

Schwingungen

Michael Kopp

Version α_4

Inhaltsverzeichnis

1	Begriffe & Definitionen	1
2	Harmonische Schwingung	1
2.1	allgemeiner Lösungsansatz	1
2.2	Das Fadenpendel	2
2.3	Das Federpendel	3
2.4	Das WasserpPENDel	3
2.5	Der Schwingkreis	3
3	Gedämpfte Schwingungen	4
3.1	Konstante Reibung	4
3.2	Reibung abhängig von der Geschwindigkeit	4
4	Erzwungene Schwingung	5

1 Begriffe & Definitionen

Schwingung eine sich zeitlich periodisch wiederholende Änderung einer oder mehrerer physikalischer Größen um einen Mittelwert

Elongation Auslenkung - Entfernung von einer Ruhelage zu einem Zeitpunkt $s(t)$

Amplitude Betrag der maximalen Auslenkung \hat{s}

Periode(ndauer) die Dauer einer Vollständigen Schwingung T

Frequenz Anzahl von Schwingungen pro Zeit $f = \frac{1}{T}$

Winkelgeschwindigkeit Drehung im Bogenmaß je Zeit $\omega = \dot{\varphi} = 2 \cdot \pi \cdot f$

Rückstellkraft Kraft die das Pendel in Richtung der Ruhelage beschleunigt F_R

Harmonische Schwingung eine Schwingung, deren t - $s(t)$ -Diagramm sinusförmig ist, wobei $F_R \sim s(t)$ gilt

2 Harmonische Schwingung

2.1 allgemeiner Lösungsansatz

Im Allgemeinen hat sich bei uns der Lösungsansatz etabliert, eine Differentialgleichung zweiten Grades aufzustellen. Dabei wird die Rückstellkraft F_R auf zwei verschiedene Arten ausgerechnet. Einmal über den Zusammenhang $F_R = m \cdot a(t)$ und das andere mal über den Zusammenhang $F_R = -D \cdot s(t)$. Zur Differentialgleichung wird die Gleichung dann, weil $\dot{s}(t) = v(t)$ und $\dot{v}(t) = a(t)$ und somit $\ddot{s}(t) = a(t)$. Unser Lösungsansatz ist also im Allgemeinen

$$m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t) \tag{1}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann für uns die *Sinusfunktion*, da sie diejenige Funktion ist, die ihrer zweiten Ableitung proportional ist¹. Mit ihr ergibt sich

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (2)$$

$$\dot{s}(t) = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3)$$

$$\ddot{s}(t) = -\hat{s} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (4)$$

Mit diesen Gleichungen lässt sich eine harmonische Schwingung beschreiben². Als nachgewiesen, dass es sich bei der Schwingung um eine harmonische Schwingung handelt, gilt es, wenn man zeigen kann, dass

$$F_R(t) = -D \cdot s(t) \quad (5)$$

$$D = m \cdot \omega^2 \quad (6)$$

für die *komplette* Schwingung gilt.

Setzt man nun Formel 2 und Formel 4 in Formel 1 ein, so ergibt sich³ für die Periodendauer T einer periodischen Schwingung allgemein

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (7)$$

2.2 Das Fadenpendel

Bei einem Fadenpendel wirkt bei einer Masse immer eine Kraft F_A in der Verlängerung des Fadens. Sie ist die *Reactio* der Zentripetalkraft F_Z , die den Schwingkörper auf seiner Kreisbahn hält. Zusätzlich greift jederzeit die Schwerkraft F_g am Schwingkörper an. Mithilfe eines Kräfteparallelogramms kann man die Schwerkraft nun zerlegen und erhält einerseits F_A , andererseits die Rückstellkraft F_R . Diese weist⁴ immer tangential zur Kreisbahn in Richtung der Ruhelage.

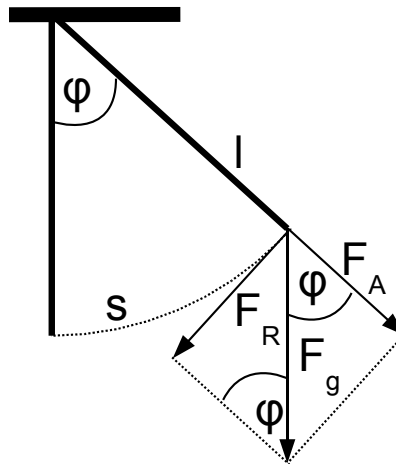


Abbildung 1: Skizze eines Federpendels mit den bedeutenden Größen eingetragen

Vom Nebenwinkelsatz aus kann man den Auslenkungswinkel φ noch an verschiedenen Stellen finden. Hier gelten dann die Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

$$\frac{F_R}{F_g} = \sin(\varphi) \quad (8)$$

Der Winkel φ (im Bogenmaß) wiederum ist definiert mit

$$\varphi = \frac{s}{l} \quad (9)$$

Für kleine Winkel φ gilt nun $\varphi \approx \sin(\varphi)$. Führt man diese Näherung jetzt entweder bei Formel 8 oder bei Formel 9 durch, so erkennt man, dass

¹ $f(x) = \sin(x)$ $f''(x) = -\sin(x)$ $f(x) = -f''(x)$

² φ ist die Phasenverschiebung

³ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

⁴ so sie existiert - im Ruhezustand nämlich nicht

$$\frac{F_R}{F_g} \approx \frac{s}{l} \Rightarrow F_R \approx \frac{F_g}{l} \cdot s \quad (10)$$

Da sowohl $F_g = m \cdot g$ als auch l konstant sind, hängt F_R bei einer Schwingung nur von s ab. Damit ist also bewiesen, dass das Fadenpendel für kleine Auslenkungen $\varphi < 6^\circ$ eine *harmonische Schwingung* ausführt. Seine Richtgröße ist

$$D = \frac{m \cdot g}{l} \quad (11)$$

2.3 Das Federpendel

Bei einem Federpendel hängt an einer Feder mit der Federhärte D ein Schwingkörper der Masse m . Die Ruhelage dieses Systems ist dann erreicht, wenn die Kraft, mit der die Feder am Schwingkörper zieht F_F so groß ist, wie der Schwerkraft F_g . Da bei einer Feder das HOOK'sche Gesetz $D = \frac{F}{s}$ gilt, gilt

$$F_F = D \cdot s = -F_g \Rightarrow s_0 = -\frac{m \cdot g}{D} \quad (12)$$

s_0 ist dabei die Auslenkung des Pendels vom völlig unausgelenkten Zustand der Feder aus.

Das HOOK'sche Gesetz macht hier von Anfang an klar, dass es sich bei der Schwingung um eine harmonische handelt. Die Federhärte entspricht der Richtgröße⁵. Besteht ein System aus einem Schwingkörper zwischen zwei Federn, so gilt für die Richtgröße

$$D = D_1 + D_2 \quad (13)$$

2.4 Das Wasserpindel

Ein Wasserpindel besteht aus einem U-Rohr mit dem konstanten Querschnitt A in das Wasser der Masse m_{ges} mit der Dichte ρ gefüllt wird. Die Wasseroberflächen in den beiden Rohrteilen stehen einander gegenüber und die Wassersäule hat insgesamt die Höhe $2 \cdot h_0$, weil h_0 die (gebogene) Strecke vom unteren Rohrmittelpunkt bis zu einem der Wasserspiegel ist. Die Schwingung mit der Elongation $s(t)$ schwingt um diesen Pegelstand⁶.

Wird nun das Wasser auf Seite A um s^+ ausgelenkt, so sinkt der Pegel auf Seite B um $-s^+$. Die Wassersäule ist auf Seite A $2 \cdot s^+$ höher. Dieses *Mehr* an Wasser V^+ erfährt nun die Gewichtskraft $F_g = m^+ \cdot g$ nach unten, die gleichzeitig als Rückstellkraft F_R fungiert. Über die Zusammenhänge von Masse, Dichte und Volumen ($m = \rho \cdot V$) und der Umrechnung des Volumens ($V^+ = A \cdot 2 \cdot s^+$) ergibt sich so für die Rückstellkraft

$$F_R = g \cdot \rho \cdot A \cdot 2 \cdot s^+ \quad (14)$$

Dabei sind außer s^+ alles Konstanten. Es ergibt sich für das Wasserpindel also eine Richtgröße von

$$D = 2 \cdot g \cdot \rho \cdot A \quad (15)$$

2.5 Der Schwingkreis

Ein Schwingkreis ist ein Stromkreis, der im einfachsten Falle lediglich einen Kondensator der Kapazität C und eine Spule der Induktivität L enthält. In ihm schwingt Strom der Ladung Q zwischen Kondensator und Spule hin und her. Aufgrund des simplen Aufbaus⁷ gilt im Stromkreis

$$U_{ind} = -L \cdot \dot{I}(t) = -L \cdot \ddot{Q}(t) \quad (16)$$

$$U_C = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \cdot Q(t) \quad (17)$$

$$U_C = U_{ind} \quad (18)$$

Der Kondensator wird anfangs einmalig geladen. Somit steckt im Kondensator Energie E_{el} . Der Kondensator entlädt sich nun langsam über die Spule, dabei fließt logischerweise Strom - und zwar mehr Strom, als zu dem Zeitpunkt da der Kondensator noch ungeladen war - somit steigt $\dot{I}(t)$. Es ergibt sich nach den Gleichungen 16 und 18 eine Induktionsspannung. Diese wirkt dem Stromfluss entgegen und damit kann sich der Kondensator nicht sofort entladen. Der Entladestrom nähert sich nun langsam (asymptotisch) seinem Maximum an.

⁵beide heißen deshalb D

⁶ $h(t) = h_0 + s(t)$

⁷Die Spannung des Kondensators U_C liegt direkt an der Spule an, ebenso wie die Induktionsspannung U_{ind} direkt am Kondensator anliegt

In der Zeit, in der der Kondensator entladen wurde, baute sich in der Spule (und rundherum) ein Magnetfeld auf. Dieses Magnetfeld speichert nun die Energie E_{mag} , die der Kondensator vorher enthalten hatte ($E_{el} = E_{mag}$). Wenn der Kondensator schließlich leer ist, ergibt sich erneut eine Induktionsspannung. Da der Strom vorher einen relativ großen Wert hatte und nun völlig „abgeschaltet“ ist, wird $\dot{I}(t)$ infolgedessen stark negativ und es wird erneut Spannung induziert, die den bereits abgebrochenen Stromfluss weiter unterhält.

Durch diese Induktionsspannung wird der Kondensator nun wieder geladen. Wenn das Magnetfeld komplett abgebaut ist, wird der Kondensator wieder so viel Energie haben, wie direkt nach dem Aufladen⁸. Die Platte, die vorher aber negativ war, ist jetzt positiv und anderstherum. Das E-Feld hat sich also umgekehrt. Wenn der Vorgang dann wieder von Vorne beginnt, wird auch das B-Feld der Spule in die andere Richtung weisen als zuvor.

Es handelt sich hierbei um eine harmonische Schwingung, bei der Stromstärke und Spannung einer Sinusfunktion folgen. Setzt man die Gleichungen 16 und 17 in Gleichung 18 ein, so erhält man eine Differentialgleichung $\ddot{Q}(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot Q(t)$ deren Lösung wieder eine Sinusfunktion ist:

$$Q(t) = \hat{Q} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (19)$$

$$I(t) = -\hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\frac{\hat{Q}}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (20)$$

$$U(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (21)$$

Für den Schwingkreis ergibt sich eine Periodendauer von

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (22)$$

Will man mechanische und elektrische Schwingungen Vergleichen, so gelte folgende Entsprechungen:

$$\begin{aligned} s &\hat{=} Q \\ v &\hat{=} I \\ a &\hat{=} \dot{I} \\ D &\hat{=} \frac{1}{C} \\ m &\hat{=} L \\ \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 &\hat{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2 \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &\hat{=} \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \end{aligned}$$

3 Gedämpfte Schwingungen

Im Gegensatz zur idealen harmonischen Schwingung nimmt die Amplitude \hat{s} im Laufe der Schwingung ab. Energie der Schwingung wird in andere Energieformen umgewandelt. Dies geschieht im Allgemeinen durch Kräfte F_{gl} die aus der Reibung schwingender Systeme resultieren.

3.1 Konstante Reibung

Konstante Reibung tritt bspw. bei mechanischen Schwingungen auf. Hierbei ist die Bremsende Kraft F_{gl} konstant. Es gilt also für die Rückstellkraft F_R

$$F_R = m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t) - F_{gl} \quad (23)$$

Es gilt also hier das lineare Kraftgesetz nicht mehr und somit handelt es sich nicht um eine harmonische Schwingung. Die Amplitude \hat{s} der Schwingung nimmt bei jeder Schwingung *linear* um s^- ab, mit

$$s^- = \frac{2 \cdot F_{gl}}{D} \quad (24)$$

3.2 Reibung abhängig von der Geschwindigkeit

Geschwindigkeitsabhängige Reibung tritt beispielsweise bei der Wirbelstrombremse auf. Hierbei nimmt die Amplitude \hat{s} zwischen den einzelnen Schwingungen exponentiell ab. Für die Rückstellkraft ergibt sich hierbei

$$F_R = m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t) - R \cdot \dot{s}(t) \quad (25)$$

⁸von Verlusten der Dämpfung sei hier abgesehen

R ist hierbei eine Reibungskonstante. Auch hier liegt keine harmonische Schwingung vor. Eine Lösung der Differentialgleichung⁹ ist hierbei die Funktion

$$s(t) = \hat{s} \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (26)$$

wobei ω von der Eigenfrequenz¹⁰ ω_0 abweicht. Hier gilt

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \quad (27)$$

Wobei auch k eine Reibungskonstante ist mit $k = \frac{R}{2 \cdot m}$.

Bei dieser Art der Schwingungen muss man zwischen drei verschiedenen Sorten unterscheiden:

Schwingfall $\omega_0 > k^2$ Das System schwingt und die Amplitude nimmt exponentiell ab

Aperiodischer Grenzfall $\omega_0 = k^2$ Das System schwingt fast eine halbe Periode lange, die Periode geht jedoch in kürzestmöglicher Zeit gegen null.

Kriechfall $\omega_0 < k^2$ Das System schwingt nur kurz in eine Richtung, dann nimmt die Amplitude relativ langsam ab.

Es kann auch sein, dass Der Zusammenhang zwischen Reibung und Geschwindigkeit komplexer ist oder sich im Laufe einer Periode verändert.....

4 Erzwungene Schwingung

Das Gegenteil einer gedämpften Schwingung ist eine erzwungene Schwingung. Dabei wird von Außen auf das schwingende System Einfluss ausgeübt. Dieser Einfluss erfolgt periodisch, jedoch nicht notwendigerweise mit der Eigenfrequenz ω_0 der Schwingung sondern auch mit anderen Frequenzen ω . Zur Rückstellkraft F_R kommt also noch eine weitere Kraft F_1 hinzu mit

$$F_1(t) = \hat{F}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (28)$$

Für eine gedämpfte Schwingung ergibt sich also

$$F_R(t) = m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t) - k \cdot \dot{s}(t) + F_1(t) \quad (29)$$

Je nachdem, wie sich ω und ω_0 zueinander verhalten, unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Fällen:

- $\omega \rightarrow 0$: Das System passt sich der Schwingung des Zwanges an und schwingt ohne Phasenverschiebung.
- $\omega = \omega_0$: Es kommt zur *Resonanz*. Das System schwingt um $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ *hinter* dem Zwang. Hierbei wächst seine Amplitude stark an.
- $\omega \rightarrow \infty$: Die Amplitude sinkt sehr stark und das System schwingt mit einer Phasenverschiebung von $\varphi = \pi = 180^\circ$ *hinter* dem Zwang her.

⁹ $m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t) - R \cdot \dot{s}(t)$

¹⁰also der Frequenz, die das System ohne Reibung ausführen würde