

Mecánica y Ondas II

Pablo M. García Corzo

2004-05

Índice

1	Sólido Rígido	2
1.1	Movimiento en el Plano (bidimensional)	2
1.1.1	El sólido rígido en el plano	2
1.1.2	Grados de libertad	2
1.1.3	Eje o centro instantáneo de rotación: Conceptos de base y ruleta	2
1.1.4	Momento Lineal y Momento Angular	4
1.1.5	Energía Cinética	5
1.1.6	Estudio del Lagrangiano: Ecuaciones del movimiento	5
1.1.7	Análisis Lagrangiano del movimiento de un sólido rígido en dos dimensiones: Un caso Práctico	6
1.2	Movimiento en el espacio (tridimensional)	8
1.2.1	Teoremas geométricos de Euler y Chasles	8
1.2.2	El sólido rígido en el espacio. Conos polhodio e Herpolhodio	8
1.2.3	Ángulos de Euler	8
1.2.4	Momento Lineal y Momento Angular	9
1.2.5	Energía Cinética	10
1.2.6	Mariz de Inercia	10
1.2.7	Trompos: Clasificación de sólidos Rígidos	11
1.2.8	Elipsoide de Inercia	11
1.2.9	Ecuaciones del movimiento	12
1.2.10	Dificultades en el estudio del sólido rígido en el espacio	13
1.2.11	Ecuaciones de Euler	13
1.2.12	Algunos casos particulares	13
1.2.13	Dinámica del sólido libre	14
1.2.14	Trompo simétrico libre	15
1.3	Ejercicios Tema 1: Sólido Rígido	16
1.3.1	Problema 3	16
2	Fluidos	18
2.1	Propiedades de Fluidos	18
2.2	Movimiento de Fluidos	18
3	Oscilaciones y ondas	18
3.1	Oscilaciones Pequeñas	18
3.2	Ondas	18

1 Sólido Rígido

1.1 Movimiento en el Plano (bidimensional)

1.1.1 El sólido rígido en el plano

Consideraremos sólidos *continuos*, lo que significa que estarán formados por partículas infinitesimales (diferenciales), y vendrán definidos en el espacio por una función densidad $\rho(\vec{r})$.

Cuando tratamos el movimiento en dos dimensiones, hemos de tener en cuenta que la realidad física no es bidimensional sino tridimensional. Para poder trabajar con sólo dos dimensiones, hemos de considerar que el cuerpo posee *simetría* respecto al plano donde se mueve su centro de masas:

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$$

1.1.2 Grados de libertad

En el movimiento plano habrá 3 grados de libertad:

- **Dos de traslación** por las dos dimensiones en que puede moverse el centro de masas.
- Y **una de rotación** alrededor de un *centro instantáneo de rotación*.

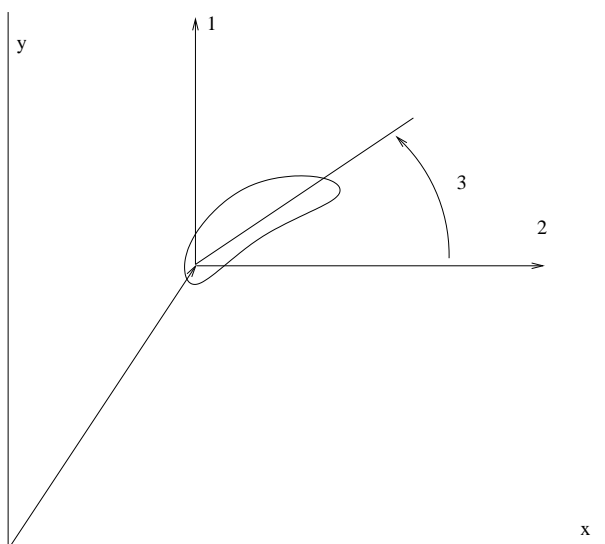


Ilustración 1: Grados de libertad en el movimiento plano de un sólido rígido

Veamos ahora cómo se reflejan los tres grados de libertad en el estudio del movimiento de una de las partículas cuyo vector posición es \vec{r}' :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{Rotación}} + \underbrace{v_{CM}}_{\text{Traslación}} = \begin{pmatrix} -yw \\ xw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \end{pmatrix}$$

1.1.3 Eje o centro instantáneo de rotación: Conceptos de base y ruleta

Vamos a definir el centro o eje instantáneo de rotación como el punto del espacio que en un momento determinado poseería velocidad cero. El punto puede estar dentro o fuera del sólido rígido, y puede variar en cada instante de tiempo.

Su localización matemática es muy sencilla, basta igualar la velocidad de un punto a cero:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -yw \\ xw \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} +yw \\ -xw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \end{pmatrix} \Rightarrow P \left(\frac{-v_{CMy}}{w}, \frac{v_{CMx}}{w} \right)$$

Una vez encontrado el centro instantáneo de rotación, definiremos dos elementos que coincidirán necesariamente en éste lugar geométrico: La ruleta y la base.

Comprendamos estos conceptos con tres ejemplos sencillos:

I. Cilindro sobre un plano inclinado

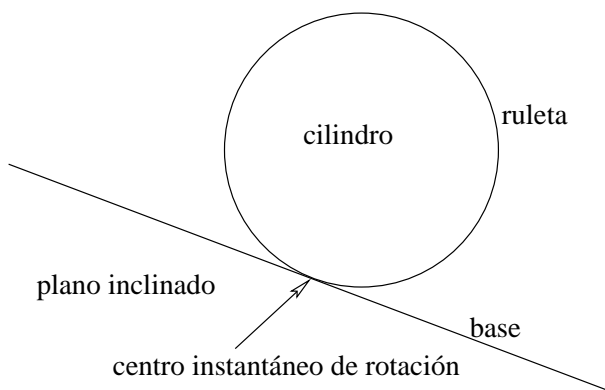


Ilustración 2: Cilindro sobre un plano inclinado

En este primer caso, el Centro Instantáneo de Rotación coincide con el punto de contacto entre el plano y el cilindro. La base coincide con el plano inclinado y la ruleta con la superficie del cilindro.

II. Sistema Tierra-Sol

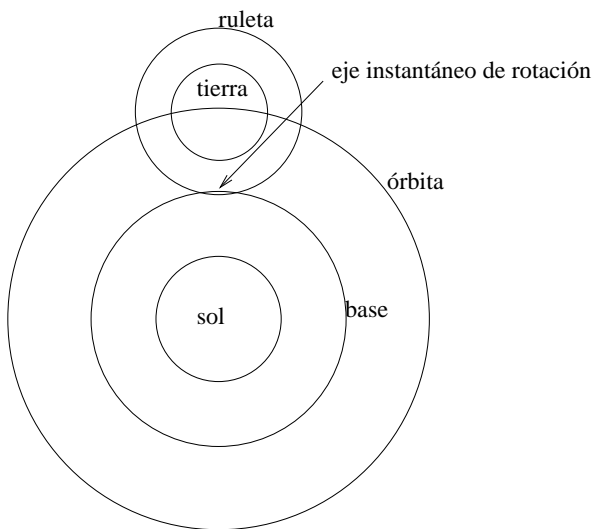


Ilustración 3: Sistema Tierra-Sol

En éste, el centro instantáneo de rotación se moverá junto con la Tierra a unos 400 Km en dirección al Sol. La base será una circunferencia (no estamos considerando que en realidad la órbita terrestre sea elipsoidal) con centro en el Sol y radio hasta el CIR, mientras que la ruleta será otra circunferencia con centro en la Tierra y radio hasta el CIR.

III. Sistema Tierra-Luna

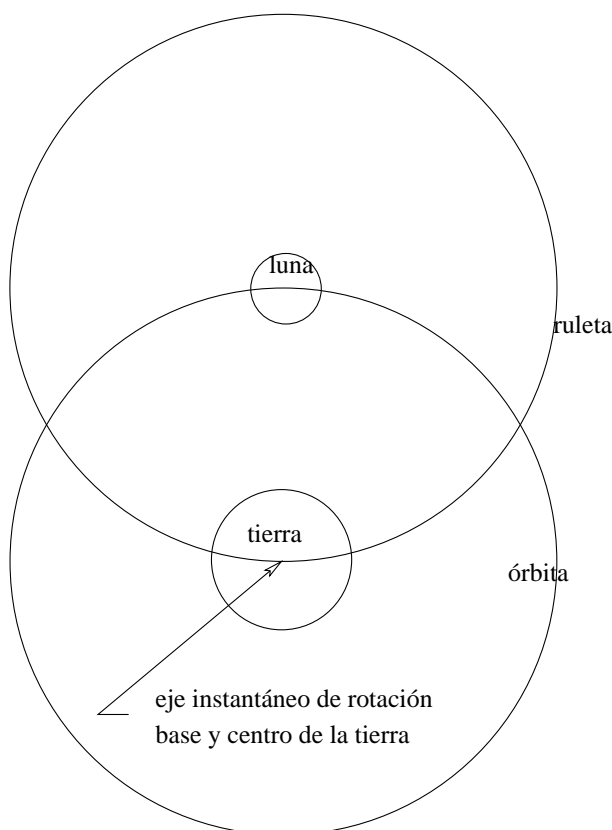


Ilustración 4: Sistema Tierra-Luna

Por último, en el caso de la Luna orbitando y rotando alrededor de la Tierra, el centro instantáneo de rotación coincide con el centro de la tierra. Esto significa que la base será una circunferencia de radio cero (un punto) coincidente también con el centro de la tierra, y que la ruleta será una circunferencia con centro en la Luna y radio hasta el centro de la tierra. Es fácil entender de este modo porque la Luna muestra siempre la misma cara a la Tierra.

1.1.4 Momento Lineal y Momento Angular

El momento Lineal lo definíamos para una partícula como el producto de la masa por la velocidad de dicha partícula ($\vec{p} = m\vec{v}$). Al aplicarlo a un sistema de partículas, los momentos lineales se suman vectorialmente. Al realizar la suma, vemos intuitivamente que la componente rotacional se anula, quedando sólo el movimiento del centro de masas:

$$\vec{p} = m\vec{v}_{CM}$$

En cuanto al momento angular, resulta también intuitivo que tendrá sólo la componente perpendicular al plano del movimiento ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$):

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \int_V (x^2 + y^2) \rho(r) dV \end{pmatrix}$$

En la última expresión vemos explícita la definición de momento de Inercia (I_0). Recordemos que el momento de inercia de una partícula viene dado por $I = mr^2$, que se generaliza inmediatamente como $I = \int_V \rho r'^2 dV$ que encontramos en la expresión del momento angular, expresión que podremos reescribir como $\vec{L} = I_0 \vec{\omega}$.

Nos será útil recordar también el Teorema de Steiner que nos permitía determinar el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje conociendolo respecto a otro eje paralelo a éste y que pase por el centro de masas: $I_0 = I_{CM} + md^2$

Llamaremos *Radio de giro* (k) al radio imaginario sobre el que podríamos distribuir en forma de aro toda la masa del sólido manteniendo el momento de inercia:

$$I = mk^2 \longrightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

1.1.5 Energía Cinética

En cuanto a la energía cinética, que definimos como la mitad del producto entre la masa y la velocidad al cuadrado para una partícula, la redefiniremos para un volumen arbitrario como sigue:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \longrightarrow \text{Teniendo en cuenta } v = v_0 + w \times r \implies T = \frac{1}{2} \int_V \rho (v_0 + w \times r)^2 dV$$

De donde obtenemos tres términos diferentes:

$$T = \begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 \\ + \\ \vec{v}_0 \cdot \vec{w} \times \int_V \rho \vec{r} dV \\ + \\ \frac{1}{2}w^2 \int_V (x^2 + y^2) \rho dV \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{v}_0 \cdot \vec{w} \times \vec{r}_c m \\ + \\ \frac{1}{2}I_0 w^2 \end{cases}$$

Analicemos los términos obtenidos para la energía cinética en función del sistema de referencia que elijamos:

- Si utilizamos el centro de masas como origen de nuestro sistema de referencia, el segundo término se anula, ya que $\vec{r}_c = 0$. Por tanto la expresión se nos queda como:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c w^2}$$

- Si utilizamos como origen de nuestro sistema de referencia el centro instantáneo de rotación, se nos anularán todas las velocidades no angulares (por la definición de CIR):

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_0 w^2}$$

1.1.6 Estudio del Lagrangiano: Ecuaciones del movimiento

Analicemos en primer lugar cuáles serán las coordenadas generalizadas.

Hemos visto que en un problema genérico nos encontramos con tres grados de libertad. Por cada grado de libertad, situaremos una coordenada generalizada. Así llamaremos x y y a las coordenadas que sitúan en el plano al punto de referencia que elijamos (en la ilustración 1 denotamos estos grados de libertad con los números 1 y 2) y llamemos φ a la coordenada angular que nos indique el giro del sólido rígido (que en la ilustración 1 denotamos con el número 3).

$$(1, 2, 3)$$

$$(x, y, \varphi)$$

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi})$$

Asumiendo que nuestro sistema de coordenadas está situado sobre el centro de masas (nos "montamos" sobre el sólido rígido) el lagrangiano tomará la forma:

$$\mathcal{L} = T(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \varphi, \dot{\varphi}) - U(x, y, \varphi) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_c \dot{\varphi}^2 - U(x, y, \varphi)$$

Las ecuaciones del movimiento las obtendremos de la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \begin{cases} m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ I_c \ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

En caso de que encontrásemos fuerzas no conservativas, las igualaríamos a la ecuación de Lagrange en lugar de igualar ésta a cero, con lo que obtendríamos en las ecuaciones de movimiento, las ecuaciones de Newton para fuerzas y momentos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_{NC} \begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + F_x \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} + F_y \\ I_c \ddot{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} + N_\varphi \end{cases}$$

1.1.7 Análisis Lagrangiano del movimiento de un sólido rígido en dos dimensiones: Un caso Práctico

Pongamos un cilindro sobre un plano inclinado sobre el que rodará sin deslizar. Hagámoslo pender de un muelle por la parte superior del modo en que se muestra en el esquema:

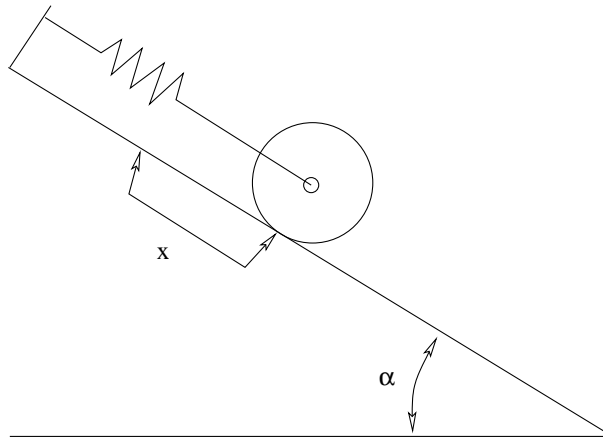


Ilustración 5: Caso práctico para movimiento bidimensional

Analicemos en primer lugar los grados de libertad del sistema para elegir unas coordenadas generalizadas. El cilindro tendría tres grados de libertad en principio que corresponderían con las coordenadas x e y de traslación y la coordenada φ de rotación del sólido. El plano inclinado es la primera ligadura que nos elimina una de las coordenadas de traslación con sólo tomar apropiadamente el sistema de referencia con un eje paralelo al plano. Digamos que nos quedamos con la coordenada x

Otra ligadura nos la da la condición de no deslizamiento, que auna la coordenada de rotación con la de traslación: $x = R\varphi$, donde R es el radio del cilindro.

Con todo nos hemos quedado con un sólo grado de libertad. Llamaremos x a la distancia desde el *centro de masas* del cilindro o el *centro instantáneo de rotación* hasta el punto de elongación nula del muelle.

Podemos utilizar como eje de referencia el centro de masas o el centro instantáneo de rotación. Según el eje elegido, encontraremos una diferencia formal que no debería afectar al resultado final.

Haremos de todas formas ambas variantes para ver cómo se desarrolla el problema paso a paso.

I. Respecto al CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN:

Si estamos montados sobre el eje instantáneo de rotación, la energía cinética tomará la forma de la expresión: $T = \frac{1}{2}I_0\omega^2$, en la que el momento de inercia de un cilindro respecto de un eje que pase por el centro de masas viene dado por la expresión: $I_c = \frac{1}{2}mR^2$, y aplicando el teorema de Steiner podemos calcular dicho momento respecto al eje instantáneo de rotación: $I_0 = I_c + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

Metiendo esto en la expresión de la energía cinética:

$$T = \frac{3}{4}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

II. Respecto al CENTRO DE MASAS:

La expresión de la energía cinética respecto al eje que pasa por el centro de masas tomará una forma diferente: $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$. Ahora el momento de inercia responde a la expresión: $I_c = \frac{1}{2}mR^2$, con lo que, finalmente:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

Llegamos, por tanto a la misma expresión por ambos caminos para la energía cinética. El resto del análisis se desarrollará idénticamente para ambos planteamientos:

En cuanto al potencial, tendremos que ponerle dos sumandos, el del potencial gravitatorio y el del potencial central del muelle:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mgx\text{sen}(\alpha)$$

(En la expresión del potencial van implícitas las ligaduras del plano inclinado.)

Ya tenemos la expresión del Lagrangiano, que meteremos en la ecuación de Lagrange y sacaremos en un momento las ecuaciones del movimiento (en éste caso una única ecuación para un único grado de libertad):

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mgx\text{sen}(\alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x} - kx - mg\text{sen}(\alpha) = 0}$$

1.2 Movimiento en el espacio (tridimensional)

1.2.1 Teoremas geométricos de Euler y Chasles

I. TEOREMA DE EULER:

Dadas 2 posiciones de un sólido rígido con *un punto fijo* O , siempre se puede pasar de una a otra mediante *un único giro* alrededor de un *eje que pase por ese punto* O .

II. TEOREMA DE CHASLES:

Dadas dos posiciones de un sólido rígido en el espacio, bastan *un movimiento de traslación y otro de rotación* para pasar de una a otra. Existe un número infinito de combinaciones, pero *una única combinación* en la que los *ejes de rotación y traslación son paralelos*, generando un movimiento de tipo *helicoidal*.

1.2.2 El sólido rígido en el espacio. Conos polhodio e Herpolhodio

Cuando nos encontramos en el espacio, necesitaremos más datos para determinar unívocamente la posición y estado de movimiento del sólido rígido:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + w \times r \\ a &= a_0 + \dot{w} \times r + w \times (w \times r) \end{aligned}$$

Tendremos tres coordenadas en lugar de dos para los vectores de posición. Además, la velocidad angular no tendrá una dirección fija.

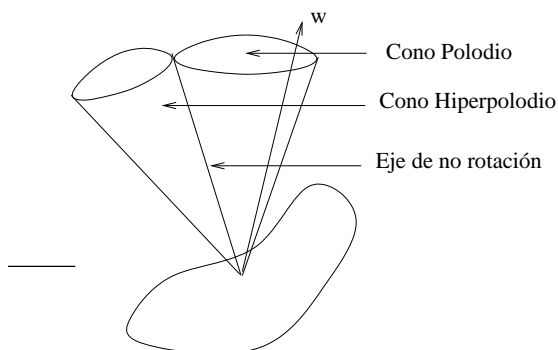


Ilustración 6: Conos polhodio e Herpolhodio

Ésta se moverá describiendo un cono al que llamaremos *Cono polhodio* que juega un papel simétrico al que jugaba la ruleta en el caso bidimensional. Asimismo, igual que en el caso bidimensional teníamos una base sobre la que "rodaba" la ruleta, tendemos en el espacio otro cono al que denominaremos *Herpolhodio*. El eje sobre el que se apoyan ambos conos que recibió el nombre de eje instantáneo de rotación en el caso plano, será ahora un *eje de no rotación*, que podremos localizar del siguiente modo:

$$r = \frac{1}{w^2} w \times v_0 + \mu w$$

1.2.3 Ángulos de Euler

Necesitamos para el estudio del sólido rígido en el espacio, tres coordenadas rectangulares para delimitar la posición del centro de masas así como tres coordenadas angulares que nos indicarán el estado de giro y nos ayudarán a estudiar su movimiento.

$$\text{Coordenadas} \begin{cases} (x, y, z) \longrightarrow \text{Lineales} \\ (\varphi, \vartheta, \psi) \longrightarrow \text{Angulares} \end{cases}$$

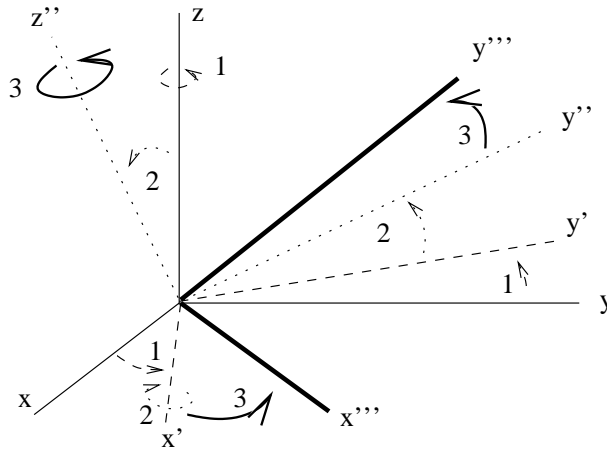


Ilustración 7: Ángulos de Euler

Todos los giros del sólido vendrán determinados por variaciones en dichas coordenadas angulares.

Un primer giro (según ilustración) en torno al eje Z , será denotado con la coordenada φ , y su variación con el tiempo $\dot{\varphi}$ será denominada PRECESIÓN.

Un segundo giro (según ilustración) en torno al nuevo eje x' será identificado con la coordenada ϑ , y su derivada respecto del tiempo $\dot{\vartheta}$ será la NUTACIÓN.

Un tercer giro (según ilustración) en torno al nuevo eje z'' , que denotaremos con la coordenada ψ será aquel cuya variación con el tiempo $\dot{\psi}$ llamaremos SPIN.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} & \text{Precesión} \\ \dot{\vartheta} & \text{Nutación} \\ \dot{\psi} & \text{Spin} \end{cases}$$

Con esa notación, las componentes de la velocidad angular w , toman la forma:

$$\begin{cases} w_x = \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \sin(\psi) + \dot{\vartheta} \cos(\psi) \\ w_y = \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \cos(\psi) - \dot{\vartheta} \sin(\psi) \\ w_z = \dot{\varphi} \cos(\vartheta) + \dot{\psi} \end{cases}$$

1.2.4 Momento Lineal y Momento Angular

El momento lineal no presenta ninguna dificultad, ya que, igual que en el caso plano, los términos que dan el momento de cada punto debidos al movimiento angular se anulan entre sí, quedando sólo los términos debidos al movimiento del centro de masas:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c$$

El momento angular sí que nos dará algún que otro quebradero de cabeza.

El momento en sí mismo nos lo da:

$$L = r \times p$$

Fijemos un eje de referencia:

$$L_0 = -v_o \times \int_V r \rho dV + \int_V \rho(r \times (w \times r)) dV$$

Cuando situamos nuestro eje sobre el centro de masas o sobre un centro fijo, el primer sumando se anula con el vector r o con la velocidad v , nos queda, por tanto, sólo el segundo término, que desarrollaremos a continuación:

$$L_0 = \int_V \rho(r \times (w \times r)) dV = \int_V \rho(w(r^2) - r(w \cdot r)) dV$$

En esta expresión nos gustaría ver, como nos sucedía con el movimiento bidimensional, implícitamente un operador que podamos identificar con el momento de inercia, para obtener una ecuación más simple de la forma $L = Iw$. Ésta expresión es posible, identificando en momento de inercia de un modo diferente.

El momento de inercia de un sólido rígido que se mueve por el espacio es un *tensor* de la forma:

$$I_{ij} = \int_V (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho dV$$

1

Veámos brevemente cómo se desarrolla matricialmente esa expresión, aunque posteriormente (ver 1.2.6) estudiaremos la matriz de inercia más en profundidad:

$$I = \int_V \left(\begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} - x_i x_j \right) \rho dV = \int_V \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{pmatrix} \rho dV$$

Con dicho momento de inercia, la expresión del momento angular es $L_0 = Iw$

Y respecto a cualquier otro eje:

$$L_a = r_{ac} \times p + L_0$$

1.2.5 Energía Cinética

La expresión de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} \int_V (v_0 + w \times r)^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int v_0^2 dm + \int_V v_0 (w \times r) \rho dV + \frac{1}{2} \int_V (w \times r)^2 \rho dV$$

Según el eje de referencia que elijamos:

$$\begin{array}{ll} \text{Eje de no rotación} & T = \frac{1}{2} \int_V (w \times r)^2 \rho dV \\ \text{Centro de masas} & T = \frac{1}{2} v_c^2 m + \frac{1}{2} \int_V (w \times r)^2 \rho dV \end{array}$$

En el caso del centro de masas como punto de referencia, podemos distinguir un término claramente de traslación y otro de rotación. El término de rotación (único en el caso de un eje de referencia de no rotación) tiene la forma:

$$(w \times r)^2 = \begin{pmatrix} zw_y - yw_z \\ xw_z - zw_x \\ yw_x - xw_y \end{pmatrix}^2$$

Con todo, el término rotacional de la energía cinética tiene la forma:

$$T_R = \frac{1}{2} I_{ij} w_i w_j = \frac{1}{2} w I w = \frac{1}{2} w L_c$$

1.2.6 Mariz de Inercia

Hemos visto que en el espacio estudiamos el momento de inercia no como un escalar sino como una forma matricial. Dicha forma matricial cumple además una propiedad (propiedad tensorial) que nos licitará a llamarla tensor: $T' = C^t T C$

El tensor de inercia presentará una serie de propiedades que nos serán útiles para calcularlo en casos particulares:

- Determinación del momento de inercia respecto de un eje cualquiera que pasa por el centro de masas.

$$I_n = n I n$$

¹Delta de Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \forall i \neq j \\ 1 \forall i = j \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Teorema de ejes paralelos. Generalización del teorema de Steiner.

$$I_0 = I_c + m(c^2\delta_{ij} - c_i c_j)$$

- Diagonalización de la matriz de inercia.

$$I_D = A^{-1}IA = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

En esta expresión, los autovalores (I_1, I_2, I_3) son los respectivos momentos de inercia respecto de los ejes principales, y los cambios de coordenadas (A^{-1}, A) nos indican las direcciones de dichos ejes principales. Según los autovalores de la matriz de inercia, definiremos tres casos diferentes de sólido rígido (también llamado trompo) según las simetrías que presenten (ver 1.2.7).

1.2.7 Trompos: Clasificación de sólidos Rígidos

Al obtener la forma diagonal de la matriz de inercia, tenemos como resultado formal, tres direcciones o ejes principales y los valores correspondientes del momento de inercia respecto a cada eje. Según dichos momentos (autovalores de la matriz de inercia) hablaremos de tres tipos de trompo:

Trompo Asimétrico $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

Trompo Simétrico $I_1 = I_2 \neq I_3$

Trompo Esférico $I_1 = I_2 = I_3$

Unas pocas propiedades nos ayudarán a localizar los ejes principales:

- Si el trompo presenta un plano de simetría, habrá un eje principal que será perpendicular al mismo pasando por el centro de masas.
- Si el trompo presenta un eje de simetría de cualquier orden, dicho eje será un eje principal. En caso de que dicha simetría axial² sea de orden > 2 entonces el trompo será simétrico.

1.2.8 Elipsoide de Inercia

Es el lugar geométrico representado por:

$$I_{ij}x_i x_j = 1$$

Como ejes de referencia tomaremos los ejes principales, que nos determinarán asimismo los ejes del elipsoide, simplificando al máximo la ecuación como sigue:

$$I_1x^2 + I_2y^2 + I_3z^2 = 1$$

Veamos en un pequeño ejemplo cómo determinar los ejes principales mediante el estudio de simetrías en el sólido y cómo quedaría con ellos determinado el elipsoide de inercia y qué valores tomarán los momentos de inercia respecto de dichas direcciones o ejes principales:

- En primer lugar encontramos un eje e_2 de simetría de orden 2 que será por sí mismo un eje principal.
- Encontramos un plano de simetría P_1 . Perpendicular a éste y pasando por el centro de masas trazaremos un segundo eje principal e_3 .
- De manera análoga al caso anterior, encontramos un último plano de simetría P_2 que nos ayudará a determinar el tercer eje principal con la dirección de su normal y pasando por el centro de masas.

²Simetría axial de orden n : $\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, \varphi + \frac{2\pi}{n}, z)$.

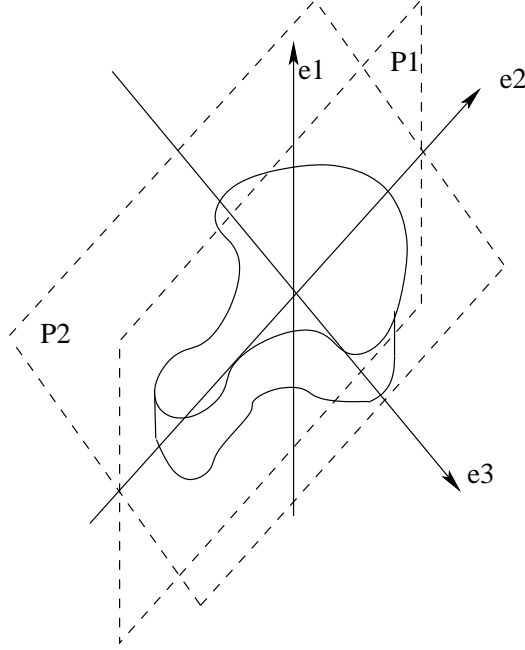


Ilustración 8: Determinación de ejes principales

1.2.9 Ecuaciones del movimiento

Para expresar la energía cinética vamos a necesitar las tres coordenadas del centro de masas (que nos darán la parte lineal de dicha energía) y los tres ángulos de Euler (que determinarán la parte angular):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_1w_x^2 + I_2w_y^2 + I_3w_z^2) \longrightarrow \begin{cases} w_x = \dot{\varphi}\text{sen}(\vartheta)\text{sen}(\psi) + \dot{\vartheta}\text{cos}(\psi) \\ w_y = \dot{\varphi}\text{sen}(\vartheta)\text{cos}(\psi) - \dot{\vartheta}\text{sen}(\psi) \\ w_z = \dot{\varphi}\text{cos}(\vartheta) + \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$T = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \vartheta, \psi)$$

$$U = U(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)$$

Una vez determinada la forma de las energías cinética y potencial, podemos atacar a la ecuación de Lagrange:

$$\mathcal{L} = T - U \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

Separaremos según el tipo de coordenadas:

I. Coordenadas lineales: $R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0 \implies \frac{d}{dt} \vec{p} = -\nabla_R U$$

II. Coordenada angular φ que no aparece explícitamente en la expresión de la energía cinética:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \implies \frac{d}{dt} \vec{p}_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = F_\varphi$$

III. Coordenadas angulares ϑ, ψ que sí aparecen explícitamente en la expresión de la energía cinética:

$$\frac{dL_c}{dt} = -N_c$$

1.2.10 Dificultades en el estudio del sólido rígido en el espacio

I. Tenemos un momento lineal y un momento angular que derivan de sendas velocidades lineal y angular. La velocidad lineal es paralela al momento lineal, pero *el momento angular no es paralelo a la velocidad angular*.

$$\begin{cases} \vec{p}(\vec{v}) & \vec{p} \parallel \vec{v} \\ \vec{L}(\vec{\omega}) & \vec{L} \not\parallel \vec{\omega} \end{cases}$$

II. Los ángulos de Euler son complicados de manejar y *no conmutativos*:

$$\begin{cases} w_x = \dot{\varphi} \operatorname{sen}(\vartheta) \operatorname{sen}(\psi) + \dot{\vartheta} \operatorname{cos}(\psi) \\ w_y = \dot{\varphi} \operatorname{sen}(\vartheta) \operatorname{cos}(\psi) - \dot{\vartheta} \operatorname{sen}(\psi) \\ w_z = \dot{\varphi} \operatorname{cos}(\vartheta) + \dot{\psi} \end{cases}$$

III. Aparentemente, necesitaremos conocer w para aplicar $L = Iw$ (que, en el fondo, es el resultado que buscamos).

IV. Las componentes de w no derivan de ninguna coordenada.

1.2.11 Ecuaciones de Euler

Tomemos un punto de referencia en reposo y analicemos su movimiento (podremos olvidarnos de las partes lineales o de movimiento del centro de masas):

$$\frac{dL_0}{dt} = N_0 \longrightarrow L_0 = I_0 w$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \varphi, \vartheta, \psi)$$

Utilizando ejes principales: $L = I_1 w_x \vec{i} + I_2 w_y \vec{j} + I_3 w_z \vec{k}$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\substack{d^* \\ dt \\ \text{derivada en el} \\ \text{sistema fijo}}} L = N = \begin{cases} \frac{d^*}{dt} L = I_1 \dot{w}_x \vec{i} + I_2 \dot{w}_y \vec{j} + I_3 \dot{w}_z \vec{k} \\ w \times L = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_x & w_y & w_z \\ I_1 w_x & I_2 w_y & I_3 w_z \end{vmatrix} \end{cases} \quad +w \times$$

Con todo, obtenemos las siguientes ecuaciones de Euler para el movimiento del sólido rígido en el espacio desde un punto de referencia en reposo:

$\begin{aligned} I_1 \dot{w}_x + (I_3 - I_2) w_y w_z &= N_x \\ I_2 \dot{w}_y + (I_1 - I_3) w_x w_z &= N_y \\ I_3 \dot{w}_z + (I_2 - I_1) w_y w_x &= N_z \end{aligned}$
--

1.2.12 Algunos casos particulares

No siempre vamos a poder encontrar soluciones a un problema aleatorio. Tendremos que restringirnos a determinadas circunstancias que simplifiquen el problema. Dichas circunstancias las encontraremos en simetrías, ausencia de fuerzas o momentos, independencia del tiempo de alguna variable... Veamos algunas de estas circunstancias:

I. Problema libre de momentos:

$$N_k = 0$$

Podremos encontrar soluciones mediante funciones elípticas.

II. Problema en que las componentes principales de la velocidad angular son constantes conocidas y los momentos son desconocidos:

$$\dot{w}_k = 0 \implies \begin{cases} (I_3 - I_2)w_y w_z = N_x \\ (I_1 - I_3)w_x w_z = N_y \\ (I_2 - I_1)w_y w_x = N_z \end{cases}$$

III. Problema donde las componentes de la velocidad angular son constantes y conocidas y los momentos angulares son idénticamente cero:

$$\dot{w}_k = 0; N_k = 0 \implies \begin{cases} (I_3 - I_2)w_y w_z = 0 \\ (I_1 - I_3)w_x w_z = 0 \\ (I_2 - I_1)w_y w_x = 0 \end{cases}$$

Estudiemos los diferentes tipos de trompo bajo estas restricciones y veamos si podemos encontrar soluciones sencillas:

- Trompo asimétrico:

Para poder estudiarlo tendrían que ser cero al menos dos de las componentes de la velocidad angular: $w_x = w_y = 0 \implies \vec{w} = w_z \vec{k}$

La velocidad angular tendrá que ser paralela a la dirección de velocidad angular distinta de cero.

- Trompo simétrico:

Dos de los autovalores de la matriz de inercia son iguales, por lo que se anula una de las ecuaciones de Euler:

$$\dot{w}_k = 0; N_k = 0; I_1 = I_2 \neq I_3 \implies \begin{cases} (I_3 - I_2)w_y w_z = 0 \\ (I_1 - I_3)w_x w_z = 0 \end{cases}$$

Seremos capaces de estudiar dos circunstancias diferentes:

$$\begin{cases} w_x = w_y = 0 \\ w_z = 0 \end{cases} \quad \vec{w} \in (x, y) \rightarrow \text{eje principal en } (x, y): \text{ degeneración} \quad \vec{w} = w_z \vec{k}$$

- Trompo esférico:

En este caso, todas las direcciones son principales, por lo que bastaría tomar w_k paralela a una dirección principal.

1.2.13 Dinámica del sólido libre

Diremos que hablamos de un sólido libre cuando las fuerzas y momentos generalizados sean nulos: $F = 0; N = 0$

Dada dicha circunstancia, podremos aplicar dos invariantes:

I. Ley de conservación de la energía:

$$I_1 w_x^2 + I_2 w_y^2 + I_3 w_z^2 = 2T = Cte$$

II. Ley de conservación del Momento Angular:

$$I_1^2 w_x^2 + I_2^2 w_y^2 + I_3^2 w_z^2 = L^2 = Cte$$

Analíticamente, las leyes describen sendos elipsoides cuya intersección será la trayectoria de la velocidad angular ($\rho_k = \frac{w_k}{\sqrt{2T}}$).

$$I_1 \rho_1^2 + I_2 \rho_2^2 + I_3 \rho_3^2 = 1$$

La trayectoria de ρ sobre el elipsoide se denomina polhodia.

En cada momento, tangente a la polhodia y al elipsoide de inercia, está el llamado plano invariante.

El elipsoide de inercia rueda sin deslizar sobre el plano invariante. La curva trazada sobre el elipsoide es la polhodia y la trazada sobre el plano de inercia es la herpolhodia. El centro del elipsoide de inercia se mantiene a una altura constante sobre el plano (de ahí que sea llamado el plano invariante).

1.2.14 Trompo simétrico libre

La condición de sólido libre se expresa como $N_k = 0$.

El hecho de que sea un trompo simétrico implica $I_1 = I_2 \neq I_3$.

Las ecuaciones de Euler toman la forma:

$$\begin{cases} I_1 \dot{w}_x + (I_3 - I_1) w_y w_z = 0 \\ I_1 \dot{w}_y + (I_1 - I_3) w_x w_z = 0 \\ I_3 \dot{w}_z = 0 \longrightarrow w_z = cte \end{cases}$$

Definiendo, para simplificar la escritura, $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} w_z$ obtenemos de forma simplificada:

$$\begin{cases} \dot{w}_x = -\Omega w_y \\ \dot{w}_y = \Omega w_x \end{cases} \rightarrow w_{xy}^2 = w_x^2 + w_y^2 = cte = D^2 \rightarrow \begin{cases} w_x = D \cos(\Omega t + \delta) \\ w_y = D \sin(\Omega t + \delta) \end{cases}$$

\vec{w} describe un cono alrededor del eje z con semiángulo de apertura $\alpha = \text{atan} \left(\frac{w_{xy}}{w_z} \right)$

1.3 Ejercicios Tema 1: Solido R gido

1.3.1 Problema 3

Nuestro sistema consiste (ver 9) en un aro de radio R una varilla de longitud $3R$ y masa M . El aro está fijo mientras el extremo A de la varilla puede deslizar sin rozamiento a lo largo del aro. La varilla tiene un punto sujeto a una apertura del aro en C . Inicialmente la varilla forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el diámetro horizontal del aro, y se la deja caer libremente. Calcular la velocidad del extremo A al pasar por la posición horizontal. Determinar también la posición del Centro Instantáneo de Rotación (CIR).

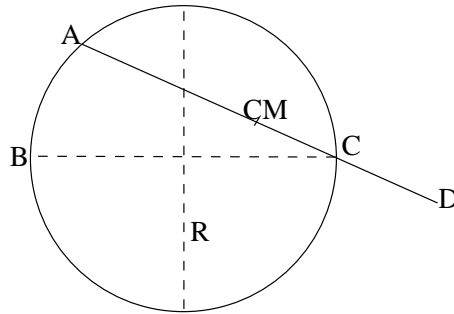


Ilustración 9: Ejercicio 3

I. Comencemos analizando las dimensiones y grados de libertad del problema:

Tenemos dos sólidos rígidos sobre el plano, por lo que partimos de 6 grados de libertad:

- El aro está fijo, es decir que las ligaduras restringen sus tres grados de libertad.
- En cuanto a la barra, tendría tres grados de libertad, dos de traslación del centro de masas y una de rotación. El punto fijo que tiene sobre el punto C del aro nos restringe las dos coordenadas de traslación x_c, y_c . Parece intuitivo tomar el ángulo β que forma la barra con el diámetro horizontal del aro como única coordenada generalizada. $1GL \rightarrow \beta$

Las ligaduras toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} r_x &= -\overline{C-CM} \cos(\beta) \\ r_y &= \overline{C-CM} \sin(\beta) \end{aligned} \right\} \overline{C-CM} = \overline{A-C} - \overline{A-CM} = 2R \cos \beta - \frac{3}{2}R \equiv \xi \begin{cases} r_x = -\xi \cos(\beta) \\ r_y = \xi \sin(\beta) \end{cases}$$

II. Ahora vamos a determinar el origen de nuestro sistema de coordenadas. Voy a situarlo sobre C , de modo que la energía cinética la expresaré como suma de la energía de traslación del centro de masas y la de rotación de la barra:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

- Veámos la forma que presenta el término \dot{r}_{CM} en función de nuestra coordenada generalizada β :

$$\dot{r}_{CM} = \omega \times \vec{r}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\beta} \xi \sin(\beta) \\ -\dot{\beta} \xi \cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En cuanto al término rotacional, necesitamos calcular el momento de inercia, que variará con β ya que nuestro centro de referencia se desplazará a lo largo de la barra. Calcularemos el momento de inercia sobre el centro de masas y lo desplazaremos mediante el teorema de Steiner:

$$I_C = I_{CM} + M \overline{C-CM}^2 = \frac{9}{12} MR^2 + M \xi^2$$

Ahora podemos introducir los términos calculados y expresar la energía cinética en función de nuestra coordenada generalizada:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}M \underbrace{(-\dot{\beta}\xi \sin(\beta))^2 + (-\dot{\beta}\xi \cos(\beta))^2}_{\dot{\beta}^2\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{12}MR^2 + M\xi^2\right)\dot{\beta}^2$$

$$T = M\dot{\beta}^2\left(2R\cos\beta - \frac{3}{2}R\right)^2 + \frac{3}{8}MR^2\dot{\beta}^2 = MR^2\dot{\beta}^2\left(4\cos^2(\beta) - 6\cos(\beta) + \frac{21}{8}\right)$$

III. El Potencial lo determinará simplemente la componente vertical del centro de masas de la barra:

$$U = Mgh = Mgr_y = Mg\xi \sin(\beta) = MgR\left(2\sin(\beta)\cos(\beta) - \frac{3}{2}\right)$$

IV. Con todo, podemos atacar al lagrangiano y con él a las ecuaciones de Lagrange:

$$\mathcal{L} = T - U = MR^2\dot{\beta}^2\left(4\cos^2(\beta) - 6\cos(\beta) + \frac{21}{8}\right) - MgR\left(2\sin(\beta)\cos(\beta) - \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\beta}} &= \frac{d}{dt}MR^2\dot{\beta}\left(4\cos^2(\beta) - 6\cos(\beta) + \frac{21}{8}\right) = \\ &= 2MR^2\ddot{\beta}\left(4\cos^2(\beta) - 6\cos(\beta) + \frac{21}{8}\right) + 2MR^2\dot{\beta}\left(6\sin(\beta) - 8\sin(\beta)\cos(\beta)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta} = -4MgR\cos^2(\beta) - 8\dot{\beta}^2MR^2\sin(\beta)\cos(\beta) + 6\dot{\beta}^2MR^2\sin(\beta) + 2MgR$$

V. En esta ocasión, las ecuaciones de Lagrange son complicadas y difíciles de interpretar. Sin embargo, podemos aplicar simplemente el principio de conservación de la energía para obtener la velocidad del punto A en el momento en que pasa por la horizontal:

En el instante inicial la energía total corresponderá exclusivamente a la potencial (partimos del reposo), mientras que en el momento en que la barra coincide con la horizontal, toda la energía será cinética debido a que hemos elegido como origen de potenciales dicha horizontal:

$$U|_{\beta=\frac{\pi}{6}} = MgR\left(2\sin(\beta)\cos(\beta) - \frac{3}{2}\right) = MgR\frac{\sqrt{3}-3}{2} = T|_{\beta=0}$$

$$T|_{\beta=0} = -MR^2\dot{\beta}^2\left(4\cos^2(\beta) - 6\cos(\beta) + \frac{21}{8}\right) = -MR^2\dot{\beta}^2(4 - 6 + 21/8) = -\frac{5}{8}MR^2\dot{\beta}^2$$

$$\dot{\beta}|_{\beta=0} = \sqrt{-\frac{MgR\frac{\sqrt{3}-3}{2}}{\frac{5}{8}MR^2}} = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{12-4\sqrt{3}}{5}} \approx 1.007\sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\vec{v}_A|_{\beta=0} = -2R\dot{\beta}|_{\beta=0} = \boxed{-2.014\sqrt{Rg}\vec{j}}$$

VI. En la segunda parte del problema se nos pide que encontremos el centro instantáneo de rotación.

El punto lo encontraremos donde nos salga una velocidad idénticamente 0:

$$\vec{v} = \omega \times r + \dot{r}_{CM} = \begin{pmatrix} y\dot{\beta} \\ -x\dot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\beta}\xi \sin(\beta) \\ -\dot{\beta}\xi \cos(\beta) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{\dot{\beta}\xi \sin(\beta)}{\dot{\beta}} \\ x = \frac{-\dot{\beta}\xi \cos(\beta)}{\dot{\beta}} \end{cases}$$

$$P_{CIR} = \begin{pmatrix} \xi \cos(\beta) \\ -\xi \sin(\beta) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (2R\cos\beta - \frac{3}{2}R)\cos(\beta) \\ -(2R\cos\beta - \frac{3}{2}R)\sin(\beta) \end{pmatrix}}$$

2 Fluidos

2.1 Propiedades de Fluidos

2.2 Movimiento de Fluidos

3 Oscilaciones y ondas

3.1 Oscilaciones Pequeñas

3.2 Ondas