Lösungsvorschlag zur Übungsklassenarbeit 10/3

Michael Kopp

$\alpha_{1.1}$-Release

Aufgabe 1

Bei dieser Aufgabe muss man den gegebenen Körper in Teilkörper Zerlegen.

- Das Spitze Ende des Hammers kann man als `Pyramide` mit der Spitze S, Seitenkanten der Länge a und der Grundfläche mit Kanten der Länge s sehen.
- Den Mittelteil des Hammers kann man als `Quader` mit den Seitenlängen a, b und a sehen.
- Den „stumpfen" Teil des Hammers kann man als `Prisma` mit dreieckiger Grundfläche sehen, mit der Höhe a und den Längen c, c und a als Kanten der Grundseite.

Länge SM des Hammerkopfes

Die Länge des Hammerkopfes setzt sich aus folgenden Bestandteilen zusammen:

h_{pyr} Höhe der Pyramide

b Länge des Hammermittelstücks

h_a Höhe der Grundfläche des Prismas

Höhe der Pyramide

Um die Höhe h_{pyr} der Pyramide zu berechnen, verwendet man den **Satz des Pythagoras**. Das dazu verwendete Dreieck ist die halbe Diagonale der Grundseite der Pyramide $\frac{1}{2} \cdot d_g$, die Höhe h_{pyr} und die Seitenkante s der Pyramide.

$$d_g = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{26,01 + 26,01} \approx 7,212cm$$

$$s^2 = (\frac{1}{2} \cdot d_g)^2 + h_{pyr}^2$$

$$h_{pyr} = \sqrt{s^2 - (\frac{1}{2} \cdot d_g)^2} \approx 6,232cm$$

Höhe der Prismengrundseite

Um die Höhe h_a der Prismengrundfläche zu berechnen, verwendet man den **Satz des Pythagoras**. Das dazu verwendete Dreieck hat die Seitenlängen c, $\frac{a}{2}$ und h_a

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2 = c^2$$

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx 2,095cm$$

Der Hammerkopf ist von S bis M also insgesamt $h_{pyr} + b + h_a \approx 6,232cm + 8,3cm + 2,095cm = 16,627cm$ lang.

Masse des Hammerkopfes

Um die Masse des Hammerkopfes berechnen zu können, muss man zuerst das Volumen der Teilstücke ausrechnen. Wichtig ist dabei aber, dass man aus dem Mittelstück das Volumen der Ausbohrung abziehen muss.

Volumen der Pyramide

Um das Volumen der Pyramide zu berechnen, verwendet man die Formel $V_{pyr} = \frac{1}{3} \cdot G_{pyr} \cdot h_{pyr}$ Die Grundfläche G_{pyr} berechnet sich einfach mit

$$G_{pyr} = a^2 = 26,01cm^2$$

Die Höhe h_{pyr} ist vorher berechnet worden, also lässt sich das Volumen einfach ausrechnen:

$$V_{pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{pyr} \approx 54,031cm^3$$

Volumen des Mittelteils

Vom Volumen des Quaders muss das Volumen der Bohrung abgezogen werden. Das Volumen des Quaders berechnet sich mit

$$V_Q = a \cdot a \cdot b = 215,883$$

Die Bohrung kann man als Zylinder sehen, mit Radius $r = \frac{d}{2}$ und Höhe a. Das Volumen der Ausbohrung berechnet sich nach

$$V_B = r^2 \cdot \pi \cdot a \approx 25,035cm^3$$

Für das Volumen V_M des Mittelstückes rechnet man also einfach

$$V_M = V_Q - V_B \approx 190,848cm^3$$

Volumen des Prismas am Hammerende

Das Volumen des Prismas berechnet sich mit $V_{pris} = G_{pris} \cdot a$. Um die Grundfläche G_{pris} zu berechnen, rechnet man

$$G_{pris} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \approx 5,342cm^3$$

Das Volumen V_{pris} berechnet sich dann einfach mit

$$V_{pris} = G_{pris} \cdot a \approx 27,245cm^3$$

Das Volumen des Körpers insgesammt ist also $V_{pyr} + V_M + V_{pris} \approx 272,124cm^3$.

Um Jetzt die Masse ausrechnen zu können, benutzt man die Formel $\rho = \frac{m}{V}$. Aufgelöst nach m ergibt sich bei einer Dichte von $\rho = 7,8\frac{g}{cm^3}$:

$$m = \rho \cdot V \approx 2122,571g \approx 2,123kg$$

Der Hammerkopf ist also ca. 2,123 kg schwer.

Aufgabe 2

Volumen des zylinderförmigen Gefäßes

$$G_{zyl} = r^2 \cdot \pi \approx 78,540cm^2$$

$$V_{zyl} = G_{zyl} \cdot h_{zyl} \approx 785,398cm^3$$

Volumen des kegelförmigen Gefäßes

$$G_{keg} = r^2 \cdot \pi \approx 78,540 cm^2$$

$$V_{keg} = \frac{1}{3} \cdot G_{keg} \cdot h_{keg} \approx 261,799 cm^3$$

a)

Wenn das kegelförmige Gefäß gefüllt ist, ist von 0,9 l Wasser - also $900cm^3$ - nur noch $V_{zyl,neu} = 900 - V_{keg} \approx 638,201cm^3$ vorhanden. Diese werden nun in das zylinderförmige Gefäß gegeben. Um die Höhe $h_{zyl,neu}$ zu berechnen, stellt man die Formel $V_{zyl,neu} = G_{zyl} \cdot h_{zyl,neu}$ nach $h_{zyl,neu}$ um:

$$h_{zyl,neu} = \frac{V_{zyl,neu}}{G_{zyl}} \approx 8,126cm$$

Ist das kegelförmige Gefäß voll, so beträgt der Wasserstand im zylinderförmigen ca. 8,126 cm.

b)

Wenn das zylinderförmige Gefäß gefüllt ist, ist von $900cm^3$ Wasser nur noch $V_{keg,neu} = V_w = 900 - V_{zyl} \approx 114,602cm^3$ vorhanden. Diese werden nun in das kegelförmige Gefäß gegeben. Um die Höhe $h_{keg,neu} = h_w$ zu berechnen, muss man zuerst die Wasserfläche G_w berechnen. Es geht schließlich nicht um das Volumen des Gefäßes, sondern nur um das Volumen des kegelförmigen Gefäßes, in dem Wasser ist.[1]

Dazu verwendet man den **Strahlensatz**. Aufgrund der Schwerkraft wird der Wasserspiegel in dem kegelförmigen Gefäß immer parallel zum Grundkreis sein. Der Radius r_w der Wasserfläche verhält sich deshalb zum Radius der Grundfläche r wie die Höhe des Wassers h_w zur Höhe des kompletten kegelförmigen Gefäßes h_{keg}:

$$\frac{r_w}{r} = \frac{h_w}{h_{keg}}$$

Aufgelöst nach r_w ergibt sich:

$$r_w = \frac{h_w \cdot r}{h_{keg}}$$

Nun setzt man das in die Formel $V_w = \frac{1}{3} \cdot G_w \cdot h_w$, wobei $G_w = r_w^2 \cdot \pi$ ist:

$$V_w = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h_w \cdot r}{h_{keg}}\right)^2 \cdot \pi \cdot h_w$$

Das kann man nun „einfach“ auflösen nach h_w:

$$h_w = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_w \cdot h_{keg}^2}{\pi \cdot r^2}} \approx 7,593cm$$

Ist das zylinderförmige Gefäß voll, so beträgt der Wasserstand im kegelförmigen Gefäß ca. 7,593 cm.

Aufgabe 3

Der kleine, innere Kreis hat den Radius r_k und den Flächeninhalt A_k, der Große, äußere Kreis hat den Radius r_g und den Flächeninhalt A_g.

Es soll nun gelten, dass alle Teilstücke der Zeichnun gleich groß sind. Ein Teilstück des äußeren Ringes lässt sich berechnen, indem man die Fläche A_g ausrechnet, davon A_k abzieht und diesen Wert durch 4 teilt:

$$A_t = \frac{A_g - A_k}{4}$$

[1] Bei der vorangegangenen Aufgabe war das nicht nötig, weil in einem Zylinder die Fläche des Wassers immer gleich der Fläche des Gefäßes ist, weil hier ja die Gefäßwände nicht aufeinander zu laufen. Der waagerechte Querschnitt des Zylinders ist an jeder Stelle gleich groß.

Eines dieser Teilstücke soll nun so groß sein, wie der komplette innere Kreis A_k. Es gilt also:

$$A_t = A_k \Rightarrow \frac{A_g - A_k}{4} = A_k$$

Setzt man für die einzelnen Kreisflächen $A = r^2 \cdot \pi$ ein und multipliziert die Gleichung mit 4 durch, so ergibt sich:

$$4 \cdot r_k^2 \cdot \pi = r_g^2 \cdot \pi - r_k^2 \cdot \pi$$

Addiert man nun zu jeder der beiden Seiten der Gleichung $r_k^2 \cdot \pi$, so ergibt sich:

$$5 \cdot r_k^2 \cdot \pi = r_g^2 \cdot \pi$$

Teilt man nun durch π und 5 und zieht anschließend die Wurzel, so ergibt sich:

$$r_k = \sqrt{\frac{r_g^2}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot r_g$$

Da für r_g kein richtiger Wert vorliegt, ist die Lösung der Aufgabe:
r muss so gewählt werden, dass $r = \frac{r_g}{\sqrt{5}}$ gilt.

Aufgabe 4

Umfang

Der Umfang der zu berechnenden Fläche setzt sich aus folgenden Einzelteilen zusammen:

- zwei Kreisbögen, die jeweils $\frac{1}{3}$ Kreis mit Radius a ausmachen (am rechten Ende der Fläche)
- einem Kreisbogen, der $\frac{1}{4}$ Kreis mit dem Radius b ausmacht (am linken Ende der Fläche).
- zweimal der Strecke a - an der oberen und an der unteren Seite

linker Kreisbogen

Um auf den Radius des linken Kreisbogens zu kommen, benötigt man den **Satz des Pythagoras**. Die gestrichelte Länge sei b. Da man weiß, dass in der Mitte der Figur ein Quadrat ist, kann man ein Dreieck aussuchen, das die Seiten b, b und a hat (das linke, gestrichelte Dreieck). In ihm gilt nun:

$$b^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Da b der Radius des linken Kreisbogens ist, hat dieser nun also die Länge:

$$U_l = 2 \cdot b \cdot \pi \cdot \frac{90}{360} = \frac{2 \cdot b \cdot \pi}{4}$$

Nun kann man b ersetzen und vereinfachen:

$$U_l = \frac{2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \pi}{4} = \frac{a \cdot \pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

rechte Kreisbögen

Da die rechte Spitze genau über der Mitte der Strecke a liegt, kann man folgern, dass rechts ein gleichseitiges Dreieck zwischen die Spitze und die Ecken des Quadrates in der Mitte der Figur gezeichnet werden kann. Man macht sich dann die Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks zunutze, dass alle Seiten gleich lang sind. So ist der Radius der beiden Kreisbögen a. Eine weitere Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks ist, dass es drei Winkel mit $\beta = 60°$ hat. Für die beiden Kreisbögen gilt also *jeweils*:

$$U_r = 2 \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{60}{360} = \frac{a \cdot \pi}{3}$$

Es ergibt sich also insgesammt als Umfang:

$$U = U_l + 2 \cdot a + 2 \cdot U_r = \frac{a \cdot \pi}{2 \cdot \sqrt{2}} + 2 \cdot a + 2 \cdot \frac{a \cdot \pi}{3} = a \cdot \left(2 + \pi \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{2}{3}\right)\right) \approx 5,205 \cdot a$$

Flächeninhalt

Die Fläche der Figur kann man intelligent berechnen, wenn man von dem mittleren Quadrat das linke Kreissegment abzieht und rechts zu der Gleichseitigen Dreieck die beiden Kreissegmente dazuzählt.

linkes Kreissegment

Das linke Kreissegment ist $\frac{1}{4}$ Kreis[2] mit Radius b, von dem man ein rechtwinkliges Dreieck mit Grundseite b und Höhe b abziehen muss:

$$S_l = \frac{b^2 \cdot \pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot b = b^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Nun kann man b wieder ersetzen und vereinfachen:

$$S_l = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{8}\right)$$

rechte Kreissegmente

Das rechte Kreissegment ist ein Kreis mit dem Radius a, von dem man ein Gleichseitiges Dreieck mit den Seiten a abziehen muss.

Die Höhe dieses gleichseitigen Dreiecks berechnet sich mit dem **Satz des Pythagoras**:

$$h_D = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Seine Fläche ist also:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_D = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Für das Kreissegment ergibt sich also:

$$S_r = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{60}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = a^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{12}\right)$$

Insgesammt ergibt sich für die Fläche also:

$$A = a^2 - S_l + A_D + 2 \cdot S_r = a^2 - a^2 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{8}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + 2 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{12}\right)$$

$$= a^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\pi - 2}{8}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2 \cdot \pi - 3 \cdot \sqrt{3}}{6}\right)\right) \approx 1,471 \cdot a^2$$

[2] da $\alpha = 90°$