

Das NEWTON-Verfahren

Michael Kopp

Version α_1

Zusammenfassung

Das NEWTON-Verfahren dient dazu, die *Nullstellen* einer Funktion nährungsweise zu berechnen.

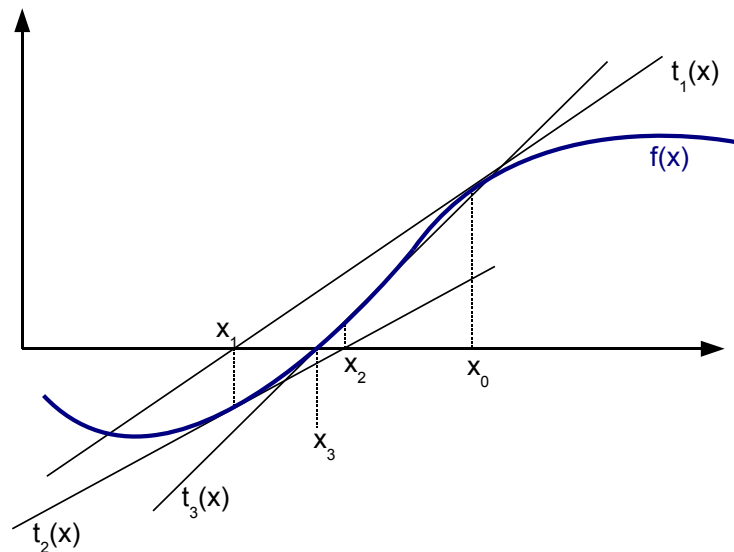


Abbildung 1: Das Vorgehen des NEWTON-Verfahrens am Beispiel einer Funktion $f(x)$

1 Grundgedanke

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist es, eine beliebige Tangente an die Funktion anzulegen und aus deren Nullpunkt die nächste anzulegende Tangente zu berechnen. Für möglichst häufige Wiederholungen dieses Verfahrens nähern sich die Nullstellen der Tangenten dann immer weiter der Nullstelle der Funktion.

2 Vorgaben

Es muss eine Funktion $f(x)$ gegeben sein, die in dem Intervall, das für das NEWTON-Verfahren entscheidend ist, stetig und differenzierbar ist und außerdem eine Nullstelle x_p aufweist. Des Weiteren muss von dieser Funktion die Ableitung $f'(x)$ vorliegen.

Man sucht einen Punkt x_0 , der möglichst nahe an der Nullstelle x_p der Funktion $f(x)$ liegt.

3 Vorgehen

Man bestimmt nun die Zuordnungsvorschrift $t_1(x)$ für die Tangente durch den Punkt $P_1(x_0 | f(x_0))$. Die Nullstelle dieser Tangente heißt x_1 . Nun bestimmt man die Zuordnungsvorschrift der Tangente $t_2(x)$ durch $P_2(x_1 | f(x_1))$. Ihre Nullstelle heißt x_2

Man bestimmt also die Zuordnungsvorschrift $t_n(x)$ für die Tangente durch $P_n(x_{n-1} | f(x_{n-1}))$, deren Nullstelle x_n ist. Je größer n , desto präziser ist die Näherung - vorausgesetzt x_0 wurde gut gewählt. Es gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x_p \quad f(x_p) = 0$$

4 Rechnung

Um die Gleichung einer Tangente $t_{n+1}(x)$ zu bestimmen, benutzt man die Ableitung $f'(x_n)$ der Funktion an der Stelle x_n und die allgemeine Gleichung für lineare Funktionen $f(x) = m \cdot x + c$:

$$t_{n+1}(x) = f'(x_n) \cdot x + c$$

Nun nimmt man eine Punktprobe mit $P_{n+1}(x_n | f(x_n))$ vor:

$$f(x_n) = f'(x_n) \cdot x_n + c$$

Stellt man diese Gleichung nach c um ($c = f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n$), kann man das c aus oberiger Gleichung mit dieser Umstellung ersetzen:

$$t_{n+1}(x) = f'(x_n) \cdot x + f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n$$

Die nächste Nullstelle x_{n+1} erhält man nun, indem man $t_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ setzt. Diese Gleichung lässt sich nun umformen nach x_{n+1} :

$$x_{n+1} = \frac{f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5 Praxis mit dem Taschenrechner

Wenn der Taschenrechner über einen **Ans**-Speicher verfügt, so ist das Rechnen damit einfach. Zuerst gibt man x_0 in den **Ans**-Speicher ein - meistens funktioniert das, indem man die [=]-Taste betätigt. Dann gibt man

$$Ans - \frac{f(Ans)}{f'(Ans)}$$

ein. Jedesmal, wenn man die [=]-Taste betätigt, erhält man einen neuen x_n -Wert, der dann direkt in den **Ans**-Speicher gegeben wird. Damit rechnet der Taschenrechner dann wieder weiter.