جـامعــة الحـسن الثـانـي بالدار البيـضـاء
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Contrôle de Théorie du Contrôle (Corrigé)

1. On considère le système suivant, 3pts

$$\dot z_1 = \sin z_1 - 2z_1 e^{z_2},$$
$$\dot z_2 = z_2^2 - 2z_2 \cos z_1.$$

(a) Vérifier que l'origine est un point d'équilibre pour ce système.
Rép : On considère la fonction $f(z) = (\sin z_1 - 2z_1 e^{z_2}, z_2^2 - 2z_2 \cos z_1)$. On a,

$$f(0) = (\sin 0 - 2 \times 0 \times e^0, 0^2 - 2 \times 0 \times \cos 0) = 0.$$

Donc 0 est un état d'équilibre pour f.

(b) En utilisant la méthode par linéarisation, montrer que l'origine est stable.
Rép : La Jacobienne de f est donnée par, $J_f(z) = \begin{pmatrix} \cos z_1 - 2e^{z_2} & -2z_1 e^{z_2} \\ 2z_2 \sin z_1 & 2z_2 - 2\cos z_1 \end{pmatrix}$, pour tout z. Donc $J_f(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, de spectre $\{-1, -2\}$. D'où l'origine est stable, d'après Thm 2.14(f1).

2. On considère le système gouverné par l'équation différentielle suivante, 7pts

$$(\mathcal{S}) \;\; \dot x = x^2 - ux,$$

évoluant sous les contraintes de viabilité,

$$0 \leq x \leq 1 \;\text{ et } u \geq x,$$

où u, x sont à valeurs réelles. On définit la multifonction de régulation corréspondante, par,

$$\mathcal{R}(x) \doteq \{u \mid u \geq x \text{ et } x^2 - ux \in T_{[0\ 1]}(x)\}, \quad \text{pour tout } x \in [0\ 1],$$

où $T_{[0\ 1]}(\cdot)$ désigne le cône contingent à l'intervalle $[0\ 1]$.

(a) Donner $T_{[0\ 1]}(x)$ pour tout $x \in [0\ 1]$.

Rép : $T_{[0\ 1]}(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si} \quad x = 0 \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \mathbb{R}_- & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

(b) Montrer que $\mathcal{R}(x) = [x\ \infty[$, pour tout $x \in [0\ 1]$.
Rép : On le montre en distinguant les cas $x = 0, x = 1$, et $x \in]0\ 1[$.

(c) Donner une loi continue de régulation σ telle que $\sigma(0) = 2$.
Rép : Par exemple $\sigma(x) = x + 2$, pour tout $x \in [0\ 1]$.

(d) Calculer la loi minimale de régulation, ie. définie par $\sigma_\star(x) = \pi_{\mathcal{R}(x)}(0)$ pour tout $x \in [0\ 1]$, où π désigne l'opérateur de projection sur un fermé convexe.
Rép : $\sigma_\star(x) = x$ pour tout $x \in [0\ 1]$.

(e) Donner une solution de $\mathcal{S}$, correspondant à la loi minimale $u = \sigma_\star(x)$, et valant $\frac{1}{2}$ à l'instant 0.

Rép : $\bar{x}(t) = 1/2$ pour tout $t \geq 0$.

3. Soit le système gouverné par l'équation différentielle linéaire de second ordre, 10pts

$$(\mathcal{S}) \quad \ddot{x} = u, \quad \text{avec}, \quad t \geq 0,$$

où $\ddot{x}$ désigne la dérivée seconde de x. Ecrire $(\mathcal{S})$ sous la forme, $\dot{z} = Az + Bu$, où A et B sont des matrices à expliciter.

Rép : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) i. Montrer que la paire (A, B) est contrôlable.

Rép : $[B \; AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, est de rang 2, car, de déterminant -1.

ii. Calculer e^{At}, pour tout $t \geq 0$.

Rép : $A^2 = 0$, donc pour tout $t \geq 0$, $e^{At} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii. Soit $T > 0$. Calculer le grammien de contrôlabilité G_T sur l'intervalle $[0 \; T]$.

Rép : Ici $R(t) = e^{At}$, d'où,

$$G_T = \int_0^T e^{-At} B B^\star e^{-A^\star t} \, dt = \int_0^T \begin{pmatrix} t^2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} T^3/3 & -T^2/2 \\ -T^2/2 & T \end{pmatrix}.$$

iv. Soit $b \in \mathbb{R}^2$. Calculer le contrôle à énergie minimale qui réalise le transfert de l'origine à b sur l'intervalle $[0 \; T]$.

Rép : On applique Thm 1.7 (f2) : Pour tout $t \in [0 \; T]$,

$$u_\star(t) = B^\star e^{-A^\star t} G_T^{-1} e^{-AT} b = (-12b_1/T^3 + 6b_2/T^2)t + 6b_1/T^2 - 2b_2/T.$$

(b) i. Dire pourquoi l'origine est instable pour A.

Rép : On applique Thm 2.8 (b) (f1) : $M_A(X) = X^2, 0 \in \mathrm{sp}(A)$ et $2 = \nu(0) > 1$.

ii. En utilisant le théorème de placement de pôles, trouver une matrice K telle que l'origine soit asymptotiquement stable pour $A + BK$.

Rép : Comme dans Exemple 2.8 (f2), la paire (A, B) étant contrôlable, on a $\tilde{A} = A, \tilde{B} = B$. Donc $D = I_2$. La matrice $\tilde{K} = (0 - 2, 0 - 3) = (-2, -3)$ est telle que le polynôme caractéristique de $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ est $X^2 + 3X + 2$, et donc ayant $\mathrm{sp}(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) = \{-1, -2\}$. D'où $K = \tilde{K}D = (-2, -3)$ et delà l'origine est asymptotiquement stable pour $A + BK$.

Faculté des Sciences Ain Chock, le 5/9/2020, par K. Kassara.