Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Bärwolff, Fuhrmann, Mehl, Penn-Karras, Scherfner 11.10.2004

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure
Lösungsblatt

---

1. Aufgabe 7 Punkte

Bestimmen der Integrationsgrenzen:
Schreiben Sie das Integral $\iiint\limits_M f\ dV$ in die Form

$$\int_a^A \int_b^B \int_c^C f(x,y,z)\ dxdydz$$

um. Die Menge M ist dabei

$$M = \{x^2+y^2 \le 1\} \cap \{z \ge 0\} \cap \{x+y+z \le 2\}\ .$$

Lösung:

Die Menge M ist als Bereich darzustellen. Wenn man die Aufgabenstellung wörtlich nimmt, ist die Integrationsreihenfolge vorgegeben:

Die äußerste Variable ist z. Für sie gilt $z \ge 0$

Für z fest gilt $M_z := M \cap \{z=z\} = \{x+y \le 2-z\} \cap \{x^2+y^2 \le 1\}$. Diese Menge entsteht in der x,y-Ebene durch Schnittbildung des Einheitskreises mit der Halbebene $\{y \le 2-z-x\}$, also der Fläche unter dem Graphen der Funktion $x \to f(x) = 2-x-z$.

Die Projektion dieser Fläche auf die y-Achse ergibt den zulässigen Parameterbereich für die y-Koordinate.

Für $2-z := \lambda \in [-1,1]$ berechnet man mit ein wenig Euklidischer Geometrie, dass das entstehende Intervall für die y-Koordinate gegeben ist durch

$$I_\lambda = [-1, \sin\left(\arcsin\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right)]$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$\lambda = \lambda(z) = \max(-1, \min(2-z,1)) \in [-1,1]$$

Damit verbleibt für die letzte freie Variable x bei festgehaltenem $z \ge 0$ und $y \in I_z$, dass

$$x \in [-\sqrt{1-y^2}, \min(\sqrt{1-y^2}, 2-z-y)]$$

und wir erhalten schließlich für das Integral die Darstellung

$$\int_0^\infty \int_{-1}^{\sin\left(\arcsin\left(\frac{\max(-1,\min(2-z,1))}{2}\sqrt{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\min(\sqrt{1-z^2},2-z-y)} f(x,y,z)dxdydy$$

Wenn man die Aufgabenstellung nicht wörtlich nimmt, wählt man am besten die Variable z als innerste Integrationsvariable.

Die betrachtete Menge ist Teilmenge des Einheitsylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 \leq 1\}$, welche zwischen der x, y-Ebene und schräger Deckfläche, und der Ebene $\{x + y + z = 2\}$ liegt.

Die Decke berührt dabei die x, y-Ebene nicht, weil für x, y mit $x^2 + y^2 \leq 1$ gilt, dass

$$h = 2 - x - y \geq 2 - \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2 - \sqrt{2} > 0.$$

Deshalb ist die Grundfläche in der x, y-Ebene tatsächlich kreisförmig und man kann sie wie üblich parametrisieren, etwa

$$x \in [-1, 1], \quad y \in [-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}].$$

Für die verbleibende Integrationsvariable z ergibt sich dann entsprechend

$$z \in [0, 2 - x - y]$$

Das Integral über die Menge M kann dann etwa wie folgt dargestellt werden

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2-x-y} f(x, y, z) dz dy dx.$$

2. Aufgabe 6 Punkte

Welche der folgenden Mengen ist offen, abgeschlossen oder kompakt?

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = n^2,\ n \in \mathbb{N}\big\};$$
$$B = \Big\{\Big(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\Big) \in \mathbb{R}^2 | k \in \mathbb{N}\Big\}\ ;$$
$$C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y^2\big\} \cap \big([0,1] \times [0,1]\big)\ .$$

Lösung:

a) Die Menge ist die Vereinigung aller Kreissphären mit ganzzahligen Radien. Das Komplement ist die Vereinigung aller der entsprechenden offenen Annuli. Also ist das Komplement als Vereinigung offener Mengen offen. Damit ist also die Menge selbst abgeschlossen.

Die Menge ist nicht beschränkt, kann also nach dem Satz von Heine Borel nicht kompakt sein.

b) Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie die Menge aller ihrer Häufungspunkte enthält. Der Punkt $(0,0)$ ist ein Häufungspunkt, er ist aber nicht in der Menge enthalten. Also ist M nicht abgeschlossen. M kann also auch nicht kompakt sein.

Die Menge ist auch nicht offen, denn dazu müsste jeder Punkt der Menge mindestens eine offene Umgebung besitzen die ganz in der Menge liegt. Tatsächlich liegt keine Umgebung eines beliebigen Punktes dieser Menge vollständig in M.

c) Die angegebene Menge ist der Graph der Wurzelfunktion im Einheitsquadrat des 1. Quadranten.
Sie ist abgeschlossen (weil die Wurzelfunktion stetig ist). und trivialerweise beschränkt. Damit ist sie nach dem Satz v. Heine-Borel also auch kompakt.

3. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ durch die Parametrisierung

$$\Psi(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \phi \in [0, 2\pi),\ h \in [0, \infty)\ .$$

Geben Sie diese Fläche als 0-Niveau einer Funktion f an.

Lösung:
Die angegebene Funktion parametrisiert die Fläche, die durch Rotation der Standard-Parabel um die y-Achse entsteht.

Die Punkte auf dem entstehenden Paraboloiden sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft, dass $z = x^2 + y^2$.

Damit ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$$

eine natürliche Wahl.

4. Aufgabe 6 Punkte

Zeigen Sie, dass sich die beiden Niveauflächen

$$x + 2y - \ln z = -4 \quad \text{und} \quad x^2 - xy - 8x + z = -5$$

im Punkt $(2, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ berühren, d.h. dass sie an diesem Punkt die gleiche Tangentialebene besitzen.

Lösung:
Man rechnet zunächst nach, dass der gegebene Punkt auf beiden Niveauflächen $\{f = -4\}$ und $\{g = -5\}$ liegt.

Zum Beweis der Behauptung genügt es, die Gradienten der beiden Funktionen f, g im Punkte $P = (2, -3, 1)$ zu berechnen, da der Gradient orthogonal zur Tangentialebene der Niveaufläche steht.

Wir berechnen

$$\nabla f_{|(x,y,z)} = (1, 2, -\frac{1}{z})^t$$

und

$$\nabla g_{|(x,y,z)} = (2x - y - 8, -x, 1)^t$$

Damit gilt in Punkte P

$$\nabla f = (1, 2, -1), \quad \nabla g = (-1, -2, 1),$$

d.h. die Flächennormalen sind hier linear abhängig
(bzw. genauer antiparallel).

Damit fallen die beiden hierzu orthogonalen Hyperflächen mit Basispunkt P zusammen.

5. Aufgabe 6 Punkte

Bestimmen Sie das Flussintegral $\iint\limits_S \vec{v}\, d\vec{O}$ des Vektorfeldes

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xy^2 \\ x^2 \sin z \\ zy^2 \end{pmatrix} \ ,$$

durch die gesamte Oberfläche S des Zylinderabschnittes

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ |z| \leq 1 \right\} \ .$$

Lösung:

Wir benutzen den Satz von Gauß.

Also können wir zur Berechnung des Flussintegrals des betrachteten Vektorfeldes V über den Rand stattdessen auch seine Divergenz über den Vollzylinder integrieren.

Für die Divergenz berechnet man

$$\mathrm{div} V = -y^2 + 0 + y^2 = 0$$

Also ist das Integral $\iiint_Z \mathrm{div} V xdydz = 0$ und (mit Gauß) folglich auch das entsprechende Flussintegral aus der Aufgabenstellung.

6. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (mit Begründung!), welche falsch (mit Gegenbeispiel!)? Für Antworten ohne Begründung bzw. Gegenbeispiel gibt es keine Punkte.

a) Die vektoriellen Oberflächenelemente $d\vec{O}$ der Parametrisierungen $\Psi(u,v)$ und $\widetilde{\Psi}(u,v) := \Psi(v,u)$ haben unterschiedliche Vorzeichen, sind aber ansonsten gleich.

b) Für alle total differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen gilt $\Delta f = 0$.

c) Differenzierbare Funktionen haben auf kompakten Mengen stets mindestens ein Maximum und Minimum.

d) Es gibt keine Mengen ohne Rand, d.h. deren Randmenge die leere Menge ist.

Lösung:

a) richtig, weil das Vektorprodukt antisymmetrisch ist. Der Betrag des Vektoriellen Oberflächenelementes ist das skalare Oberflächenelement, d.h. das skalare Oberflächenelement verändert sich nicht.

b) falsch, Gegenbsp. $f(x,y,z) = x^2$

c) richtig, denn diffb. Funktionen sind insbes. stetig, woraus die Aussage folgt.

d) falsch, denn der ganze Raum als Teilmenge ist nichtleer mit leerem Rand. Denn ein möglicher Randpunkt des Raumes müsste die Eigenschaft haben, dass jede Umgebung von ihm einen nichtleeren Schnitt mit dem Komplement des Ganzraumes haben müsste. Da das Komplement des Ganzraumes aber leer ist und der Schnitt einer beliebigen Menge mit der leeren Menge wieder die leere Menge ergibt, ist dies nicht möglich. Damit hat also der Ganzraum als Teilmenge keinen Rand.

(Der Ganzraum ist die einzige nichtleere Teilmenge des euklidischen Raumes mit dieser Eigenschaft, was man etwa wie folgt sieht. Wenn der Rand einer Menge leer ist, dann ist der Abschluss dieser Menge die Menge selbst, denn den Abschluss einer Menge erhält man aus Vereinigung der Menge mit ihrem Rand. Also wäre die Menge abgeschlossen. Die Menge wäre auch offen, denn die kleinste offene Teilmenge einer Menge entsteht durch Mengensubtraktion ihres Randes, hier also der leeren Menge, was die Menge nicht verändert. Damit wäre die betrachtete Menge also zugleich offen und abgeschlossen. Im euklidischen Raum kommen hierfür nur die leere Menge und der ganze Raum in Frage. Der Rand der leeren Menge ist selber wieder die leere Menge, also leer. Damit wäre die leere Menge ebenfalls eine Menge ohne Rand, doch die leere Menge ist natürlich als Beispiel ziemlich uninteressant.)