Electromagnetismo I

Pablo M. García Corzo

2003-2004

Índice

1 Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{array}{ccc} \nabla \times H & = & \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E & = & -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot D & = & \rho \\ \nabla \cdot B & = & 0 \\ \hline \\ D & = & \epsilon\epsilon_0 E \\ B & = & \mu\mu_0 H \\ j & = & \sigma E \end{array} \tag{1}$$

2 Campo electrostático en el vacío

Estamos hablando de campo electrostático exclusivamente por lo que no hay campo magnético ($B = 0$, $H = 0$). En cuanto al vector desplazamiento $D = \epsilon_0 E + P$, si no hay dieléctricos no habrá polarización (vacío) con lo que reducimos las ecuaciones de Maxwell a 2:

$$\boxed{\begin{array}{c|cr} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 & \longrightarrow & \text{no hay fuentes vectoriales de campo} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} & \longrightarrow & \text{Las fuentes escalares de campo son las cargas} \end{array}} \tag{2}$$

El potencial de campo electrostático se define como el trabajo necesario para traer una carga unidad desde el infinito hasta un punto en el seno de un campo electrostático:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV'$$

Éste se relacciona directamente con el campo:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$

La fuerza de iteracción entre dos cargas (la que crea el campo y la que introducimos en su seno viene como:

$$F = qE$$

Si definimos una superficie cerrada S aprovechando unas determinadas condiciones de simetría en el problema calcularemos el campo sobre cualquier punto de dicha superficie gracias al teorema de gauss:

$$\underbrace{\oint_S E ds}_{\text{flujo}} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int_V \rho dV}_{\text{q. encerrada}}$$

2.1 Medios conductores

En el interior de un conductor no hay campo, por lo tanto el potencial es constante y no hay cargas, éstas se distribuyen por la superficie del conductor.

2.2 Desarrollo multipolar

Partiendo de la expresión del potencial, $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} dV'$, desarrollemos en serie de taylor el término $\frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{r \cdot r'}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{3(r \cdot r')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right) + \ldots$ obtenemos los siguiente términos:

- Término Monopolar (carga puntual)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int_V \rho(r')dV'}_{Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Término Dipolar (dipolo eléctrico)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r^3}\underbrace{\int_V r'\rho(r')dV'}_{\vec{p}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r^3}\vec{p}$$

El momento dipolar $\vec{p}$ viene dado por:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}')dV'$$

El generado por dos cargas puntuales será, pues:

$$\vec{p} = q\cdot\vec{l}$$

Un dipolo en el seno de un campo eléctrico, posee un potencial de la forma: $V = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pEcos\theta$. Tenderá a adoptar la posición de menor potencial, es decir, a alinearse con el campo eléctrico pero en sentido contrario. Dicho giro es causado por un par de fuerzas: $\vec{\Gamma} = \vec{p}\times\vec{E}$

- Término Cuadrupolar (cuadripolo eléctrico)

$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{x_i x_j}{r^5}\underbrace{\int_V (3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(r')dV'}_{Q_{ij}}$$

3 Campo electrostático en medios materiales

Como ya no estamos en el vacío, lo primero que hemos de cambiar es la constante de permitividad que pasará de ser ϵ_0 a $\epsilon_0\epsilon_r$. Además, en el momento en que tengamos dieléctricos, habrá polarización P:

$$\boxed{\begin{array}{l|cr} \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 & \longrightarrow & \text{no hay fuentes vectoriales de campo} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho(r) & \longrightarrow & \text{Las fuentes escalares son las cargas libres y ligadas} \end{array}} \quad (3)$$

Un dipolo eléctrico crea en su entorno un campo electrostático de la forma:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{p}\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

Polarización de un dieléctrico es el cociente entre el momento dipolar total y el volumen del dieléctrico:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

Mediante la Susceptibilidad Eléctrica (χ), la polarización es proporcional al campo en el interior del dieléctrico, el cual es a su vez proporcional al campo exterior mediante la Permitividad Eléctrica ($\epsilon_r = 1+\chi$):

$$P = \chi\epsilon_0 E_{int} = \chi\epsilon_0\frac{E}{\epsilon_r}$$

Un dieléctrico polarizado crea un potencial a su alrededor con la forma:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\oint_S \frac{\sigma_p}{r}dS}_{\text{superficial}} + \underbrace{\int_V \frac{\rho_p}{r}dV}_{\text{interior}}\right]\left\{\begin{array}{l}\rho_p = -\nabla\vec{P}\\ \sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{u}_n\end{array}\right.$$

Las cargas de polarización son cargas ligadas (no se mueven). La suma de cargas de superficie e interiores en todo el dieléctrico ha de ser, pues, cero.

3.1 Fronteras de dieléctricos

Normal	Paralela
$u_n \cdot (D_2 - D_1) = \sigma$	$u_n \times (E_2 - E_1) = 0$
$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2t} = E_{1t}$

$$\frac{tg(\theta_2)}{tg(\theta_1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

4 Campo Magnetostático en el vacío

$$\boxed{\begin{array}{l|ll}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} & \longrightarrow & \text{Las fuentes de campo son corrientes (vectoriales)}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \longrightarrow & \text{No hay fuentes escalares de campo}\end{array}} \quad (4)$$

4.1 Corriente electrica

Llamamos densidad de corriente $\vec{j}$ al producto de la densidad volumétrica de carga por la velocidad que dichas cargas llevan.

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

Intensidad de corriente en una superficie :

$$I = \int_S \vec{j}\vec{ds} = \underbrace{\frac{V_{A-B}}{R}}_{\text{Ohm}\rightarrow\vec{j}=\sigma_c\vec{E}}$$

[1]

Ecuación de continuidad:

$$\oint_S \vec{j}\vec{ds} = -\frac{dq}{dt} \longrightarrow \nabla\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}{}^2$$

Cuando introducimos carga en un material, trada un cierto tiempo en distribuirse por el mismo. Éste es el Tiempo de Relajación:

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma_c}$$

[1]Donde σ_c es la conductividad.

[2]Si $q = cte$, $\nabla\cdot\vec{j} = 0$.

4.2 Iteración entre corrientes

Sean dos circuitos 1 y 2:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) = -\vec{F}_{12}$$

El campo magnetostático creado por un circuito en un punto r viene dado por:

$$d\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}' \times (r - r')}{|r - r'|^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV'$$

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV'$$

En un punto alejado, podemos calcularlo como:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \right]$$

Definamos el TEOREMA DE AMPERE en un circuito cerrado c, que nos ayudará a obtener en campo magnético aprovechando simetrías:

$$\oint_c \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

Una partícula q que se mueva con velocidad v en el seno de un campo magnético B experimenta una fuerza:

$$F = (\vec{v} \times \vec{B}) q$$

4.3 Momento magnético

$$\vec{m} = I\vec{s}$$

donde $\vec{s}$ es el área encerrada por el circuito orientada según la regla de Maxwell.

Una partícula moviéndose en el seno de un campo magnético tenderá a girar, esto es, sufrirá la acción de un par de fuerzas:

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$$

El POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR se define como:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

El POTENCIAL MAGNÉTICO ESCALAR creado por un dipolo se define como:

$$V_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Para un circuito:

$$V_m = -\frac{I\Omega}{4\pi}$$

donde Ω es el ángulo sólido con que se ve al circuito desde r: $\Omega = \int_S \frac{d\vec{s}\vec{r}}{r^3}$.

5 Campo magnetostático en medios materiales

Al tener medios materiales nos encontraremos con corrientes de imanación.

$$\boxed{\begin{array}{l|ll} \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\vec{j}_m) & \longrightarrow & \text{Las fuentes vectoriales son corrientes reales y de imanación} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 & \longrightarrow & \text{No hay fuentes escalares de campo} \end{array}} \tag{5}$$

Podemos definir una nueva magnitud $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}=-\nabla\cdot V_m$ con:

$$\boxed{\begin{array}{l|ll} \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j} & \longrightarrow & \text{Las fuentes de campo son corrientes (vectoriales)} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}=\rho_m & \longrightarrow & \text{Las fuentes escalares vienen de la imanación} \end{array}} \tag{6}$$

5.1 Imanación

$$\vec{M}=\frac{d\vec{m}}{dV}$$

Un material imanado crea un campo:

$$\vec{B}=\mu_0\vec{M}-\mu_0\vec{\nabla}V_m$$

$$V_m=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\vec{M}\cdot(r-r')}{|r-r'|^3}dV'=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\rho_m}{|r-r'|}dV'+\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\sigma_m}{|r-r'|}dS'\left\{\begin{array}{l}\sigma_m=M\vec{u}_n\rightarrow\text{superficie}\\ \sigma_m=-\nabla\vec{M}\rightarrow\text{volumen}\end{array}\right.$$

5.2 Polos magnéticos

Un material imanado presenta polos magnéticos.

Las líneas de	$\vec{M}$	van de	$\ominus$ a $\oplus$	sólo por dentro.
Las líneas de	$\vec{H}$	van de	$\oplus$ a $\ominus$	por dentro y por fuera.
Las líneas de	$\vec{B}$	van de	$\ominus$ a $\oplus$	por dentro y al revés por fuera.

5.3 Frontera entre dos medios

Las componentes normales a la frontera del campo magnético B son iguales por ambos lados:

$$B_{2n}=B_{1n}$$

Las componentes tangenciales del campo H en la frontera se igualarán en ausencia de corrientes superficiales($\vec{k}$).

$$\vec{n}\times(H_2-H_1)=\vec{k}$$

6 Inducción electromagnética y movimiento de partículas

Llamamos flujo magnético a:

$$\Phi=\int_S\vec{B}d\vec{S}$$

6.1 Puente de unión móvil

Veamos lo que ocurre en un sistema con un circuito que posee un puente de unión móvil y se encuentra en el seno de un campo magnético:

La fuerza que actúa sobre el puente de unión móvil evitando que éste se abra viene dada por:

$$F = IlB$$

donde I es la intensidad que circula, l es la longitud del puente y B el campo encerrado.

La fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula en el seno de un campo electromagnético y que la hará girar en su trayectoria según la regla de Maxwell viene dada por:

$$F = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

7 Resumen: Tabla Comparativa

	Eléctrico	Magnético
Fuentes	q	$\vec{j}$
Fuerzas	$F = qE$	$F = (\vec{v} \times \vec{B})q$
Campos	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho \frac{r-r'}{\lvert r-r'\rvert^3} dV'$	$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \vec{j} \times \frac{r-r'}{\lvert r-r'\rvert^3} dV'$
Potencial	$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3} dV'$	$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ $V_m = \frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}$
Leyes	Gauss $\oint_S Eds = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dV$	Ampere $\oint_c \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I$
Dipolo e imanación	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r^3}\underbrace{\int_V r'\rho(r')dV'}_{\vec{p}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r^3}\vec{p}$	$\vec{m} = I\vec{s}$