

Aufgabe 1**(a)** Randbedingungen finden und Ansatz

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ anpassen}$$

Die 3 geometrischen Randbedingungen lauten:

$$w(x=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0$$

$$w'(x=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 0$$

$$w(x=l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2l^2 + a_3l^3 = 0 \Rightarrow \quad a_2 = -a_3l$$

Damit lautet der angepasste Ansatz

$$w(x) = a_2x^2 + a_3x^3 = -a_3lx^2 + a_3x^3$$

$$w(x) = a_3(x^3 - lx^2)$$

mit den Ableitungen

$$w'(x) = a_3(3x^2 - 2lx) \quad \text{und} \quad w''(x) = a_3(6x - 2l)$$

(b) Berechnung der Formänderungsenergie W

$$W = W^{Balken} + W^{Feder} \quad (W^{Feder} = E_{pot}^{Feder})$$

$$= \frac{EI}{2} \int_0^l w''^2 dx + \frac{1}{2} c_M (w'(l))^2$$

$$= \frac{EI}{2} a_3^2 \int_0^l (6x - 2l)^2 dx + \frac{1}{2} c_M a_3^2 (3l^2 - 2l^2)^2$$

$$= \frac{EI}{2} a_3^2 \int_0^l (36x^2 - 24xl + 4l^2) dx + \frac{1}{2} c_M a_3^2 (l^2)^2$$

$$= \frac{EI}{2} a_3^2 [12x^3 - 12lx^2 + 4l^2x]_0^l + \frac{1}{2} c_M a_3^2 l^4$$

$$= 2EIa_3^2 l^3 + \frac{1}{2} c_M a_3^2 l^4$$

$$W = a_3^2 (2EI l^3 + \frac{1}{2} c_M l^4)$$

• Berechnung der äußeren Arbeit A

$$A = \int_0^l q_0 w(x) dx$$

$$= q_0 a_3 \int_0^l (x^3 - lx^2) dx = q_0 a_3 \left(\frac{1}{4} l^4 - \frac{1}{3} l^4 \right) = -\frac{1}{12} q_0 a_3 l^4$$

(c) Berechnung des Freiwert a_3

$$\delta(W - A) = 0$$

$$\frac{\partial(W - A)}{\partial a_3} \delta a_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 (4EI l^3 + c_M l^4) + \frac{1}{12} q_0 l^4 = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{12} \left(\frac{q_0 l}{4EI + c_M l} \right)$$

• Berechnung der Näherungslösung für $w(x)$ mit dem Freiwert a_3

$$w(x) = -\frac{1}{12} \left(\frac{q_0 l}{4EI + c_M l} \right) (x^3 - lx^2)$$

Aufgabe 2

φ_a, ψ_a Winkelbezeichnungen in der ausgelenkte Lage

Ortsvektoren:

$$\underline{r}_F = -l \cos \varphi_a \underline{e}_x + l \sin \varphi_a \underline{e}_y$$

$$\underline{r}_K = (2l \cos \psi_a - l \cos \varphi_a) \underline{e}_x$$

Variation:

$$\delta \underline{r}_F = l \sin \varphi_a|_{\varphi_a=\varphi} \delta \varphi \underline{e}_x + l \cos \varphi_a|_{\varphi_a=\varphi} \delta \varphi \underline{e}_y$$

$$\delta \underline{r}_K = (-2l \sin \psi_a|_{\psi_a=\psi} \delta \psi + l \sin \varphi_a|_{\varphi_a=\varphi} \delta \varphi) \underline{e}_x$$

Kinematische Beziehung:

$$2l \sin \psi = l \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{2} \quad \cos \psi = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}$$

bzw.

$$2l \sin \psi_a = l \sin \varphi_a$$

$$2l \cos \psi_a|_{\psi_a=\psi} \delta \psi = l \cos \varphi_a|_{\varphi_a=\varphi} \delta \varphi$$

$$2l \cos \psi \delta \psi = l \cos \varphi \delta \varphi$$

$$\delta \psi = \frac{\cos \varphi}{2 \cos \psi} \delta \varphi$$

$\sin \psi, \cos \psi$ und $\delta \psi$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \delta \underline{r}_K &= (-2l \sin \psi \frac{\cos \varphi}{2 \cos \psi} \delta \varphi + l \sin \varphi \delta \varphi) \underline{e}_x \\ &= (-2l \frac{\sin \varphi}{2} \frac{\cos \varphi}{2 \frac{1}{2} \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}} \delta \varphi + l \sin \varphi \delta \varphi) \underline{e}_x \\ &= (l \sin \varphi - l \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{4 - \sin^2 \varphi}}) \delta \varphi \underline{e}_x \end{aligned}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{F} \cdot \delta \underline{r}_F + \underline{K} \cdot \delta \underline{r}_K = 0$$

$$[-Fl \cos \varphi + K(l \sin \varphi - l \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{4 - \sin^2 \varphi}})] \delta \varphi = 0$$

$$K = F \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{4 - \sin^2 \varphi}}}$$

Aufgabe 3**(a) Kinematik:**

$$\underline{r}_1 = x \underline{e}_x \Rightarrow \underline{v}_1 \equiv \dot{\underline{r}}_1 = \dot{x} \underline{e}_x$$

$$\underline{r}_2 = (x + l \sin \varphi) \underline{e}_x + l \cos \varphi \underline{e}_y$$

$$\underline{v}_2 = (\dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_x + (-l \sin \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_y$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (-l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m (2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$U = -mgl \cos \varphi + cx^2$$

Lagrange - Funktion:

$$L = K - U$$

$$L = \frac{1}{2} m (2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \varphi - cx^2$$

(b) Relative Geschwindigkeit zwischen Wind und Masse der Kugel

$$\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w \quad \underline{v}_w = -v_w \underline{e}_y$$

$$\underline{v}_{rel} = (\dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_x + (-l \sin \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_y - (-v_w) \underline{e}_y$$

$$\underline{v}_{rel} = (\dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_x + (v_w - l \sin \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_y$$

$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{(\dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (v_w - l \sin \varphi \dot{\varphi})^2}$$

$$|\underline{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)}$$

(c) Dissipationsfunktion

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{1}{3}k |\underline{v}_{rel}|^3$$

$$D = b\dot{x}^2 + \frac{1}{3}k \left[\sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)} \right]^3$$

(d)

$$\delta W_p = P(t) \delta x_p$$

$$\delta W_p = P(t) (\delta x + l \cos \varphi \delta \varphi)$$

$$Q_x = P(t)$$

$$Q_\varphi = P(t) l \cos \varphi$$

(e) Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 2b\dot{x} + \frac{1}{2}k \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)} (2\dot{x} + 2l\dot{\varphi} \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\dot{x} \cos \varphi + ml^2 \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m\ddot{x} \cos \varphi - m\dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + ml^2 \ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m\dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi - mgl \sin \varphi \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{2} k \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)} (2l^2 \dot{\varphi} + 2l(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi))\end{aligned}$$

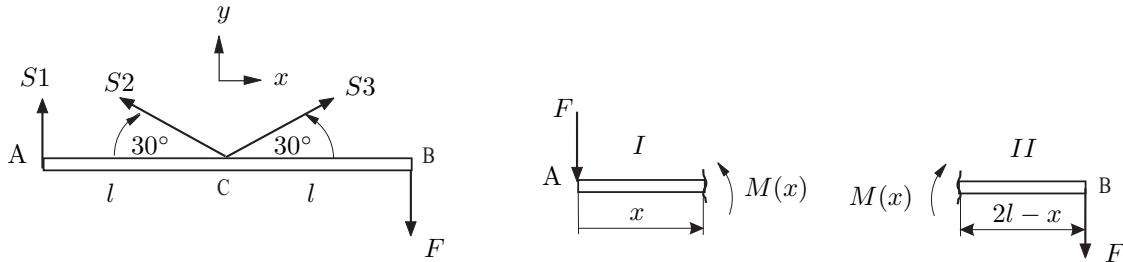
Lagrange - Gleichungen 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Bewegungsdifferentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}& 2m\ddot{x} + m\ddot{x} \cos \varphi - m\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2cx + 2b\dot{x} \\ & + k \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)} (\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi) = P(t) \\ & ml^2 \ddot{\varphi} + m\ddot{x} \cos \varphi - m\dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m\dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi + mgl \sin \varphi \\ & + k \sqrt{\dot{x}^2 + v_w^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)} (l^2 \dot{\varphi} + l(\dot{x} \cos \varphi - v_w \sin \varphi)) = P(t)l \cos \varphi\end{aligned}$$

Aufgabe 4



Stabkräfte und Biegemomente:

$$\Sigma M^{(C)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_1 l - Fl = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -F$$

$$\Sigma F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_3$$

$$\Sigma F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 + S_2 \frac{1}{2} + S_3 \frac{1}{2} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 2F \quad S_3 = 2F$$

$$0 \leq x < l \quad \Rightarrow \quad M_{bI}(x) = -Fx$$

$$l < x \leq 2l \quad \Rightarrow \quad M_{bII}(x) = F(x - 2l)$$

Formänderungsenergien:

$$W_{S1}^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{S_1^2}{EA} dx = \frac{1}{2EA} S_1^2 \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{F^2}{EA} \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

$$W_{S2}^* = W_{S3}^* = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \frac{S_2^2}{EA} dx = \frac{1}{2EA} S_2^2 \frac{2l}{\sqrt{3}} = \frac{F^2}{EA} \frac{4l}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} W_b^* &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_{bI}^2(x)}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l^{2l} \frac{M_{bII}^2(x)}{EI} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2 x^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l^{2l} \frac{F^2 (x - 2l)^2}{EI} dx = \frac{F^2}{2EI} \int_0^l x^2 dx + \frac{F^2}{2EI} \int_l^{2l} (x - 2l)^2 dx \\ &= \frac{F^2 l^3}{6EI} + \frac{F^2}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 l + 4l^2 x \right]_l^{2l} = \frac{F^2 l^3}{6EI} + \frac{F^2}{2EI} \frac{l^3}{3} \end{aligned}$$

$$W_b^* = \frac{F^2 l^3}{3EI}$$

$$W_{ges}^* = W_{S1}^* + W_{S2}^* + W_{S3}^* + W_b^* = \frac{F^2}{EA} \frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{F^2}{EA} \frac{4l}{\sqrt{3}} + \frac{F^2}{EA} \frac{4l}{\sqrt{3}} + \frac{F^2 l^3}{3EI}$$

$$W_{ges}^* = \frac{F^2}{EA} \frac{17l}{2\sqrt{3}} + \frac{F^2 l^3}{3EI}$$

Verschiebung des Punktes B:

$$u_B = \frac{\partial W_{ges}^*}{\partial F} = \frac{17}{\sqrt{3}} \frac{Fl}{EA} + \frac{2Fl^3}{3EI}$$

Theorieaufgaben

(je 1 Punkt)

1. Wie lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art für ein System mit n Freiheitsgraden und r Zwangsbedingungen sowie beliebigen eingeschränkten Kräften?

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}$$

$$\dot{L} = \dot{A}_1 + \dots + \dot{A}_n + \dot{r}$$

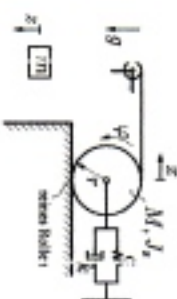
2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit sagt aus: Ein mechanisches System befindet sich genau dann im Gleichgewicht, wenn

☐ die Arbeit bei bestimmten virtuellen Verschiebungen gleich Null ist.

☒ die Arbeit bei beliebigen virtuellen Verschiebungen gleich Null ist.

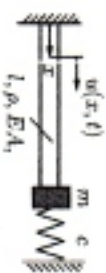
☐ die Arbeit aller nicht konservativen Kräfte gleich Null ist.
Bitte die richtige Aussage ankreuzen!

3. Geben Sie die kinetische Energie des skizzierten Systems in Abhängigkeit der gegebenen Koordinaten (x, z, φ) an!
Gegeben: M, m, g, J, c, k



$$K = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$$

4. Wie lautet die Lagrange-Funktion für das skizzierte System, bestehend aus einem Dehnstab, einer Masse und einer Feder? Kreuzen Sie die richtige Antwort an!
Gegeben: ρ, m, l, c, A, E



☐ $L = \frac{1}{2} m \dot{w}^2(t, t) + \frac{1}{2} c w^2(t, t) + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l A E w'^2 dx$

☐ $L = \frac{1}{2} m \dot{w}^2(t, t) - \frac{1}{2} c w^2(t, t) + \frac{1}{2} \int_0^l E I \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l E I w'^2 dx$

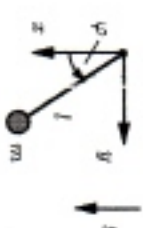
☒ $L = \frac{1}{2} m \dot{w}^2(t, t) - \frac{1}{2} c w^2(t, t) + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l A E w'^2 dx$

5. Kreuzen Sie die richtige Aussage bezüglich der Beziehung zwischen der kompletteren Energie $\tilde{U}$ und der potentiellen Energie U für linear elastische Systeme (ohne Vorspannung) an!

☒ $\tilde{U} = U$ ☐ $\tilde{U} > U$ ☐ $\tilde{U} < U$

6. Gegeben sei das ebene mathematische Pendel mit der Punktmasse m und der Pendellänge l im Erdschwerkfeld. Kreuzen Sie die richtigen Antworten bezüglich der Frage der Gleichgewichtslage an!

Gegeben: m, l, g



☒ $\varphi = 0$ stabiles Gleichgewicht

☐ $\varphi = 0$ instabiles Gleichgewicht

☐ $\varphi = \pi$ stabiles Gleichgewicht

☒ $\varphi = \pi$ instabiles Gleichgewicht

7. Welchen Randbedingungen muss ein Ritz-Ansatz mindestens genügen, um physikalisch sinnvoll zu sein?

☐ kennen ☒ geometrischen ☐ dynamischen ☐ allen

8. Sucht die vorgegebene Ansatzfunktion $\psi(x)$ für den skizzierten beidseitig fest eingespannten Balken einen sinnvollen Ritz-Ansatz zum Bestimmen einer Näherungslösung für die Biegelinie $w(x)$?



$$\psi(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

☐ ja ☒ nein

Begründen Sie Ihre Antwort:

$\psi'(x) \neq 0$ für $x=0 \wedge x=l$
 ψ nicht erfüllt

9. Gegeben sei das ebene mathematische Pendel mit der Punktmasse m und der Pendellänge l im Erdschwerkfeld. Geben Sie die Bindungsgleichung zur Beschreibung der Stange in den gegebenen Koordinaten an!
Gegeben: m, l, g



$$g(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

10. Schreiben Sie die komplementäre Energie für einen kreisförmigen Stab mit der Länge l der gleichmäßig auf Dehnung und Torsion beansprucht wird.

Gegeben: l, E, A, G, I_p

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(x)}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t(x)^2}{G I_p} dx$$

Berechnen Sie von Ihnen eingeführte Größen!

$N(x)$ - Normalkraft $M_t(x)$ - Torsionsmoment