Simplex Method

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแก้ปัญหา LP ด้วยวิธี Primal Simplex ส่วนวิธี Dual Simplex นั้นจะกล่าวถึงในบทถัดไป

ความคิดมูลฐานของวิธีซิมเพล็กซ์คือ การแก้ปัญหาระบบสมการโดยการกระทำซ้ำๆกัน เริ่มจากคำตอบมูลฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้ แล้วเปลี่ยนตัวแปรมูลฐานใหม่ครั้งละ 1 ตัว โดยพิจารณาจากตัวแปรที่ไม่เป็นมูลฐาน เรียกตัวแปรมูลฐานใหม่นี้ว่า ตัวแปรมูลฐานเข้า (Entering Basic Variable) สำหรับตัวแปรมูลฐานเดิมที่ถูกแทนที่ด้วยตัวแปรมูลฐานใหม่จำกำหนดให้เป็นตัวที่ไม่เป็นมูลฐาน เรียกตัวแปรนี้ว่า ตัวแปรมูลฐานออก (Leaving Basic Variable)

การแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์ จะต้องมีการสร้างรูปแบบกำหนดการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน คือ เปลี่ยนข้อจำกัดที่อยู่ในรูปอสมการให้เป็นสมการที่สมมูลกัน ตัวอย่างเช่น

หาค่าสูงสุดของ $Z = 3X_1 + 5X_2$

ข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
X_1 &\le 4 \\
2X_2 &\le 12 \\
3X_1 + 2X_2 &\le 18 \\
X_1, X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

เขียนข้อจำกัดให้อยู่ในรูปสมการข้อจำกัดที่สมมูลกันโดยใช้ตัวแปรขาด (Slack Variable) ดังนี้
ให้ S1 , S2 , S3 ≥ 0 เป็นตัวแปรขาด สมการข้อจำกัดที่สมมูลกับข้อจำกัด คือ

$$
\begin{aligned}
X_1 + S1 &= 4 \\
2X_2 + S2 &= 12 \\
3X_1 + 2X_2 + S3 &= 18
\end{aligned}
$$

ขั้นตอนของวิธีซิมเพล็กซ์

ขั้นตอนเริ่มต้น (Initialization Step)

ให้ (x_1 , x_2) เป็นตัวแปรไม่เป็นมูลฐานเริ่มต้นและมีค่าเป็น 0 (เพื่อรักษาข้อจำกัด $x_1 \ge 0$) ดังนั้นตัวแปรขาด (s_1, s_2, s_3) จะเป็นตัวแปรมูลฐานเริ่มต้น เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบจึงสร้างรูปแบบของตารางวิธีซิมเพล็กซ์ เพื่อบันทึกข้อมูลที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. สัมประสิทธิ์ของตัวแปร
2. ค่าคงที่ทางขวามือของแต่ละสมการ
3. ตัวแปรมูลฐานที่ปรากฏในแต่ละสมการขณะที่ทำการเปลี่ยนแปลงตัวแปร

จากตารางจะเห็นได้ว่าแต่ละสมการข้อจำกัดจะมีตัวแปรมูลฐาน 1 ตัว และมีสัมประสิทธิ์เป็น +1 ตัวแปรมูลฐานแต่ละตัวมีค่าเท่ากับค่าคงที่ทางขวามือของสมการ ดังนั้นตัวแปรมูลฐานที่เป็นไปได้เริ่มต้น (Initial Basic Feasible Solution) จากตารางคือ $(x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3) = (0 , 0 , 4 , 12 , 18)$

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	3	0	3	2	0	0	1	18

ตารางซิมเพล็กซ์ของกำหนดการเชิงเส้น

ขั้นตอนที่ต้องกระทำซ้ำๆ (Interation Step)

เมื่อได้คำตอบเริ่มต้นแล้ว ต่อไปต้องมีการปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้นเพื่อให้ได้คำตอบที่เหมาะสม โดยการเพิ่มค่าตัวแปรขึ้นเรื่อยๆ ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

ขั้นที่ 1 ตัวแปรมูลฐานเข้า (Entering Basic Variable) ในกรณีปัญหาที่ต้องการหาค่าสูงสุดจะพิจารณาเลือกตัวแปรไม่เป็นมูลฐานที่มีสัมประสิทธิ์ในสมการ (0) ติดลบมากที่สุด เพราะเมื่อตัวแปรเพิ่มค่าจาก 0 เป็นค่าบวกจะทำให้เพิ่มค่า Z ได้เร็วที่สุด เช่น $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$ เริ่มต้นให้ $x_1 = x_2 = 0$ จะมีผลทำให้ $Z = 0$ เมื่อเพิ่มของตัวแปร x_1, x_2 จะมีผลทำให้ Z สูงขึ้น เช่น

ถ้าเพิ่มค่า x_1 โดยที่ $x_2 = 0$ จะมีผลทำให้ $Z = 3x_1$

ถ้าเพิ่มค่า x_2 โดยที่ $x_1 = 0$ จะมีผลทำให้ $Z = 5x_2$

การเพิ่มค่าตัวแปรใดจึงต้องดูค่าสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบ เพราะเมื่อย้ายข้างจะเป็นบวก และจากสมการ (2.31) จะได้ว่าต่อ 1 หน่วยที่เพิ่มค่า x_2 จะได้ค่า Z เพิ่มขึ้นเร็วกว่าเพิ่มค่า x_1 1 หน่วย ดังนั้นเพื่อให้ค่า Z ถึงจุดเป้าหมายเร็วที่สุดจึงเลือกตัวแปรเข้าที่มีสัมประสิทธิ์ ติดลบมากที่สุด

จากตาราง 2 – 7 สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_2 ติดลบมากที่สุด คือ -5 จึงเลือก เป็นตัวแปรมูลฐานเข้า คือเปลี่ยนจากตัวแปรที่ไม่เป็นมูลฐานเป็นตัวแปรมูลฐาน สดมภ์ (column) ที่อยู่ภายใต้ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ ในข้อจำกัด เรียกว่า สดมภ์หลัก (Pivot Column) ดังตาราง 2 -8 และถ้าสมการ (0) มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็น 0 หรือเป็นบวก แสดงว่าไม่สามารถหาตัวแปรมูลฐานเข้าเพื่อเพิ่มค่า Z ได้อีก

ขั้นที่ 2 หาตัวแปรมูลฐานออก (Leaving Basic Variable)

1. เลือกสัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลักที่มีค่ามากกว่า 0
2. หารค่าคงที่ทางขวามือด้วยสัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลักที่มีค่ามากกว่า 0 และอยู่ในแถวเดียวกัน
3. เลือกสมการที่ให้ผลหารน้อยที่สุด แถวที่ให้ผลหารน้อยที่สุดเรียกว่า แถวหลัก (Pivot Row) ค่าตัวเลขในแถวนั้นเรียกว่า เลขหลัก (Pivot Number)

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1	**0**	1	0	0	4
s_2	2	0	0	**2**	0	1	0	12
s_3	3	0	3	**2**	0	0	1	18

จากตาราง แสดงตัวแปรมูลฐานเข้า คือตัวแปร x_2

4. เลือกตัวแปรมูลฐานออกจากแถวนี้ คือตัวแปร s_2

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	1	0	1		1	0	0	4
← s_2	2	0	0		0	1	0	12
s_3	3	0	3	2	0	0	1	18

จากตาราง แสดงตัวแปรมูลฐานออก คือ s_2

ขั้นที่ 3 หาคำตอบมูลฐานที่เป็นไปได้ชุดใหม่โดยสร้างตารางใหม่ดังนี้

- ใน 3 สดมภ์แรกยังคงเดิม ยกเว้น s_2 ในสมการ ซึ่งเป็นตัวแปรออกจะถูกแทนที่ด้วย x_2

- สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมูลฐานใหม่ในแถวหลักทำให้เป็น +1 โดยหารแถวหลักด้วยเลขหลัก

สัมประสิทธิ์ของทุกตัวแปรในแถวหลักใหม่ = $\dfrac{\text{สัมประสิทธิ์เดิมในแถวหลัก}}{\text{เลขหลัก}}$

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	0							
s_1	1	0						
x_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
s_3	3	0						

ตาราง แสดงสัมประสิทธิ์ของทุกตัวแปรในแถวหลักใหม่

ต่อไปทำให้สัมประสิทธ์ของ X_2 ในแถวอื่น เป็น 0 ทั้งหมด ซึ่งทำได้โดยใช้สูตร ดังนี้

> แถวใหม่ = แถวเดิม – (สัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลัก x แถวหลักใหม่)

พิจารณาแถว (0) สัมประสิทธิ์ที่ตรงกับสดมภ์หลักหรือสัมประสิทธิ์ที่ตรงกับ X_2 คือ -5

แถว (0) ใหม่ = แถว (0) เดิม – [(-5)xแถวหลักใหม่]

แถว (0) เดิม	-3	-5	0	0	0	0
(-5) x แถวหลักใหม่	0	5	0	-5/2	0	-30
แถว (0) ใหม่	-3	0	0	5/2	0	30

พิจารณาแถว (3) สัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลักคือ 2

เอา 2 คูณเข้ากับแถวหลักใหม่แล้วลบออกจากแถว (3) จะได้

แถว (3) เดิม	3	2	0	0	1	18
2xแถวหลักใหม่	0	2	0	1	0	12
แถว (3) ใหม่	3	0	0	-1	1	6

ดังนั้นเมื่อเปลี่ยนตัวแปรเข้าและตัวแปรออก 1 ครั้ง จะได้ตารางใหม่ ค่าของตัวแปรมูลฐานยังคงเท่ากับค่าคงที่ขวามือ คำตอบมูลฐานที่เป็นไปได้ชุดใหม่คือ $(X_1,X_2,S_1,S_2,S_3) = (0,6,4,0,6)$ ค่า Z = 30

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
X_2	2	0	0	1	0	½	0	6
S_3	3	0	3	0	0	-1	1	6

ตารางแสดงค่าตัวแปรมูลฐานใหม่

จากตารางจะเห็นได้ว่า X_2 เป็นตัวแปรมูลฐานเข้าซึ่งเพิ่มค่าจาก 0 เป็น 6 ขณะที่ S_2 เป็นตัวแปรมูลฐานออกซึ่งลดค่าเป็น 0 การที่เลือกตัวแปรมูลฐานออกคือ S_2 ซึ่งได้จากแถวที่ให้ผลหารของค่าคงที่ขวามือซึ่งหารด้วยค่าสัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลักมีค่าน้อยที่สุดนั้น เพราะว่าค่า X_2 ที่เพิ่มขึ้นนี้จะต้องสอดคล้องกับทุกๆข้อจำกัด ถ้าเลือกตัวแปรมูลฐานออกจากแถวที่ให้ผลหารมากที่สุด จะได้ว่าตัวแปรที่เพิ่มค่าจะไม่สอดคล้องกับทุกข้อจำกัดเดิม ตัวอย่างเช่น ข้อจำกัดที่เกี่ยวข้องกับ X_2 คือ

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

ถ้า $X_2 = 6$ จะได้ว่าเมื่อแทน $X_2 = 6$, $X_1 = 0$ ลงในอสมการทั้งสอง อสมการยังคงเป็นจริง แต่ถ้าเลือก S_3 ในสมการ (3) เป็นตัวแปรออก เมื่อ X_2 เข้าแทนที่ S_3 จะต้องทำให้สัมประสิทธิ์ของ X_2 ในสมการ (3) เป็น +1 ค่าของ X_2 ที่เพิ่มขึ้นคือค่าคงที่ขวามือจะได้เท่ากับ 9 เมื่อแทน $X_2 = 9$ ลงในอสมการ $2X_2 \leq 12$ จะได้ว่าไม่เป็นจริง ดังนั้นจึงต้องเลือกตัวแปรออกในแถวที่มีผลหารน้อยที่สุดเพื่อให้ค่าที่ได้ยังคงสอดคล้องกับข้อจำกัด

ขั้นที่ 4 เมื่อได้คำตอบมูลฐานที่เป็นไปได้ชุดใหม่แล้ว ต่อไปตรวจสอบดูว่าคำตอบที่ได้เหมาะสมหรือไม่ จากสมการ (0) จะเห็นได้ว่า ยังมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่เป็นลบ คือสัมประสิทธิ์ของ X_1 เท่ากับ -3 แสดงว่ายังสามารถเพิ่มค่า Z ได้อีกโดยพิจารณาตัวแปรเข้าและตัวแปรออกใหม่ จะได้ว่า ให้ X_1 เป็นตัวแปรเข้า S3 เป็นตัวแปรออก ดังตาราง เลขหลักคือ 3 ทำให้เลขหลักหรือสัมประสิทธิ์ของ X_1 ในแถว (3) หรือแถวหลักเป็น 1 โดยเอา 3 หารตลอด ได้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในแถวหลักใหม่คือ

$$1 \quad 0 \quad \Big| \quad 0 \quad -1/3 \quad 1/3 \quad \Big| \quad 2$$

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
X_2	2	0	0	1	0	½	0	6
← S_3	3	0	3	0	0	-1	1	6

ตารางแสดงตัวแปรเข้าคือ X_1 ตัวแปรออกคือ S_3

ต่อไปทำให้สัมประสิทธิ์ของ X1 ในแถวอื่นเป็น 0 ทั้งหมดโดยใช้สูตรในสมการ ดังนี้

แถว (0) เดิม	-3	0	0	5/2	0	30
(-3)xแถวหลักใหม่	-3	0	0	1	-1	-6
แถว (0) ใหม่	0	0	0	3/2	1	36

แถว (1) เดิม	1	0	1	0	0	4
1xแถวหลักใหม่	1	0	0	-1/3	1/3	2
แถว (1) ใหม่	0	0	1	1/3	-1/3	2

แถว (2) ใหม่ คือ แถว (2) เดิม เพราะสัมประสิทธิ์ X1 เป็น 0 อยู่แล้ว ดังนั้นจะได้ตารางใหม่ คำตอบมูลฐานที่เป็นไปได้ชุดใหม่คือ คือ $(X_1,X_2,S_1,S_2,S_3) = (2,6,2,0,0)$ ค่า Z = 36 เมื่อดูสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ไม่เป็นมูลฐานในสมการ (0) จะได้เห็นว่ามีสัมประสิทธิ์เป็นบวกทั้งหมด
แสดงว่าการกระทำซ้ำๆนี้สิ้นสุดลง เพราะไม่สามารถหาตัวแปรเข้าและตัวแปรออกที่จะเพิ่มค่า Z ได้อีก ดังนั้นคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหานี้คือ X1 =2 , X2 = 6 ,Z = 36 สำหรับตารางซิมเพล็กซ์ที่สมบูรณ์ของปัญหานี้คือ

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1	0	0	0	3/2	1	36
S_1	1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
X_2	2	0	0	1	0	½	0	6
X_1	3	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

สรุปขั้นตอนของวิธีซิมเพล็กซ์ทั้งหมด

<u>ขั้นที่ 1</u> เขียนกำหนดการเชิงเส้นในรูปแบบมาตรฐาน และสร้างตารางซิมเพล็กซ์

<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกคำตอบมูลฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้ ซึ่งขั้นตอนนี้จะแยกเป็น 2 กรณีคือ

1. ถ้าทุกๆข้อจำกัดของปัญหาเดิมอยู่ในรูป $\leq$ จะได้ตัวแปรขาดเป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้น
2. ถ้าข้อจำกัดของปัญหาเดิมอยู่ในรูป $\geq$ หรือ = ในกรณีนี้จะต้องอาศัยการใช้เทคนิคตัวแปรเทียม (Artificial Variables Techniques) ซึ่งให้ตัวแปรเทียมเป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้น โดยจะกล่าวรายละเอียดต่อไป

<u>ขั้นที่ 3</u> หาคำตอบมูลฐานที่เป็นไปได้ใหม่โดยพิจารณาตัวแปรเข้าและตัวแปรออก จนกว่าจะได้ค่าตามสมการเป้าหมายในกรณีที่ปัญหานั้นมีคำตอบที่เหมาะสม ซึ่งในบางปัญหาอาจจะไม่มีคำตอบที่เหมาะสมก็ได้

เทคนิคตัวแปรเทียม (Artificial Variables Techniques)

ในกรณีที่กำหนดการเชิงเส้นมีข้อจำกัดอยู่ในรูป $\leq$ เมื่อเปลี่ยนข้อจำกัดให้อยู่ในรูปสมการที่สมมูลกันจะใช้ตัวแปรขาด (Slack Variables) บวกเข้าทางซ้ายของอสมการเดิม แล้วให้ตัวแปรขาดนี้เป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้ (Initial Basic Feasible Solution) แต่ถ้าข้อจำกัดอยู่ในรูป $\geq$ หรือ = การกำหนดคำตอบมูลฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้จะต้องอาศัยการแต่งเติมข้อจำกัดเดิมด้วยตัวแปรเทียม (Artificial Variables) ซึ่งจะมี 2 วิธี คือ

1. วิธี Big-M (Big-M Method)
2. วิธีสองเฟส (Two phase Method)

วิธี Big-M

มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> เขียนรูปแบบปัญหาเดิมให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

<u>ขั้นที่ 2</u> เติมตัวแปรเทียมเข้าทางซ้ายมือของสมการที่ได้จากข้อจำกัดเดิมซึ่งอยู่ในรูป $\geq$ หรือ = และตัวแปรเทียมมีค่า ≥ 0

<u>ขั้นที่ 3</u> เมื่อเติมตัวแปรเทียมในข้อจำกัดแล้ว กำหนดค่า M ที่เป็นบวกและมีค่าใหญ่มากๆ ให้เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในฟังก์ชันเป้าหมาย โดยที่

ถ้าฟังก์ชันเป้าหมายต้องการ***ค่าสูงสุด*** จะกำหนด **(-M)** เท่าของตัวแปรเทียม บวกเข้าไปในฟังก์ชันเป้าหมายนี้

ถ้าฟังก์ชันเป้าหมายต้องการ**ค่าต่ำสุด** จะกำหนด **(+M)** เท่าของตัวแปรเทียม บวกเข้าไปในฟังก์ชันเป้าหมายนี้

<u>ขั้นที่ 4</u> ให้ตัวแปรเทียมเป็นคำตอบมูลฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้ และเนื่องจากในสมการเป้าหมายมีตัวแปรเทียมอยู่ เมื่อตัวแปรเทียมเป็นตัวแปรมูลฐานเริ่มต้น จึงต้องทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในสมการเป้าหมายเป็น 0 แล้วจึงสร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น

<u>ขั้นที่ 5</u> พิจารณาตัวแปรมูลฐานเข้าและตัวแปรมูลฐานออก เพื่อปรับปรุงค่าของตัวแปรให้ได้ผลตามเป้าหมาย โดยใช้หลักการซิมเพล็กซ์

<u>ตัวอย่าง</u> ปัญหาเริ่มต้น

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 = 14 \\
& 2x_1 - 4x_2 >= 2 \\
& 4x_1 + 3x_2 <= 19 \\
& x_1, x_2 >= 0
\end{aligned}$$

เขียนอยู่ในรูปมาตรฐาน(ในที่นี้ให้ตัวแปรขาดเป็น X_3 และ X_4 ตามลำดับ) และเพิ่มตัวแปรเทียม a_1 และ a_2 เป็น

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + a_1 = 14 \\
& 2x_1 - 4x_2 - x_3 + a_2 = 2 \\
& 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 19 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 >= 0
\end{aligned}$$

และนำไปเขียนตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้นได้ดังนี้

basic	x1	x2	x3	x4	a1	a2	RHS
Z	-2	-3	0	0	.-M	.-M	0
a1	3	2	0	0	1	0	14
a2	2	-4	-1	0	0	1	2
x4	4	3	0	1	0	0	19

ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในสมการเป้าหมายให้เป็น 0

basic	x1	x2	x3	x4	a1	a2	RHS
Z	.-5M+2	.2M+3	M	0	0	0	.-16M
a1	3	2	0	0	1	0	14
a2	2	-4	-1	0	0	1	2
x4	4	3	0	1	0	0	19

จากนั้นใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการแก้ปัญหา

Iteration 1

basic	x1	x2	x3	x4	a1	RHS
Z	0	.-8M+7	(-3/2)M+1	0	0	-11M-2
a1	0	8	3/2	0	1	11
x1	1	-2	-1/2	0	0	1
<--x4	0	11	2	1	0	15

Iteration 2

basic	x1	x2	x3	x4	a1	RHS
Z	0	0	-(M+6)/22	(8M-7)/11	0	-(M+127)/11
<--a1	0	0	1/22	-8/11	1	1/11
x1	1	0	-3/22	2/11	0	41/11
x2	0	1	2/11	1/11	0	15/11

Iteration 3

basic	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	0	0	-5	-11
x3	0	0	1	-16	2
x1	1	0	0	-2	4
<--x2	0	1	0	3	1

Iteration 4

basic	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	5/3	0	0	-28/3
x3	0	16/3	1	0	22/3
x1	1	2/3	0	0	14/3
x4	0	1/3	0	1	1/3

ได้คำตอบคือ X* = (14/3,0,22/3,1/3) , min Z = 28/3

วิธี two phase

เนื่องจากวิธี Big-M นั้น การคิดค่าตัวเลขอาจผิดพลาดได้ง่าย เพราะติดค่า M และในบางครั้งเมื่อวิเคราะห์ไปแล้วได้ผลออกมาว่าปัญหานั้นไม่มีคำตอบ ดังนั้นเพื่อให้การคำนวณทำได้ง่ายขึ้น และเป็นการตรวจสอบก่อนว่าปัญหานั้นมีคำตอบหรือไม่ จึงมีการใช้เทคนิคสองเฟส ช่วยในการแก้ปัญหาตัวแปรเทียม ดังนี้

เฟสที่ 1 ถ้าปัญหาเดิมต้องการหาค่า**สูงสุด** ให้สร้างสมการเป้าหมายใหม่เป็น

หาค่าสูงสุดของ (- ผลบวกของตัวแปรเทียม)

ถ้าปัญหาเดิมต้องการหาค่า**ต่ำสุด** ให้สร้างสมการเป้าหมายใหม่เป็น

หาค่าต่ำสุดของ (ผลบวกของตัวแปรเทียม)

โดยมีข้อจำกัดของปัญหาเดิม แล้วสร้างตารางซิมเพล็กซ์วิเคราะห์ปัญหา ถ้าตารางสุดท้ายได้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายเป็น 0 แสดงว่าปัญหานั้นมีคำตอบ ให้ทำเฟสที่ 2 ต่อไป ถ้าค่าฟังก์ชันเป้าหมายในระยะที่ 1 ไม่เป็น 0 แสดงว่าปัญหานั้นไม่มีคำตอบเพราะไม่สามารถหาตัวแปรมูลฐานใหม่ที่จะเข้าแทนที่ตัวแปรเทียมได้ จึงไม่ต้องทำเฟสที่ 2 อีก

เฟสที่ 2 เมื่อได้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายใหม่เป็น 0 ให้ใช้คำตอบมูลฐานเหมาะสมที่ได้จากเฟสที่ 1 เป็นตารางเริ่มต้นโดยใช้เป้าหมายเดิมและข้อจำกัดเดิม แล้วใช้วิธีซิมเพล็กซ์ต่อไปจนกระทั่งได้คำตอบที่เหมาะสม

ตัวอย่าง ปัญหาเริ่มต้น

Min $2x_1 + 3x_2$

s.t. $3x_1 + 2x_2 = 14$

$2x_1 - 4x_2 >= 2$

$4x_1 + 3x_2 <= 19$

$x_1, x_2 >= 0$

เฟลที่ 1 เขียนตารางเริ่มต้นได้ดังนี้

basic	x1	x2	x3	x4	a1	a2	RHS
Z	0	0	0	0	1	1	0
a1	3	2	0	0	1	0	14
a2	2	-4	-1	0	0	1	2
x4	4	3	0	1	0	0	19

Iteration 1 – phase I

basic	x1	x2	x3	x4	a1	RHS
Z	0	-8	-3/2	0	0	-11
a1	0	8	3/2	0	1	11
x1	1	-2	-1/2	0	0	1
<--x4	0	11	2	1	0	15

Iteration 2 – phase I

basic	x1	x2	x3	x4	a1	RHS
Z	0	0	-1/22	8/11	0	-1/11
<--a1	0	0	1/22	-8/11	1	1/11
x1	1	0	-3/22	2/11	0	41/11
x2	0	1	2/11	1/11	0	15/11

Iteration 3 – phase I

basic	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	0	0	0	0
x3	0	0	1	-16	2
x1	1	0	0	-2	4
x2	0	1	0	3	1

ได้ค่า Z เป็น 0 นำตารางสุดท้ายของ Phase I มาเป็นตารางแรกของ Phase II ยกเว้นค่าในแถว Z จะนำมาจากค่าฟังก์ชันเป้าหมายเริ่มต้น

ตารางเริ่มต้น phase II

basic	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	2	3	0	0	0
x3	0	0	1	-16	2
x1	1	0	0	-2	4
x2	0	1	0	3	1

Iteration 0 – phase II

basic	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	0	0	-5	-11
x3	0	0	1	-16	2
x1	1	0	0	-2	4
x2	0	1	0	3	1

Iteration 1 – phase II

basic	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	5/3	0	0	-28/3
x3	0	16/3	1	0	22/3
x1	1	2/3	0	0	14/3
x2	0	1/3	0	1	1/3

จะได้คำตอบที่ดีที่สุด คือ $X^* = (14/3,1/3,22/3)$, $Z = 28/3$