

Kleine Mathematik-Fibel ab Klasse 7

Von Klaus Rottbrand, Email: krottbrand@yahoo.de

Für Torben und Jana

October 28, 2007

Contents

1	Binomische Formeln und Grundlagen	2
1.1	Quadratische Ergänzung	2
1.2	Höhere binomische Formeln	3
1.2.1	Fakultät und Binomialkoeffizienten	4
1.3	Übungen	6
2	Lineare Gleichungssysteme	7
2.1	Gleichsetzungsverfahren	8
2.1.1	Übungen	9
2.2	Einsetzungsverfahren	9
2.2.1	Übungen	10
3	Quadratische Gleichungen	10
3.1	Der Fall $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, komplexe Zahlen	11
3.2	Übungen	14
3.3	Geometrisches: Die Parabel	17

1 Binomische Formeln und Grundlagen

Die Ausmultiplikation von Klammertermen erfolgt so:

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

Wir setzen $A = C = a$ und $B = D = b$. Dies ist die erste binomische Formel. Wir setzen $A = C = a$ und $B = D = -b$. Dies ist die zweite binomische Formel. Und wir setzen $A = C = a$ und $B = -D = b$. Dies ist die dritte binomische Formel.

Die erste, zweite und dritte binomische Formel lauten

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3)$$

Eine Anwendung ist die Konstruktion pythagoräischer Zahlentripel:

$$X^2 + Y^2 = R^2 \quad (4)$$

mit ganzzahligen X, Y und Z . Seien nun g, h ganzzahlig vorgegeben und $X = g^2 - h^2$, $Y = 2gh$, $R = g^2 + h^2$. Dann gilt

$$(g^2 - h^2)^2 + (2gh)^2 = (g^2 + h^2)^2.$$

Beispiel: Für $g = 5, h = 2$ erhält man

$$21^2 + 20^2 = 29^2.$$

Für $g = 2, h = 1$ erhält man

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Dies ist der Lehrsatz des Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck. Die Katheten $X = 3$ und $Y = 4$ bilden den rechten Winkel und $R = 5$ die Hypotenuse, welche den rechten Winkel schließt. Mache eine Zeichnung.

1.1 Quadratische Ergänzung

Gegeben sei ein Term der Form $x^2 + 2Bx$. Ziel ist es, diesen Ausdruck so zu schreiben, daß der lineare Anteil $2Bx$ nicht mehr auftaucht. Es sollen nur quadratische Terme dastehen. Wir schreiben mit der ersten binomischen Formel:

$$x^2 + 2Bx + B^2 - B^2 = (x + B)^2 - B^2.$$

In der Klammer steht also der halbe Vorfaktor zu x , nämlich B . Rechnet man das Quadrat $(x + B)^2$ aus, erkennt man, daß B^2 zuviel dasteht. Man muß also korrigieren, indem man B^2 subtrahiert. Dieses Vorgehen nennt man quadratische Ergänzung. Nun ein Zahlenbeispiel:

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 4)^2 - 4^2 + 7 = (x - 4)^2 - 9.$$

Dies läßt sich noch verallgemeinern: Wir betrachten jetzt

$$Ax^2 + 2B'x = A(x^2 + 2Bx), \quad [B = \frac{B'}{A}].$$

Mit dem oben gesehenen Verfahren folgt somit

$$Ax^2 + 2B'x = A[(x + B)^2 - B^2] = A(x + \frac{B'}{A})^2 - \frac{B'^2}{A}.$$

Wir addieren noch eine Zahl C' und haben die allgemeine Form

$$Ax^2 + 2B'x + C' = A(x + \frac{B'}{A})^2 - \frac{B'^2}{A} + C'.$$

Wir nehmen wieder ein Zahlenbeispiel mit $A = 5$, $B' = 15$ und $C' = 6$:

$$5x^2 + 30x + 6 = 5(x^2 + 6x) + 6 = 5[(x + 3)^2 - 3^2] + 6 = 5(x + 3)^2 - 39.$$

Die quadratische Ergänzung ist der Schlüssel zur Lösung quadratischer Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$. Dies wird in Sektion 3 untersucht.

1.2 Höhere binomische Formeln

Es gelten:

$$(a + b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (5)$$

$$(a - b)^3 = a^3(-b)^0 + 3a^2(-b)^1 + 3a^1(-b)^2 + a^0(-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (6)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (7)$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad (8)$$

$$(9)$$

Die Koeffizienten berechnen sich nach dem unten dargestellten Schema, dem sogenannten *Pascalschen Dreieck*. Ein Koeffizient ist die Summe der direkt links und rechts darüberstehenden Koeffizienten (etwa 20 entsteht aus 10 und 10):

$(a+b)^0$							1							
$(a+b)^1$						1		1						
$(a+b)^2$				1		2		1						
$(a+b)^3$			1		3		3		1					
$(a+b)^4$			1		4		6		4		1			
$(a+b)^5$		1		5		10		10		5		1		
$(a+b)^6$	1		6		15		20		15		6		1	

Es sei bemerkt, daß die Koeffizienten sogenannte Binomialkoeffizienten sind.

1.2.1 Fakultät und Binomialkoeffizienten

Das Produkt der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wird zu Fünf Fakultät bezeichnet. Man schreibt dafür kurz $5!$. Für eine beliebige natürliche Zahl schreiben wir

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad [\text{lies: } n \text{ Fakultät}]. \quad (10)$$

Man definiert zusätzlich, daß

$$0! := 1 \quad (11)$$

$$1! = 1. \quad (12)$$

Offensichtlich ist $n! = n \cdot (n-1)!$. Also $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 30 \cdot 4 \cdot 3! = 120 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Die Zahl $n!$ gibt alle Reihenfolgen an wie n Elemente angeordnet werden können. Für $n = 3$ haben wir etwa $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, also $3! = 6$ Anordnungen. Man sagt auch Permutationen.

Mit den Fakultäten lassen sich Fakultäten höherer Stufe aufbauen. Dies führt auf sogenannte *Binomialkoeffizienten*: Dabei beschränken wir uns hier auf nichtnegative ganzzahlige Einträge n und k .

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad [\text{lies } k \text{ aus } n] \quad (13)$$

Man liest auch "n über k". Dabei ist

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (14)$$

Binomialkoeffizienten spielen eine bedeutende Rolle in der Kombinatorik.

Beispiel 1: 4 Mannschaften spielen gegeneinander. Wieviele Spielpaarungen gibt es? Das Ergebnis ist 2 aus 4 gleich 4 über 2, also $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$.

Beispiel 2: Beim Lotto werden 6 Kugeln aus 49 gezogen. Dies geht auf $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{43!6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$ Arten.

Eine k -elementige Menge kann man auf $\binom{n}{k}$ Arten aus einer n -elementigen Menge entnehmen. Ist $k > n$ geht das offensichtlich nicht. In diesem Fall ist der Binomialkoeffizient Null, also

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{wenn } k > n. \quad (15)$$

Es sei an dieser Stelle nur bemerkt, daß Fakultäten und Binomialkoeffizienten weiter verallgemeinert (genauer ist: verstetigt) werden können mit nicht ganzzahligen Einträgen. Dies führt auf sogenannte Gammafunktionen. Darauf gehen wir hier nicht ein.

Es gilt folgende Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad [\text{für } k \in \mathbb{N}]. \quad (16)$$

Denn $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!}$.

Beispiel 3: Mit Beispiel 1 folgt $\binom{5}{3} = \frac{5}{3} \binom{4}{2} = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$.

Im Pascalschen Dreieck stehen Binomialkoeffizienten.

$(a+b)^0$						$\frac{0}{0} = 1$						
$(a+b)^1$						$\frac{1}{0} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$					
$(a+b)^2$					$\frac{2}{0} = 1$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{2} = 1$					
$(a+b)^3$				$\frac{3}{0} = 1$	$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{3}{2} = 3$	$\frac{3}{3} = 1$					
$(a+b)^4$			$\frac{4}{0} = 1$	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{4}{2} = 6$	$\frac{4}{3} = 4$	$\frac{4}{4} = 1$					
$(a+b)^5$		$\frac{5}{0} = 1$	$\frac{5}{1} = 5$	$\frac{5}{2} = 10$	$\frac{5}{3} = 10$	$\frac{5}{4} = 5$	$\frac{5}{5} = 1$					
$(a+b)^6$	$\frac{6}{0} = 1$	$\frac{6}{1} = 6$	$\frac{6}{2} = 15$	$\frac{6}{3} = 20$	$\frac{6}{4} = 15$	$\frac{6}{5} = 6$	$\frac{6}{6} = 1$					

An dieser Tabelle erkennen wir, daß

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Allgemein gilt der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad [\text{Summe von } k = 0 \text{ bis } n].$$

Speziell für $a = 1 = b$ ist

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \quad (17)$$

Die Formel ergibt für $n = 4$, daß $2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

Am Pascalschen Dreieck erkennt man Summenbeziehungen oder besser Rekursionen der Form

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Diese Formel enthält eine Verallgemeinerung mit negativen Einträgen, nämlich $\binom{n}{-1} = 0$: Setze dazu $k = 0$ ein. Es ist sogar $\binom{n}{-|k|} = 0$ für ganzzahlige $k \neq 0$. Die Rekursionsbeziehung folgt durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!(n+1-k)}{(n-k)!k!(n+1-k)} + \frac{n!k}{(n+1-k)!(k-1)!k} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}. \end{aligned}$$

1.3 Übungen

1. Berechne mittels binomischer Formeln:

$$x_1 = (a^2 - 9) * (a - 3) * (3 + a)$$

$$x_2 = 17 * 15$$

$$x_3 = 101^2$$

$$x_4 = 97^2 * 103^2$$

$$x_5 = (2a - 1)^2 - (a - 1)^2$$

2. Finde quadratische Ergänzungen und schreibe mit quadratischen Termen:

$$y_1 = x^2 + 3x$$

$$y_2 = 4x^2 + 3x$$

$$y_3 = 4x^2 - 3x + 16$$

$$y_4 = -x^2 + 2x - 7$$

$$y_5 = x^2 + (4a + 2)x$$

3. Berechne

$$z_1 = (2x + 1)^3$$

$$z_2 = (x^2 - 1)^4$$

$$z_3 = (x - 1)(x^2 - 1)^3$$

$$z_4 = (1 + 2x^3 + x^6)(1 - x^3)^3$$

$$z_5 = (1 - x)^3(1 + x + x^2)^3$$

$$z_6 = (x + 1)^7$$

4. Berechne

$$u_1 = \binom{7}{3}$$

$$u_2 = \binom{7}{3} + \binom{7}{4}$$

2 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten hier zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Diese bilden ein lineares System in den Unbekannten x und y , d.h. x und y treten nur in der ersten Potenz auf:

$$ax + by = g \tag{18}$$

$$cx + dy = h \tag{19}$$

Die rechten Seiten g und h seien bekannt und ebenfalls die vier Koeffizienten a bis d . Geometrisch bedeuten (18) und (19) die analytische Darstellung von Geraden in der zweidimensionalen Ebene. Sie können parallel in einem gewissen Abstand zueinander liegen, sich schneiden oder auch identisch sein. Im ersten Fall gibt es keine gemeinsamen

Punkte, also keine Lösung, im zweiten Fall gibt es nur einen gemeinsamen Schnittpunkt, also genau eine eindeutige Lösung, und im dritten Fall gibt es unendlich viele gemeinsame Punkte, also unendlich viele Lösungspaare (x, y) . Das Vorliegen solcher Fälle hängt von den Koeffizienten ab. Bei vorausgesetzter Lösbarkeit gibt es verschiedene Verfahren: Etwa das *Gleichsetzungsverfahren* und das *Einsetzungsverfahren*.

2.1 Gleichsetzungsverfahren

Wir machen die Annahme $a \neq 0$, $c \neq 0$. Dann können wir beide Gleichungen nach x auflösen und dann gleichsetzen. In diesem Fall also Subtraktion der y Terme und anschließend Division durch a bzw. c ergibt:

$$x = \frac{g - by}{a} \quad (20)$$

$$x = \frac{h - dy}{c} \quad (21)$$

Wir setzen gleich und haben zu lösen:

$$\frac{g - by}{a} = \frac{h - dy}{c}$$

Wir bringen die y Terme auf die linke Seite. Es entsteht

$$\frac{dy}{c} - \frac{by}{a} = \frac{h}{c} - \frac{g}{a}$$

Wir bringen auf den Hauptnenner und erhalten

$$\frac{ady - bcy}{ac} = \frac{ah - cg}{ac}$$

Um nach y auflösen zu können ist es erforderlich durch $ad - bc$ dividieren zu dürfen. Wir machen also die Annahme $ad - bc \neq 0$ und es folgt die Lösung

$$y = \frac{ah - cg}{ad - bc}. \quad (22)$$

Dies setzen wir in (20) oder (21) ein um das passende x zu bestimmen. Wir nehmen die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{g - by}{a} = \frac{g - b \frac{ah - cg}{ad - bc}}{a} \\ &= \frac{gad - gbc - bah + bcg}{a(ad - bc)} = \frac{dg - bh}{ad - bc}. \end{aligned}$$

2.1.1 Übungen

1. Führe das Gleichsetzungsverfahren unter der Annahme $b \neq 0$, $d \neq 0$ durch, indem nach y aufgelöst und anschließend gleichgesetzt wird. Es bleibt dann eine Gleichung in x zu lösen.

2. Löse durch Gleichsetzungsverfahren

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

(Ergebnis: $x = 6$, $y = 4$.)

3. Löse durch Gleichsetzungsverfahren

$$3x + 2y = 9$$

$$5x - 4y = 4$$

(Ergebnis: $x = 2$, $y = 1.5$.)

2.2 Einsetzungsverfahren

Wir gehen wieder von dem System aus

$$ax + by = g$$

$$cx + dy = h$$

Wir schreiben die zweite Gleichung als

$$\frac{c}{a}ax + dy = h$$

und setzen aus der ersten Gleichung

$$ax = g - by$$

ein zu

$$\frac{c}{a}(g - by) + dy = h$$

Auf den Hauptnenner ($a \neq 0$) gebracht folgt

$$\frac{cg - bcy + ady}{a} = \frac{ah}{a}$$

Oder zusammengefaßt

$$\frac{(ad - bc)y}{a} = \frac{ah - cg}{a}$$

und es folgt die schon oben angegebene Lösung

$$y = \frac{ah - cg}{ad - bc}.$$

2.2.1 Übungen

4. Löse die Aufgaben 1 bis 3 oben mit dem Einsetzungsverfahren.

5. Für welche Werte k ist das System lösbar bzw. unlösbar?

$$x + 2y = 17$$

$$3x + 6y = 100 - k$$

6. Für welche Werte m, p hat das System die Lösung $x = 1, y = 2$?

$$(10 - m^2)x + 2y = 5$$

$$-x + my = m^2 - p$$

(Ergebnis: $m = 3, p = 4$ und $m = -3, p = 16$.)

3 Quadratische Gleichungen

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit reellen Lösungen lautet

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \geq 0.} \tag{23}$$

Wir klammern a aus und schreiben

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Nun Division durch a und quadratische Ergänzung ergibt

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Bemerkung: Quadratische Ergänzung ist das Quadrat des halben Faktors zu x .
Wir erhalten die eine Gleichung mit einer binomischen Form

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Wir subtrahieren $\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ und können schreiben

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Wir bringen die rechte Seite auf einen Nenner, dann ist

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Wir können jetzt die Wurzel ziehen. Die Lösungen heißen $x = x_1$ und $x = x_2$:

$$\mathbf{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (24)}$$

Im Fall $b^2 - 4ac > 0$ haben wir zwei verschiedene reelle Lösungen. Für $b^2 - 4ac = 0$ verschwinden die Wurzeln auf den rechten Seiten: Es wird $x_1 = x_2$; die Lösungen fallen zu einer reellen zusammen. Man bezeichnet die reellen Zahlen mit \mathbb{R} .

3.1 Der Fall $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, komplexe Zahlen

Die Lösungsformel bleibt formal gültig. Es tritt das Problem auf, daß man die Wurzel aus negativen Zahlen ziehen muß. Dies führt auf sogenannte *imaginäre Zahlen* i . Dabei wird gesetzt:

$$i = \sqrt{-1}. \quad (25)$$

Es ist $(5i)^2 = -25$, und ebenso $(-5i)^2 = -25$. Geometrisch kann eine Multiplikation mit i als Drehung um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn gedeutet werden. Denken wir an ein zweidimensionales Koordinatenkreuz. Die Abzisse für x enthalte den reellen Zahlenstrahl, und die Ordinate für y enthalte die imaginären Zahlen gemessen in Vielfachen der imaginären Einheit i . Das Ganze wird als komplexe Ebene bezeichnet, man sagt auch Gaußsche Zahlenebene. Sie wird durch die reelle und imaginäre Achse aufgespannt. Eine Zahl z mit der gemischten Darstellung $z = x + iy$ heißt komplexe Zahl. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet. Die Zahl $x + iy$ gehört zum Punkt (x, y) im Koordinatensystem. Multipliziert man z mit i , erhalten wir $iz = ix + i^2y = -y + ix$. Der zugehörige Punkt der Koordinatenebene lautet also $(-y, x)$. Dieser geht durch positive Drehung um 90 Grad aus (x, y) hervor. Dabei wird aus $(1, 0)$

der Punkt $(0,1)$, daraus $(-1,0)$, daraus $(0,-1)$ und aus diesem wieder $(1,0)$. Also 1 wird zu i wird zu -1 wird zu $-i$ wird zu 1. Damit ist Multiplikation mit i^2 eine Spiegelung am Ursprung, und i^4 eine Drehung um 360 Grad. Von der Geometrie her ließe sich aussagen, daß $i^{1/2}$ eine Drehung um 45 Grad sein müßte. Allgemein: i^d ist eine Drehung um d mal 90 Grad, wobei d nicht ganzzahlig sein muß. Der Betrag einer komplexen Zahl ist der Abstand vom Ursprung und kann als Länge gedeutet werden. Der Punkt (x, y) hat den Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt. Nun ist $(x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2$. Man bezeichnet $\bar{z} = x - iy$ als konjugiert komplex zu z . Der Betrag von z ist also $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Der Betrag von $-5i$ ist also $\sqrt{5i \cdot (-5i)} = \sqrt{-25i^2} = 5$ (Positive Wurzel: Beträge sind immer nichtnegativ). Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist

$$(A + iB)(C + iD) = AC - BD + i(AD + BC). \quad (26)$$

Es gilt $iB = Bi$. Eine Anwendung von quadratischen Gleichungen ist das Wurzelziehen aus komplexen Zahlen. Wir fragen also nach der Wurzel $\sqrt{x + iy}$. Das Ergebnis wird wieder eine komplexe Zahl sein, hat also die Darstellung $\alpha + i\beta$. Quadriert man die Ausdrücke, haben wir zu lösen:

$$(\alpha + i\beta)^2 = x + iy.$$

Für gegebene x, y muß nach passenden Werten α, β gesucht werden. Wir quadrieren aus und erhalten

$$\alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta = x + iy.$$

Wir haben eigentlich ein System von zwei Gleichungen: eine für den Realteil und eine für den Imaginärteil, also

$$\alpha^2 - \beta^2 = x, \quad (27)$$

$$2\alpha\beta = y. \quad (28)$$

Im Fall $y = 0$ muß $\beta = 0$ sein und wir erhalten $\alpha = \sqrt{x}$. Wir betrachten den Fall $y \neq 0$, also α und β sind nicht Null. Dann können wir die Gleichung (27) durch Gleichung (28) dividieren und erhalten

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2x}{y}. \quad (29)$$

Wir setzen $\frac{\alpha}{\beta} = u$, subtrahieren $\frac{2x}{y}$ und bekommen

$$u - \frac{1}{u} - \frac{2x}{y} = 0.$$

Nach Multiplikation mit u folgt die quadratische Gleichung

$$u^2 - \frac{2x}{y}u - 1 = 0.$$

Die Lösungsformel (24) liefert mit $a = 1$, $b = -\frac{2x}{y}$, $c = -1$ die Lösungen $u = u_1$ und $u = u_2$. Wir fassen zusammen zu

$$u_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}. \quad (30)$$

Wir wollen nun nach α und β auflösen: Aus

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha}{\beta}, \\ y &= 2\alpha\beta \end{aligned}$$

folgt durch Multiplikation beider Gleichungen miteinander

$$uy = 2\alpha,$$

also

$$\alpha = \sqrt{\frac{uy}{2}}$$

Will man jetzt den Ausdruck in (30) einsetzen, erkennt man, daß dort nur das Pluszeichen, also die positive Wurzel zulässig ist, da sonst keine reelle Zahl beim Ziehen der Wurzel entsteht. Somit also

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}.$$

Damit folgt aus $\beta = \frac{y}{2\alpha}$, daß

$$\beta = \frac{y}{2\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}}.$$

Wir erweitern die rechte Seite mit $\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$. Dabei ist

$$\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} = |y|$$

Man erhält

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}.$$

Wir haben somit die Gleichheit

$$\left[\pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \right]^2 = x + iy. \quad (31)$$

Man dividiert zwei komplexe Zahlen durch Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nenner:

$$\frac{A + iB}{C + iD} = \frac{A + iB}{C + iD} \frac{C - iD}{C - iD} = \frac{AC - BD + i(AD + BC)}{C^2 + D^2}. \quad (32)$$

Beispiel:

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = i.$$

3.2 Übungen

1. Löse die Gleichungen

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad [x_1 = 1, x_2 = 2] \quad (33)$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad [x_1 = 3, x_2 = 0.5] \quad (34)$$

$$9x^2 + 225x + 350 = 0 \quad [x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{70}{3}] \quad (35)$$

$$16x^2 - 41x + 25 = 0 \quad [x_1 = 1.5625, x_2 = 1] \quad (36)$$

$$4x^2 - 30x + 225 = 0 \quad [b^2 - 4ac = -2700 \text{ (komplexe Lösungen)}] \quad (37)$$

$$21x^2 + 13x + 2 = 0 \quad [x_1 = -\frac{2}{7}, x_2 = -\frac{1}{3}] \quad (38)$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad [\text{Goldener Schnitt: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}] \quad (39)$$

$$4x^2 - 4x + 5 = 0 \quad [b^2 - 4ac = -64 \text{ (komplexe Lösungen)}] \quad (40)$$

$$3y^4 - 7y^2 + 4 = 0 \quad [y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}, y_{3,4} = \pm 1] \quad (41)$$

$$u^2 + \frac{7}{u^2} + 10 = 0 \quad [u_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, u_{3,4} = \pm i\sqrt{5}] \quad (42)$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad [p, q \text{ Formel für Normalform}] \quad (43)$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \quad [\text{Satz von Vieta}] \quad (44)$$

2. Ein Quadrat habe die Seitenlänge 2 und im Zentrum sei der Ursprung (0,0). Die Seiten sollen parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Welche Koordinaten hat der Eckpunkt (x,y) im I. Quadranten, und welche komplexe Zahl kann der Ecke zugeordnet werden? Was ist der Betrag dieser komplexen Zahl? Welcher Punkt auf der positiven reellen Achse geht durch welche Drehung hervor?

3. Sei $z = 3 + 4i$. Berechne

$$z + 1 + i =: v_1 \quad (45)$$

$$i \cdot (1 - i) =: v_2 \quad (46)$$

$$\frac{z}{i} =: v_3 \quad (47)$$

$$|z| =: v_4 \quad (48)$$

$$i\bar{z} =: v_5 \quad (49)$$

$$\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| =: v_6 \quad (50)$$

$$\sqrt{z} =: v_7 \quad (51)$$

$$z^3 =: v_8 \quad (52)$$

3. Ein Intervall $[a, b]$ soll in x so zerteilt werden, daß das Produkt der Längen der beiden Teilintervalle $[a, x]$ und $[x, b]$ maximal wird, also die größte Fläche ausbilden. Wie ist x zu wählen? $[(a + b)/2]$

4. Aus einem Seil der Länge $L = 20$ soll ein Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt geformt werden. Wie lang sind die Seiten und wie groß ist die Fläche? [25]

5. Löse die Ungleichung $x^2 + 5x + 6 < 0$.

6. Löse das System (beschreibt Schnitt von Kreis: Mittelpunkt $(0,0)$, Radius $\sqrt{20}$ und Gerade durch $(2,0)$ und $(5,3)$)

$$x^2 + y^2 = 20 \quad [x_1 = 4, y_1 = 2] \quad (53)$$

$$x - y = 2 \quad [x_2 = -2, y_2 = -4] \quad (54)$$

7. Goldener Schnitt: Das große Teilstück einer Strecke verhält sich zur kleineren Teilstrecke, wie die ganze Strecke zur großen Teilstrecke. Wie groß ist das Teilverhältnis?

8. Ein Flugzeug fliege in der Höhe h über der Erde mit der Geschwindigkeit v_0 . Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde es sich bei $x = x_0$ und werfe eine Hilfsladung ab. Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden. Wo und nach welcher Zeit wird die Ladung auf der Erde ($y = 0$) auftreffen? Es sei bemerkt, daß das Fallgesetz hier $y = h - \frac{g}{2}t^2$ (g : Erdbeschleunigung) lautet.

9. Für welche reellen Parameter α gibt es verschiedene reelle Lösungen der Gleichung

$$x + \alpha + \frac{1}{x+1} = 0? \quad [\alpha \in \mathbb{R} \setminus (-1,3)] \quad (55)$$

10. Zeige, daß es bei diesen irrationalen Formen nur scheinbare Lösungen gibt (Probe!)

$$\sqrt{-2x-3} = x+1 \quad [x_1 = -1, x_2 = -4] \quad (56)$$

$$\sqrt{-10x-6} = 2x \quad [x_1 = -1, x_2 = -1, 5] \quad (57)$$

11. Löse das System (Schnitt von zwei Hyperbeln)

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad [x_1 = 3, y_1 = 2] \quad (58)$$

$$(x+1)^2 - 2(y-1)^2 = 14 \quad [x_2 = -17, y_2 = 12] \quad (59)$$

3.3 Geometrisches: Die Parabel

Der Graph der Funktion

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \quad (60)$$

ist eine Parabel. Für $a > 0$ ist sie nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten. Die Symmetrieachse ist parallel zur y -Achse. Vertauscht man x und y , also

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0 \quad (61)$$

ist die Parabel für $a > 0$ nach rechts und für $a < 0$ nach links geöffnet. Die Symmetrieachse ist parallel zur x -Achse. In beiden Fällen gehen die Parabeläste symmetrisch von einem Scheitelpunkt ausgehend ins Unendliche.

Wir betrachten die Parabel (60):

Die Schnitte mit der x -Achse heißen Nullstellen. Man setzt also $y = 0$ und hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen. Es gibt also eine, zwei oder keine Nullstellen, je nachdem, wieviele reelle Lösungen die Gleichung besitzt (Siehe oben!). Der Scheitelpunkt ist für $a > 0$ der tiefste und für $a < 0$ der höchste Punkt der Parabel. Man sagt auch Hochpunkt bzw. Tiefpunkt. Diese wollen wir nun bestimmen:

Fall $a > 0$: Wir schreiben (wie beim Lösen der quadratischen Gleichung mit $y = 0$ dort)

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Der quadratische Term ist immer größer gleich Null. Der kleinste y Wert ergibt sich damit wenn der quadratische x Term verschwindet. Somit haben wir einen Tiefpunkt als Scheitelpunkt S erhalten:

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right), \quad \text{Symmetrieachse : } x = -\frac{b}{2a}. \quad (62)$$

Im Fall $a < 0$ ist S ein Hochpunkt.

Beispiel: $a = 1, b = 3, c = 2$.

$$y = x^2 + 3x + 2 \quad (63)$$

hat die Nullstellen $x_1 = -1, x_2 = -2$ und den Scheitelpunkt $S = (-1.5, -0.25)$ als Tiefpunkt. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Die Symmetrieachse ist $x = -1.5$.

Übung: Zeichne die Parabel und rechne alles nach.