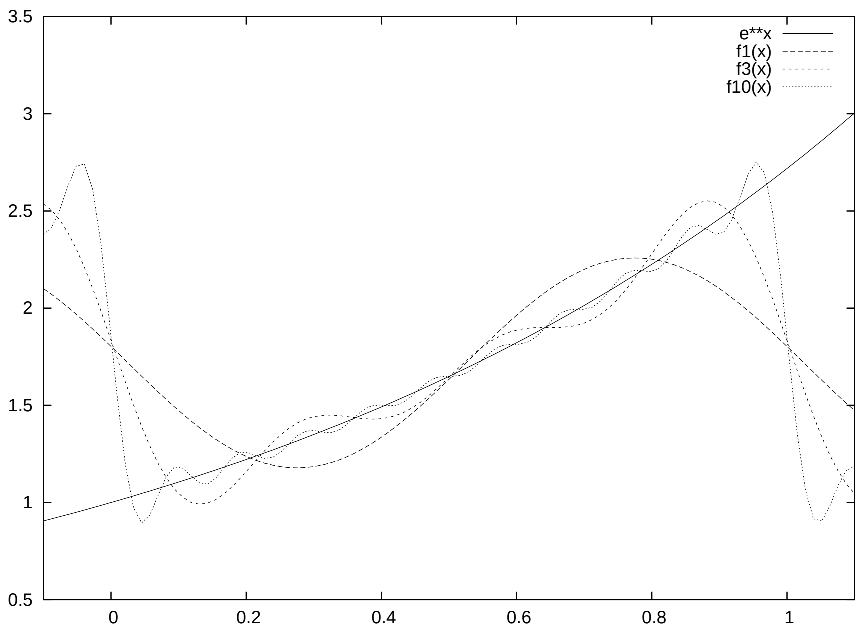


Ilustración 7: Ejemplo: $e^x$ en desarrollo de senos y cosenos

### 2.4.3 Serie de senos

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n sin\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right)\right) \longrightarrow \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b sin\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right) u(x) dx \end{cases}$$

### 2.4.4 Serie de cosenos

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n cos \left( \frac{nw}{2}(x-a) \right) \right) \longrightarrow \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b cos\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right) u(x)dx \end{cases}$$

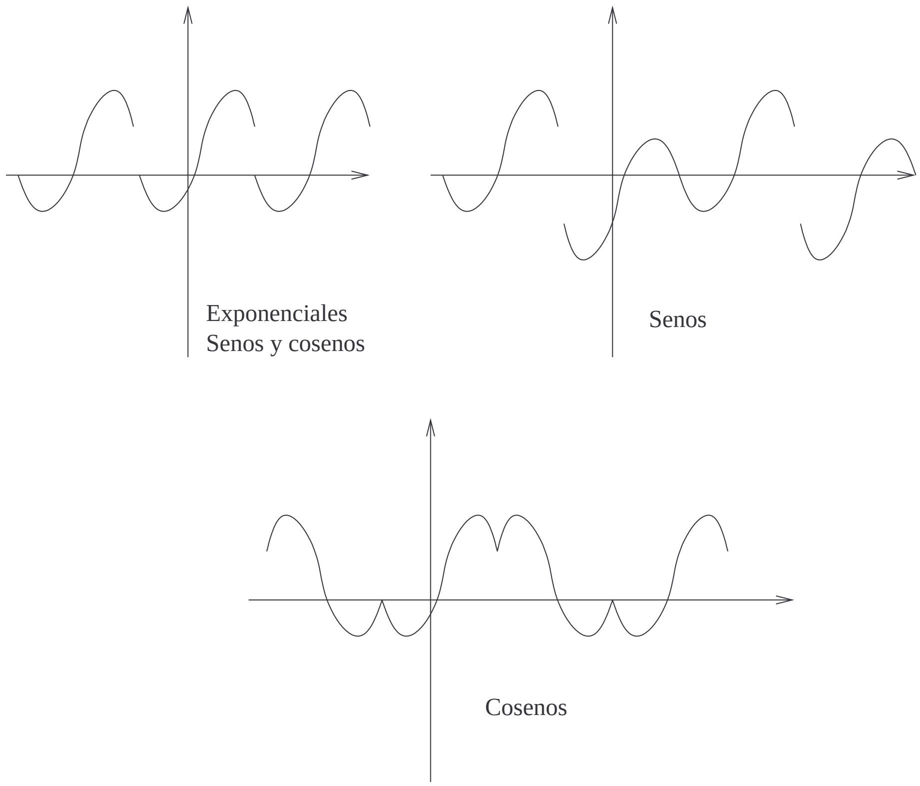


Ilustración 8: Extensión periódica de series de fourier

### 2.4.5 Transformada de Fourier

$$u(x) = \int_{\Re^n} e^{ikx} c(k) d^n k \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}(c) \rightarrow \text{transformada inversa de c}$$

$$c(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Re^n} e^{-ikx} u(x) d^n x \longrightarrow \mathcal{F}(u) \rightarrow \text{transformada de u}$$

En Resumen:

| Tipos de | Desarrollos de Fourier |
|---|---|
| exponenciales | $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwx} \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-inwx} u(x)dx \end{cases}$ |
| senos y cosenos | $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nwx) + b_n sin(nwx) \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b cos(nwx)u(x)dx \\ b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b sin(nwx)u(x)dx \end{cases}$ |
| senos | $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right) \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b sin\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right)u(x)dx \end{cases}$ |
| cosenos | $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right) \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b cos\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right)u(x)dx \end{cases}$ |
| Transformada | $\begin{cases} u(x) = \int_{\Re^n} e^{ikx} c(k) d^n k & \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(c) & \rightarrow \text{Transformada inversa de c} \\ c(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Re^n} e^{-ikx} u(x) d^n x & \rightarrow \mathcal{F}(u) & \rightarrow \text{Transformada de u} \end{cases}$ |

(8)

## 2.5 Método de Separación de Variables

Sea un operador lineal $Lu = \sum_\alpha a_{alpha}(x) D^{alpha} u = 0$ que podamos separar en una suma de dos operadores de la forma:

$$L = A + B \rightarrow \begin{cases} A\left(x_0; \frac{\partial}{\partial x_0}\right) \\ B\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \end{cases}$$

$A$ sólo depende de $x_0$ mientras que $B$ no depende de esta variable.

En cuanto a los operadores frontera o condiciones de contorno, han de presentar el siguiente aspecto:

$${}_i(u) = 0$$

$$l(u) : \begin{cases} \left.\begin{cases} \forall v(x_0), w(x_2, \ldots, x_n) \\ l(vw) = l(v)w \end{cases}\right\} \text{se dice que l sólo opera sobre } x_0 \\ \left.\begin{cases} \forall v(x_0), w(x_2, \ldots, x_n) \\ l(vw) = vl(w) \end{cases}\right\} \text{se dice que l no opera sobre } x_0 \end{cases}$$

Veamos un esquema básico del método a seguir para separar ariables:

$$L(u) = A + B = 0$$

$$\text{Busquemos:} \left.\begin{cases} v(x_0) & \longrightarrow & Av = \lambda v \\ w(x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & Aw = -\lambda v \end{cases}\right\} \lambda \in \Re$$

$$\text{Solución } \longrightarrow u = vw \left.\begin{cases} A(vw) = A(v)w = \lambda vw \\ B(vw) = vB(w) = -v\lambda w \end{cases}\right\} A + B = 0$$

La idea es que al realizar el método dividimos el problema en dos más sencillos:

- Una ecuación diferencial ordinaria $Av = \lambda v$.
- Una ecuación en derivadas parciales de un orden inferior a la original $Bw = -\lambda w$.

### 2.5.1 Coordenadas cartesianas: La ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo presenta el siguiente aspecto:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\bigtriangledown u(\vec{r}) = Eu$$

Substituyendo $k^2 = \frac{amE}{\hbar^2}$ para simplificar el tratamiento de constantes, tenemos una ecuacíón tipo Helmholtz:

$$\bigtriangledown u + k^2 u = 0$$

Desarrollándola para dos variables x e y, la ecuación tiene el aspecto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

Que es separable respecto de ambos parámetros x e y del siguiente modo:

$$u(x,y) = X(x) + Y(y)$$

$$X(v) = \lambda v \begin{cases} v_{xx} = \lambda v \\ k_1 = -\lambda^2 \\ v = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x} \end{cases}$$
$$Y(w) = -\lambda w \begin{cases} w_{yy} + kw = -\lambda w \\ k_2 = \lambda^2 + k^2 \\ w = a_2 e^{ik_2 y} + b_2 e^{-ik_2 y} \end{cases}$$

Tomemos ahora las condiciones frontera. Supongamos que tenemos a la partícula confinada en una caja (un rectángulo) de lados $L_1$ y $L_2$. Es decir, que la probabilidad (u) de encontrar a la partícula fuera de dicha caja es nula, lo que implica que se anule en los bordes de la caja, es decir:

$$\begin{bmatrix} u(0,y) = 0 \\ u(L_1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,L_1) = 0 \end{bmatrix}$$

Como $u = vw$, apliquemos las condiciones frontera por separado:

$$\begin{array}{lll} v|_{x=0} = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x} = a_1 + b_1 = 0 & \longrightarrow & a_1 = -b_1 \\ v|_{x=L_1} = a_1 \left(e^{ik_1 x} - e^{-ik_1 x}\right) = 2ia_1 sen(k_1 L_1) = 0 & \longrightarrow & k_1 = \frac{\pi}{L_1} n_1 \ (\rightarrow n_1 \in \aleph) \\ w|_{y=0} = a_2 e^{ik_2 y} + b_2 e^{-ik_2 y} = a_2 + b_2 = 0 & \longrightarrow & a_2 = -b_2 \\ w|_{y=L_2} = a_2 \left(e^{ik_2 y} - e^{-ik_2 y}\right) = 2ia_2 sen(k_2 L_2) = 0 & \longrightarrow & k_2 = \frac{\pi}{L_2} n_2 \ (\rightarrow n_2 \in \aleph) \end{array}$$

Con todo, llegamos a la siguiente familia de soluciones:

$$\boxed{u(x,y) = K sen\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right)} \forall n_1, n_2 \in \aleph$$

En la página 13, están represenadas las gráficas para algunas combinaciones de $n_1$ y $n_2$.

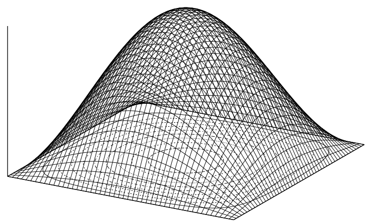

Ilustración 9: $n_1 = 1, n_2 = 1$

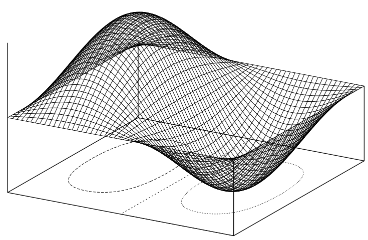

Ilustración 10: $n_1 = 1, n_2 = 2$

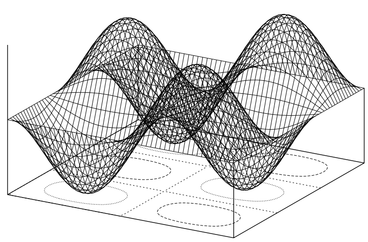

Ilustración 11: $n_1 = 2, n_2 = 3$

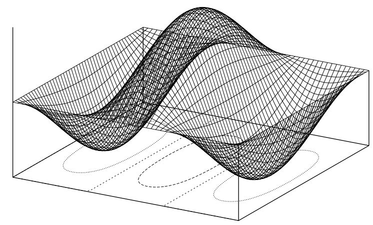

Ilustración 12: $n_1 = 1, n_2 = 3$

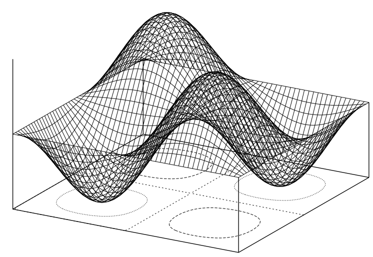

Ilustración 13: $n_1 = 2, n_2 = 1$

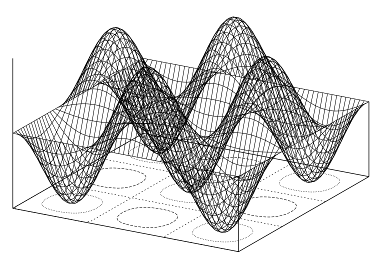

Ilustración 14: $n_1 = 3, n_2 = 3$

### 2.5.2 Helmholtz en cilíndricas

La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas presenta la siguiente forma:

$$\nabla u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} + k^2 u = 0$$

$Z$ es separable directamente:

$$u(r,\theta,z) = V(r,\theta)Z(z)$$

$$\frac{Z''}{Z} + k^2 = -\left(\frac{V_{rr}}{V} + \frac{V_r}{rV} + \frac{V_{\theta\theta}}{r^2 V}\right) = \alpha^2 \ \rightarrow \text{(cte. de separación)}$$

1. La ecuación que va con la coordenada $Z$ tiene soluciones ya resueltas de la forma:

$$\boxed{Z_\alpha(z) = Ae^{i\sqrt{k^2-\alpha^2}z} + Be^{-i\sqrt{k^2-\alpha^2}z}}$$

Separemos ahora la parte que va con coordenadas radiales (equivalente a un problema en polares):

$$V(r,\theta) = \Theta(\theta)R(r) \Rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \alpha^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = m^2 \ \rightarrow \text{(cte. de separación)}$$

2. La parte angular se resuelve de forma diferente si $m = 0$ ó $m \neq 0$:

$$\Theta'' = -m\Theta \begin{cases} m = 0 & \rightarrow \quad \boxed{\Theta = C + D\theta} \\ m \neq 0 & \rightarrow \quad \boxed{\Theta = Ce^{im\theta} + De^{-im\theta}} \end{cases}$$

3. En cuanto a a parte radial, nos queda con el siguiente aspecto:

$$r^2R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = m^2 R$$

En este caso tendremos que diferenciar no sólo si $m = 0$ sino también si $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 & \rightarrow \quad \boxed{R = C_1 Ln(r) + C_2} \\ m \neq 0 & \rightarrow \quad \boxed{R = C_1 r^m + C_2 r^{-m}} \end{cases} \\ \alpha \neq 0 & \rightarrow \quad \left[ \begin{array}{l} \rho = \alpha r \\ \rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - m^2)R = 0 \\ \boxed{R_{\alpha,m} = EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r)\ ^3} \end{array} \right. \end{cases}$$

### 2.5.3 Coordenadas esféricas

En esféricas, Helmholtz presenta el siguiente aspecto:

$$(r^2u_r)_r + k^2r^2u + \frac{1}{sen(\theta)}(sen(\theta)u_\theta)_\theta + \frac{1}{sen^2(\theta)}u_{\phi\phi} = 0$$

La parte radial podemos separarla directamente:

$$(r^2R')' + k^2r^2R = \lambda R \ \longrightarrow \ R(r) = AJ_l(kr) + BN_l(kr)$$

En cuanto a la parte angular, toma como soluciones los armónicos esféricos:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(cos\theta)^4 e^{im\phi}$$

[4]Polinomios de Legendre: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

## 2.6 Método de desarrollo en autofunciones

Tenemos una ecuación en derivadas parciales según:

$$A(x_0, x_0', \dots)u + B(x_1, x_2, \dots; x_1', x_2', \dots)u = f(x)$$

$$a_i(u) = g_i(x_1, x_2, \dots)$$

$$b_j(u) = h_j(x_0, x_1, x_2, \dots)$$

Buscamos una solución de la forma:

$$u(x) = \sum_m v_m(x_0) w_m(x_1, x_2, \dots)$$

| | |
|---|---|
| $Bw_m = \lambda w_m$ | autofunciones de B |
| $b_j(w_m) = 0$ | Problema espectral asociado |
| $v_m$ | Desconocido, en principio |
| $f(x) = \sum_m f_m(x_0) w_m(x_1, x_2, \dots)$ | Des. t. inhomogéneo |
| $g_i(x) = \sum_m c_{im} w_m(x_1, x_2, \dots)$ | Des. cond. inhomogéneas |
| $u(x) = \sum_m v_m * w_m$ | planteamos el problema obteniendo $v_m$ |

### 2.6.1 Ejemplo de desarrollo en autofunciones

| $u_t = ku_{xx}$ | $0 < x < l \ , \ t > 0 \ , \ k > 0$ |
|---|---|
| $u(t,0) = u_0$ | $t > 0$ |
| $u(t,l) = u_l$ | $t > 0$ |
| $u(0,x) = f(x)$ | $0 < x < l$ |

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x)$$

Comencemos separando variables:

$$u(t,x) = v(t)X(x) \longrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{v'}{v} = \lambda \text{ (cte de separación)}$$

Obtenemos así el problema espectral asociado homogeneizando las condiciones de contorno:

$$-X'' = \lambda X$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

Cuyas soluciones son de sobra conocidas:

$$X_n = sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$