- Tipos de ecuaciones

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

$$b^2 - ac < 0 \qquad \text{Elíptico} \qquad C_1 = \underbrace{y - \frac{b}{a}x}_{\zeta(x,y)} + i\underbrace{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}x}_{\eta(x,y)};\ C_2 = \underbrace{y - \frac{b}{a}x}_{\zeta(x,y)} - i\underbrace{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}x}_{\eta(x,y)}$$

$$b^2 - ac = 0 \qquad \text{Parabólico} \qquad C_1 = \underbrace{y}_{\zeta} \underbrace{- \frac{b}{a}x}_{\eta}$$

$$b^2 - ac > 0 \qquad \text{Hiperbólico} \qquad C_1 = \underbrace{y - \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}x}_{\zeta(x,y)};\ C_2 = \underbrace{y - \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}x}_{\eta(x,y)}$$

- Conmutadores

$$[L, M]u = L(Mu) - M(Lu)$$
$$[L, L] = 0$$
$$[L(x), M(y)] = 0$$

- Sturm Liouville

$$Lu = \frac{1}{\rho}\left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right]$$

$$p(a)\begin{vmatrix} \bar{u}(a) & v(a) \\ \frac{d\bar{u}}{dx}(a) & \frac{dv}{dx}(a) \end{vmatrix} = p(b)\begin{vmatrix} \bar{u}(b) & v(b) \\ \frac{d\bar{u}}{dx}(b) & \frac{dv}{dx}(b) \end{vmatrix}$$

- Fourier

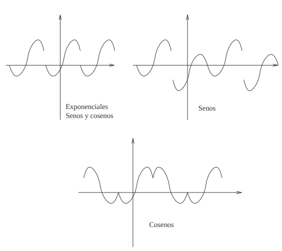
$$f(x) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwx} \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-inwx}u(x)dx \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nwx) + b_n sin(nwx) \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b cos(nwx)u(x)dx \\ b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b sin(nwx)u(x)dx \end{cases}$$

$$f(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right) \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b sin\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right)u(x)dx \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right) \begin{cases} w = \frac{2\pi}{b-a} \\ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b cos\left(\frac{nw}{2}(x-a)\right)u(x)dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = \int_{\Re^n} e^{ikx}c(k)d^nk & \to \mathcal{F}^{-1}(c) & \to \text{Transformada inversa} \\ c(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Re^n} e^{-ikx}u(x)d^nx & \to \mathcal{F}(u) & \to \text{Transformada de u} \end{cases} \tag{1}$$



- Condiciones frontera

Dirichlet: $l(u) = u|_S$
Neumann: $l(u) = \frac{\delta u}{\delta n}\Big|_S$
Mixtas: $l(u) = \left(au + b\frac{\delta u}{\delta n}\right)\Big|_S$

- Curvas características

$$\frac{dx_i}{a_i} = \frac{dx_j}{a_j} = \frac{du}{F}$$

$$yzu_x + xzu_y + xyu_z = -xyz^2u$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} = \frac{du}{-xyz^2u} \begin{cases} \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y^2 - z^2 = C_2 \\ dz = \frac{du}{-z^2u} \Rightarrow u = C_3 e^{-\frac{1}{3}z^3} \end{cases}$$

- Separación cartesianas

$$L(u) = A + B = 0$$

$$\text{Busquemos:} \left\{\begin{matrix} v(x_0) & \longrightarrow & Av = \lambda v \\ w(x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & Aw = -\lambda v \end{matrix}\right\} \lambda \in \Re$$

$$\text{Solución} \longrightarrow u = vw \left\{\begin{matrix} A(vw) = A(v)w = \lambda vw \\ B(vw) = vB(w) = -v\lambda w \end{matrix}\right\} A + B = 0$$

- Helmholtz cilindricas

$$\nabla u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} + k^2u = 0$$

Z es separable directamente:

$$u(r, \theta, z) = V(r, \theta)Z(z)$$

$$\frac{Z''}{Z} + k^2 = -\left(\frac{V_{rr}}{V} + \frac{V_r}{rV} + \frac{V_{\theta\theta}}{r^2V}\right) = \alpha^2 \ \to \text{(cte. de separación)}$$

1. La ecuación que va con la coordenada Z tiene soluciones ya resueltas de la forma:

$$\boxed{Z_\alpha(z) = Ae^{i\sqrt{k^2-\alpha^2}z} + Be^{-i\sqrt{k^2-\alpha^2}z}}$$

Separemos ahora la parte que va con coordenadas radiales (equivalente a un problema en polares):

$$V(r, \theta) = \Theta(\theta)R(r) \Rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \alpha^2r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = m^2 \ \to \text{(cte. de separación)}$$

2. La parte angular se resuelve de forma diferente si $m = 0$ ó $m \neq 0$:

$$\Theta'' = -m\Theta \begin{cases} m = 0 & \to & \boxed{\Theta = C + D\theta} \\ m \neq 0 & \to & \boxed{\Theta = Ce^{im\theta} + De^{-im\theta}} \end{cases}$$

3. En cuanto a a parte radial, nos queda con el siguiente aspecto:

$$r^2R'' + rR' + \alpha^2r^2R = m^2R$$

En este caso tendremos que diferenciar no sólo si $m = 0$ sino también si $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \to & \begin{cases} m = 0 & \to & \boxed{R = C_1Ln(r) + C_2} \\ m \neq 0 & \to & \boxed{R = C_1r^m + C_2r^{-m}} \end{cases} \\ \alpha \neq 0 & \to & \left[\begin{matrix} \rho = \alpha r \\ \rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - m^2)R = 0 \\ \boxed{R_{\alpha,m} = EJ_m(\alpha r) + FN_m(\alpha r)} \end{matrix}\right. \end{cases}$$

- Helmholtz Esféricas

En esféricas, Helmholtz presenta el siguiente aspecto:

$$(r^2u_r)_r + k^2r^2u + \frac{1}{sen(\theta)}(sen(\theta)u_\theta)_\theta + \frac{1}{sen^2(\theta)}u_{\phi\phi} = 0$$

La parte radial podemos separarla directamente:

$$(r^2R')' + k^2r^2R = \lambda R \ \longrightarrow\ R(r) = AJ_l(kr) + BN_l(kr)$$

si k=0 $R(r) = Ar^l + Br^{-l+1}$

En cuanto a la parte angular, toma como soluciones los armónicos esféricos:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(cos\theta)e^{im\phi}$$

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos(\theta)$$
$$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sin(\theta)e^{i\phi} \qquad Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sin(\theta)e^{-i\phi}$$

- Desarrollo en autofunciones Buscamos una solución de la forma:

$$u(x) = \sum_m v_m(x_0)w_m(x_1, x_2, \ldots)$$

$$\begin{array}{c|c} Bw_m = \lambda w_m & \text{autofunciones de B} \\ b_j(w_m) = 0 & \text{Problema espectral asociado} \\ v_m & \text{Desconocido, en principio} \\ f(x) = \sum_m f_m(x_0)w_m(x_1, x_2, \ldots) & \text{Des. t. inhomogéneo} \\ g_i(x) = \sum_m c_{im}w_m(x_1, x_2, \ldots) & \text{Des. cond. inhomogéneas} \\ u(x) = \sum_m v_mw_m & \text{planteamos el problema obteniendo } v_m \end{array}$$

Lo que hacemos es plantear el problema espectral asociado para obtener una base de autofunciones. Introduciremos dicha base en la expresión general de la solución.

Con las condiciones no homogéneas desarrolladas en series de Fourier, plantearemos los problemas de contorno para buscar los términos que falten en la expresión de la solución general.

- Funciones de Bessel:

$$\begin{array}{ll} & J_m(r) = (-r)^m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^m\frac{sen(r)}{r} \\ r \to \infty & J_m(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}cos(r - (2m+1)\frac{\pi}{4}) + O(r^{-3/2}) \\ r \to 0 & J_m(r) = \frac{(r/2)^m}{\Gamma(m+1)} \to m \text{ entero } \Gamma(m+1) = m! \to \text{ (regular)} \end{array}$$

- Funciones de Neumann:

$$\begin{array}{ll} & N_m(r) = -(-r)^m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^m\frac{cos(r)}{r} \\ r \to \infty & N_m(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}sin(r - (2m+1)\frac{\pi}{4}) + O(r^{-3/2}) \\ r \to 0 & N_m(r) = \left\{\begin{matrix} \frac{2}{\pi}log(r) \leftarrow m = 0 \\ -\frac{\Gamma(m)}{\pi(2r)^m} \leftarrow m \neq 0 \end{matrix}\right\} \text{singular} \end{array}$$

- Polinomios de Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$