

ALGORITHMES POUR LA COMMANDE D'UNE CLASSE DE SYSTEMES A PARAMETRES REPARTIS NON LINEAIRES

K. KASSARA ET A. EL JAI

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences - Rabat

Mots clefs: commandabilité, systèmes à paramètres répartis, non linéaire, algorithme.

Résumé. L'objet de ce papier est de proposer un algorithme de commande pour une classe de systèmes à paramètres répartis non linéaires. Les systèmes considérés sont définis sous forme de systèmes linéaires perturbés. La partie linéaire est définie par un semi-groupe et la partie non linéaire doit satisfaire des hypothèses relativement souples que vérifient divers types d'équations classiques ou des systèmes obtenus par linéarisation. Les résultats établis font appel à la fois à des techniques mathématiques utilisées pour la commandabilité de la partie linéaire et à l'application de théorème du point fixe dans certains espaces fonctionnels.

Keywords: controllability, distributed systems, nonlinear, algorithm.

Abstract. In this paper we give a control algorithm for a class of nonlinear distributed systems. The considered systems contain a linear term defined by a semi-group and a nonlinear one which satisfies some hypothesis verified by numerous classical equations. The established results are based on controllability of the linear term and on the use of fixed point theorem in functional spaces.

1. INTRODUCTION - SYSTEMES CONSIDERES

Beaucoup de systèmes physiques sont de nature distribuée et non linéaire. L'approche classique et simpliste consiste à essayer de linéariser au voisinage d'une solution nominale et de travailler sur le système linéaire obtenu. Mais dans beaucoup de cas cela passe par des simplifications exagérées; d'où la nécessité d'essayer de raisonner sur le modèle non linéaire. Il n'y a pas de théorie valable pour tout système non linéaire, et les développements théoriques et même numériques qui se font traitent, en général, le cas considéré ou une classe de systèmes à laquelle se rattache ce cas.

Comme pour les systèmes linéaires nous pouvons distinguer deux approches apparemment distinctes même si en théorie elles ont beaucoup de points communs:

- la première s'intéresse au modèle mathématique aux dérivées partielles et utilise tout un arsenal d'analyse fonctionnelle
- la deuxième s'appuie sur la représentation par vecteur d'état, plus proche de l'automatisme, traite le problème par l'approche semi-groupe.

Dans ce papier nous utilisons la seconde approche pour étudier la commandabilité d'une classe de systèmes à paramètres répartis non linéaires et donnons une forme explicite de la loi de commande utilisant la notion de pseudo-inverse. Ensuite nous en déduisons deux algorithmes de mise en oeuvre relativement simple. Nous comparons ensuite la convergence des deux algorithmes et donnons un exemple.

Soit A un opérateur sectoriel [Dan Henry, 1981] sur un espace de Banach X et S le semi-groupe engendré par $-A$; et soit a un réel tel que $\text{Re } \sigma(A_1) > \delta > 0$ où $A_1 = A + aI$.

Pour $0 < \alpha < 1$, $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ définit un espace de Banach dense dans X , muni de la norme du graphe:

$$\| \cdot \|_{X^\alpha} = \| A_1^\alpha(\cdot) \|_X$$

et on a:

$$\| S(t) \|_{\mathcal{L}(X, X^\alpha)} \leq C t^{-\alpha} e^{(a-\delta)t} = g_1(t); C = \text{const. } t > 0 \quad (1)$$

Soit alors le système décrit par l'équation différentielle opérationnelle:

$$\begin{cases} \dot{x} + Ax = Nx + Bu, & u(t) \in U \text{ et } 0 \leq t \leq T \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où U est un espace de Banach réflexif et strictement convexe, $B \in \mathcal{L}(U, X)$ et $N: X^\alpha \rightarrow X$ un opérateur non linéaire. Nous nous proposons de résoudre le problème de commandabilité suivant:

pour x_d donné dans X , trouver une commande $u: [0, T[\rightarrow U$ telle que:

- i) (2) admet une solution unique faible
- ii) $x(T) = x_d$

Nous supposons dans toute la suite que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

(H₁) l'opérateur $N: L^r(0, T; X^\alpha) \rightarrow L^s(0, T; X)$

$$x(\cdot) \rightarrow Nx(\cdot) \text{ est bien défini pour } r, s \geq 1$$

et vérifie

$$N(0) = 0$$

$$\| Nx - Ny \| \leq k(\|x\|, \|y\|) \|x - y\|; x, y \in L^r(0, T; X^\alpha)$$

$$\text{où } k: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ vérifie } \lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0} k(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (3)$$

(H₂) il existe $q \geq 1$ tel que:

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \text{ et } g_1 \in L^q(0, T)$$

Remarques.

1- L'hypothèse faite sur A inclut une grande classe de systèmes parmi lesquels ceux définis par des opérateurs bornés ou autoadjoints à domaine dense.

2- L'hypothèse (H₂) nécessite $r \geq s$ et est satisfaite si $q_\alpha < 1$, d'après (1).

3- Il y a une classe importante de systèmes vérifiant les hypothèses ci-dessus. Citons à titre d'exemple:

a) L'équation de Burgers

$$\dot{y} - ky'' = yy' + f; f(t), y(t) \in L^2(0, 1), 0 \leq t \leq T \text{ et } k > 0$$

$$y(t) = 0 \text{ sur } \{0, 1\}$$

$$y(0) = 0$$

les opérateurs A et N correspondants sont:

$$A: D(A) \rightarrow X: \phi \rightarrow -k\phi'' \quad D(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \text{ et } X = L^2(0, 1)$$

$$N: X^{1/2} \rightarrow X: \phi \rightarrow \phi\phi' \quad X^{1/2} = D(A^{1/2}) = H_0^1(0, 1)$$

L'hypothèse (H_1) étant satisfaite avec $r=2, s=1$ et
 $k(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 + \theta_2$.

b) L'équation régissant le flux de neutrons dans un réacteur nucléaire.

$$\dot{y} - ky'' - ay = -by^2 + f; f(t), y(t) \in L^2(0,1), 0 \leq t \leq T, k, a, b > 0$$

$$y(t) = 0 \text{ sur } \{0,1\}$$

$$y(0) = 0$$

avec les mêmes espaces que dans a) et

$$A\phi = -k\phi'' - a\phi, N\phi = -b\phi^2$$

L'hypothèse (H_1) est satisfaite avec $r = 2, s = 1$ et
 $k(\theta_1, \theta_2) = b(\theta_1 + \theta_2)$

c) Equation intervenant en mécanique quantique.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -|y|^p y + u; (x,t) \in]0,1[x[0,T]$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0$$

$$y(x,0) = \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0$$

les espaces et les opérateurs correspondants à cet exemple sont

$$X = L^2(0,1) \times L^2(0,1); X^{1/2} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \text{ et}$$

$$D(A) = (H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)) \times L^2(0,1)$$

$$A(y_1, y_2) = (-y_2, -\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}); N(y_1, y_2) = (0, -|y_1|^p y_1)$$

L'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $r=p+1, s=1$ et

$$k(\theta_1, \theta_2) = (p+1)(\theta_1^p + \theta_2^p)$$

d) Equation linéarisée.

Si l'équation d'évolution est de la forme:

$$\dot{x} = f(x) + Bu; x(0) = 0$$

et $f: X_0 \rightarrow X$ avec X_0 un espace de Banach dense dans X et f un opérateur non linéaire continuellement différentiable au voisinage de 0 et vérifiant $f(0) = 0$; on peut alors se ramener au système (2) en linéarisant f autour de 0.

$$f(x) = f'(0)x + Nx$$

où $N: X_0 \rightarrow X$ vérifie l'hypothèse (H_1) . On obtient alors le système

$$\dot{x} - f'(0)x = Nx + Bu$$

$$x(0) = 0$$

Pour illustrer ce qui précède prenons l'équation de Gordon:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a \sin y + u; (x,t) \in]0,1[x[0,T], a > 0$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0$$

$$y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

en linéarisant $\sin y$ au voisinage de 0, on a: $\sin y = y + f(y)$ et on obtient l'équation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ay = af(y) + u$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0$$

$$y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

2. COMMANDABILITE LINEAIRE

Considérons la partie linéaire de l'équation (2):

$$\begin{cases} \dot{x} + Ax = Bu & ; t \in [0, T] \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

On a

$$x(T) = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau) d\tau$$

Soit alors l'opérateur $G: L^P(0, T; U) \rightarrow X$ défini par: $Gx = x(T)$

G est linéaire borné; posons $V = \text{Im } G$. V est donc l'ensemble des états atteignables depuis l'origine. Le système (4) est faiblement commandable si V est dense dans X ; il est exactement commandable sur $X_0 \subset X$ si $X_0 \subset V$.

Pour x_d dans V , $\{u: Gu = x_d\}$ est une partie non vide, fermée et convexe de $L^P(0, T; U)$ qui est un espace de Banach réflexif et strictement convexe, il existe donc u_* dans $L^P(0, T; U)$ unique de norme minimum vérifiant $Gu_* = x_d$. Posons $u_* = Fx_d$, nous définissons ainsi un opérateur linéaire F appliquant V dans $L^P(0, T; U)$ injectif, vérifiant $GF = \text{Id}_V$ et borné si V est fermé dans X .

Munissons V de la norme:

$$\|x_d\|_V = \|Fx_d\|_{L^p(0,T;U)} \quad (5)$$

alors (V, \| \|_V) est un espace de Banach.

Dans le cas où p=2, U et X sont des espaces de Hilbert, l'opérateur F s'identifie au pseudo-inverse de G: $G^+ = G^*(GG^*)^{-1}$ et (5) devient:

$$\|x_d\|_V = \|(GG^*)^{-1/2}x_d\|_X, x_d \in V$$

C'est dans l'espace V que nous allons étudier la commandabilité du système non linéaire (2).

3. COMMANDES ADMISSIBLES

Nous appelons commande admissible toute commande u dans $L^p(0,T;U)$ pour laquelle l'équation différentielle (2) admet une solution faible unique x dans $L^r(0,T;X^\alpha)$. Nous avons donc, pour tout t dans $[0,T]$:

$$x(t) = \int_0^t S(t-\tau)Nx(\tau)d\tau + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (6)$$

Ecrivons formellement:

$$L_t z = \int_0^t S(t-\tau)z(\tau)d\tau, \text{ où } z: [0,T] \rightarrow X$$

alors on a: $L_T B = G$ et l'égalité (6) devient

$$x = L_{(\cdot)} Nx + L_{(\cdot)} Bu = \phi(x,u) \quad (7)$$

Ainsi l'ensemble des commandes admissibles est l'ensemble des commandes $u \in L^p(0,T;U)$ telles que $\phi(\cdot, u)$ admet un point fixe dans $L^r(0,T;X^\alpha)$. Nous pouvons alors énoncer:

Théorème 1: Les hypothèses (H_1) et (H_2) étant vérifiées, supposons que

$$\|L_{(\cdot)} Bu\|_{L^r(0,T;X^\alpha)} \leq \beta \|u\|_{L^p(0,T;U)} \quad \beta > 0 \quad (8)$$

alors:

- i) il existe $a, m=m(a) > 0$ tels que pour tout u dans la boule $B(0,m)$ de $L^p(0,T;U)$, $\phi(\cdot, u)$ admet un point fixe unique dans la boule $B(0,a)$ de $L^r(0,T;X^\alpha)$ qui est solution faible de (2).
- ii) L'application $f: B(0,m) \rightarrow B(0,a)$ qui à $u \rightarrow f(u) = x$ est lipschitzienne.

Remarque: s'il existe q' tel que: $\frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p} - 1$ et $g_1 \in L^{q'}(0,T)$ alors on peut prendre

$$\beta = \|g_1\|_{L^{q'}(0,T)} \|B\|.$$

Démonstration.

i) On a $\lim_{\theta_1 \rightarrow 0} k(\theta_1, \theta_2) = 0$, ceci entraîne l'existence de $a > 0$ tel que:

$$C_1 = \|g_1\|_{L^q(0,T)} \sup_{\theta_1 \leq a} k(\theta_1, \theta_2) < 1 \quad (9)$$

Et pour $x \in L^r(0,T;X^\alpha)$, $u \in L^p(0,T;U)$ on a d'après (H_1) , (H_2) , (7) et (8): $\phi(x,u) \in L^r(0,T;X^\alpha)$. Soient donc $x, y \in B(0,a) \subset L^r(0,T;X^\alpha)$ et u dans $L^p(0,T;U)$ on a alors:

$$\phi(x,u) - \phi(y,u) = L_{(\cdot)} (Nx - Ny)$$

d'où en utilisant (H_2) , (3) et l'inégalité de Holder

$$\|\phi(x,u) - \phi(y,u)\| \leq \|g_1\|_{L^q(0,T)} k(\|x\|, \|y\|) \|x-y\|$$

soit d'après (9):

$$\|\phi(x,u) - \phi(y,u)\| \leq C_1 \|x-y\| \quad (10)$$

Par conséquent, $\phi(\cdot, u): B(0,a) \rightarrow L^r(0,T;X^\alpha)$ est contractante.

Par ailleurs, en utilisant (3), (8) et $N0 = 0$ nous obtenons:

$$\|\phi(x,u)\| \leq \|g_1\|_{L^q(0,T)} k(\|x\|, 0) \|x\| + \beta \|u\|$$

où $x \in L^r(0,T;X^\alpha)$ et $u \in L^p(0,T;U)$

D'où, $x \in B(0,a)$ implique $\phi(x,u) \in B(0,a)$ si on a:

$$\|u\| \leq \frac{a}{\beta} (1 - \|g_1\|_{L^q(0,T)} \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0)) = m \quad (11)$$

Donc si u vérifie (11), $\phi(\cdot, u)$ admet un point fixe dans la boule $B(0,a)$ de $L^r(0,T;X^\alpha)$.

ii) Pour $u, v \in B(0,m)$ on a:

$$f(u) - f(v) = (\phi(f(u), u) - \phi(f(v), u)) + (\phi(f(v), u) - \phi(f(v), v))$$

d'où en utilisant (7), (8) et (10)

$$\|f(u) - f(v)\| \leq C_1 \|f(u) - f(v)\| + \beta \|u - v\|$$

soit encore

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \frac{\beta}{1-C_1} \|u-v\| \quad (12)$$

Le théorème précédent va nous permettre de trouver des conditions sur x_d de X pour qu'il soit atteignable par une commande $u \in B(0,m) \subset L^p(0,T;U)$.

4. COMMANDABILITE DU SYSTEME NON LINEAIRE

Nous supposons que l'état désiré x_d est dans V et nous voulons déterminer une commande u dans une boule $B(0,m)$ de $L^p(0,T;U)$ telle que:

- i) L'équation (2) admet une solution faible unique x dans $L^r(0,T;X^a)$
- ii) $x(T) = x_d$

Il s'agit donc de trouver une commande $u \in B(0,m)$ vérifiant:

$$f(u)(T) = L_T Nf(u) + Gu = x_d$$

ceci nécessite a priori que $L_T Nf(u) \in V$; une telle condition est satisfaite si $S(t) \in \mathcal{L}(X,V)$, $t > 0$. En outre la commande u sera solution du problème si

$$u = F(x_d - L_T Nf(u)) = \psi(x_d, u) \quad (13)$$

Ainsi donc nous nous ramenons à la recherche des états $x_d \in V$ pour lesquels $\psi(x_d, \cdot)$ admet un point fixe dans $B(0,m)$.

Théorème 2 : En plus des hypothèses du théorème 1, supposons que:

$$(H_3) \quad \|\mathcal{S}(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X,V)} = g_2 \in L^d(0,T) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{s} = 1$$

alors:

- i) Il existe $a > 0, \rho = \rho(a) > 0$ tels que tout état $x_d \in B(0,\rho) \subset V$ est atteignable par une commande $u_* \in B(0,m)$
- ii) L'application $h: B(0,\rho) \subset V \rightarrow L^p(0,T;U)$ qui à x_d associe $h(x_d) = u_*$ est lipschitzienne.

Démonstration.

i) On a $\lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0} k(\theta_1, \theta_2) = 0$ implique qu'il existe $a > 0$ tel que:

$$C_2 = C_2(a) = (\beta \|g_2\|_{L^d(0,T)} + \|g_1\|_{L^q(0,T)}) \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a} k(\theta_1, \theta_2) < 1 \quad (14)$$

Posons

$$C_1 = \|g_1\|_{L^q(0,T)} \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a} k(\theta_1, \theta_2) < C_2 < 1$$

et

$$m = \frac{a}{\beta} (1 - \|g_1\|_{L^q(0,T)} \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0)) > 0 \quad (15)$$

D'après la démonstration du théorème 1, toute commande dans $B(0,m)$ est admissible et l'application $f: B(0,m) \rightarrow B(0,a)$ est lipschitzienne de rapport $\beta/(1-C_1)$. Soit $x_d \in V$, d'après (13):

$$\psi(x_d, u) - \psi(x_d, v) = FL_T(Nf(v) - Nf(u))$$

d'où en passant aux normes et en utilisant (H_3) et l'inégalité de Holder on obtient:

$$\|\psi(x_d, u) - \psi(x_d, v)\|_{L^p(0,T;U)} = \|L_T(Nf(v) - Nf(u))\|_V$$

$$\leq \|g_2\|_{L^d(0,T)} \|Nf(u) - Nf(v)\|_{L^s(0,T;X)}$$

En remarquant que $f(u), f(v) \in B(0,a) \subset L^r(0,T;X^a)$, (3) donne:

$$\|\psi(x_d, u) - \psi(x_d, v)\| \leq \|g_2\|_{L^d(0,T)} \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a} k(\theta_1, \theta_2) \|f(u) - f(v)\|$$

or f est lipschitzienne de rapport $\beta/(1-C_1) = \beta'$ d'où

$$\|\psi(x_d, u) - \psi(x_d, v)\| \leq \beta' \|g_2\|_{L^d(0,T)} \sup_{\theta_1, \theta_2 \leq a} k(\theta_1, \theta_2) \|u - v\| = C_3 \|u - v\| \quad (16)$$

et (14) entraîne $C_3 < 1$; par suite $\psi(x_d, \cdot): B(0,m) \rightarrow L^p(0,T;U)$ est contractante. D'autre part pour $u \in B(0,m)$ on a $f(u) \in B(0,a)$ et

$$\begin{aligned} \|\psi(x_d, u)\| &= \|x_d - L_T Nf(u)\|_V \leq \|x_d\| + \|L_T Nf(u)\| \\ &\leq \|x_d\| + \|g_2\|_{L^d(0,T)} k(\|f(u)\|, 0) \|f(u)\| \end{aligned}$$

soit encore:

$$\|\psi(x_d, u)\| \leq \|x_d\| + \|g_2\|_{L^d(0,T)} \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0) a$$

d'où $u \in B(0,m)$ entraîne $\psi(x_d, u) \in B(0,m)$ si on a:

$$\|x_d\| \leq m - \|g_2\|_{L^d(0,T)} a \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0)$$

soit, en considérant (15), on obtient:

$$\|x_d\| \leq \frac{a}{\beta} (1 - (\|g_1\|_{L^q(0,T)} + \beta \|g_2\|_{L^d(0,T)}) \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0)) = \rho \quad (17)$$

Par conséquent si $x_d \in B(0,\rho) \subset V$, $\psi(x_d, \cdot)$ admet un point fixe unique u_* dans $B(0,m)$ de $L^p(0,T;U)$ qui est solution du problème de commandabilité noté $h(x_d)$.

ii) Pour x_d, y_d dans $B(0,\rho)$, d'après (13):

$$\begin{aligned} h(x_d) - h(y_d) &= \psi(x_d, h(x_d)) - \psi(y_d, h(y_d)) \\ &= (\psi(x_d, h(x_d)) - \psi(x_d, h(y_d))) + \\ &\quad (\psi(x_d, h(y_d)) - \psi(y_d, h(y_d))) \end{aligned}$$

$$\psi(x_d, h(y_d)) - \psi(y_d, h(y_d))$$

et on a d'après (13) et (16)

$$\begin{aligned} \|\psi(x_d, h(x_d)) - \psi(x_d, h(y_d))\| &\leq C_3 \|h(x_d) - h(y_d)\| \\ \|\psi(x_d, h(y_d)) - \psi(y_d, h(y_d))\| &\leq \|x_d - y_d\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|h(x_d) - h(y_d)\| \leq \frac{1}{1-C_3} \|x_d - y_d\|$$

Remarques:

1) Du théorème précédent on peut déduire une suite de commandes qui converge vers u_* et qui sera détaillée dans le § 5.

2) La boule $B(0, \rho)$ peut être élargie; en effet:

posons

$$\gamma = \|g_1\|_{L^q(0,T)} + \beta \|g_2\|_{L^d(0,T)}$$

alors $I = \{a > 0, C_2 = \gamma \sup_{\theta_1 < a} k(\theta_1, \theta_2) < 1\}$ est une partie non vide de \mathbb{R}^+ , soit

$$\rho_T = \sup \rho(I) \text{ où } \rho \text{ est défini par (17)}$$

et donc tout état $x_d \in V$ vérifiant $\|x_d\|_V < \rho_T$ est atteignable à l'instant T .

3) Le but de ii) est de montrer que $h: B(0, \rho) \subset V \rightarrow L^p(0, T; U)$ est continue, mais il est préférable d'avoir $h: (B(0, \rho), \|\cdot\|_X) \rightarrow L^p(0, T; U)$ continue; ceci est satisfait si V est fermé dans X .

4) La commande u_* n'est pas nécessairement unique dans $B(0, m)$. L'équation en u :

$$f(u)(T) = Gu + L_T N f(u) = x_d$$

peut avoir d'autres solutions que u_* .

5. ALGORITHMES DE COMMANDES

Nous nous plaçons dans le cas où $p=2$ et X, U sont des espaces de Hilbert et supposons que le système linéaire (4) est faiblement commandable.

Alors pour tout $x_d \in V$:

$$(F x_d)(t) = (G^+ x_d)(t) = B^* S^*(T-t) \left[\int_0^T S(\tau) B B^* S^*(\tau) d\tau \right]^{-1} x_d$$

Nous allons déduire du théorème 2 deux suites qui convergent vers une solution du problème de commandabilité.

5.1 Algorithme 1

Supposons que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, soit $x_d \in V$ tel que $\|x_d\|_V < \rho_T$ (remarque 2) et soit $u_* = h(x_d)$. D'après les propriétés du point fixe, la suite de commandes

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \psi(x_d, u_n) = G^+(x_d - L_T N f(u_n)) \end{cases} \quad (18)$$

converge dans $L^2(0, T; U)$ vers u_* et vérifie:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq C_3^n \|u_1\| \quad (C_3 \text{ donné par (16)}) \quad (19)$$

posons $x_n = f(u_n)$ et

$$r_{n+1} = x_d - L_T N x_n, \quad n \geq 0 \quad (20)$$

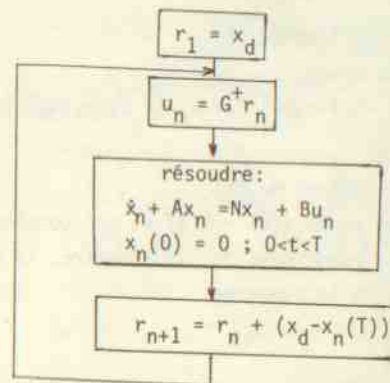
on a d'après (18) et (20)

$$x_n(T) = L_T N x_n + G u_n = L_T N x_n + r_n = x_d - r_{n+1} + r_n$$

d'où

$$r_{n+1} = (x_d - x_n(T)) + r_n \quad (21)$$

par suite, en remarquant dans (20) que $r_1 = x_d$, la mise en oeuvre de la loi de commande se fera suivant le schéma:



Nous détaillerons dans le § 6 l'algorithme ci-dessus.

Par ailleurs, en remarquant que $G^+(x_d - x_n(T)) = u_{n+1} - u_n$ et en utilisant (19), nous obtenons:

$$\|x_n(T) - x_d\|_V \leq C_3^n \|x_d\|_V \quad (23)$$

ceci entraîne que la suite de commandes (u_n) amène de proche en proche le système (2) de 0 à x_d .

On peut donner une structure de boucle fermée aux commandes u_n . En effet montrons que, pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq t < T$:

$$u_n(t) = B^* S^*(T-t) \left[\int_t^T S(T-\tau) B B^* S^*(T-\tau) d\tau \right]^{-1} (r_n - S(T-t) x_n(t) + \int_0^t S(T-\tau) N x_n(\tau) d\tau) \quad (24)$$

soit encore:

$$r_n - S(T-t)x_n(t) + \int_0^t S(T-\tau)Nx_n(\tau)d\tau = \int_0^T S(T-\tau)BB^*S^*(T-\tau)d\tau \cdot \left[\int_0^T S(T-\tau)BB^*S^*(T-\tau)d\tau \right]^{-1} r_n \quad (25)$$

notons a(t) et b(t) respectivement les membres de droite et de gauche de (25), il est facile de voir que:

$$a(0) = b(0) = r_n$$

$$\dot{a}(t) = -S(T-t) \dot{x}_n(t) - S(T-t) Ax_n(t) + S(T-t) Nx_n(t); t > 0$$

et d'après (22)

$$\dot{a}(t) = -S(T-t) Bu_n(t)$$

d'autre part nous avons:

$$b(t) = -S(T-t)BB^*S^*(T-t) \left[\int_0^T S(T-\tau)BB^*S^*(T-\tau)d\tau \right]^{-1} r_n$$

soit d'après (22)

$$b(t) = -S(T-t) Bu_n(t)$$

et par suite nous avons a(t) = b(t) et par conséquent l'égalité (24). On retrouve donc, comme dans le cas linéaire, la possibilité de choisir la structure de la commande.

5.2 Algorithme 2

Nous allons comparer l'algorithme précédent à l'algorithme proposé par [Magnusson, 1982]. Nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Proposition 1

Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 2, soit x_d dans V tel que $\|x_d\| < \rho_T$, alors les suites (v_n) et (z_n) définies par:

$$z_0 = 0$$

$$v_n = G^+(x_d - L_T N z_n) \quad (26)$$

$$z_{n+1} = \phi(z_n, v_n) = L(\cdot) N z_n + L(\cdot) B v_n \quad (27)$$

vérifient:

$$v_n \rightarrow u_* \text{ dans } L^2(0, T; U)$$

$$z_n \rightarrow x_* \text{ dans } L^r(0, T; X^\alpha)$$

où $u_* = h(x_d)$ et $x_* = f(u_*)$ est l'état du système (2) commandé par u_* .

Démonstration.

Soient a, m, ρ donnés respectivement par (14), (15), (17) alors $z_0 = 0 \in B(0, a) \subset L^r(0, T; X^\alpha)$ et $v_0 = G^+ x_d \in B(0, m) \subset L^2(0, T; U)$ supposons que $(z_n, v_n) \in B(0, a) \times B(0, m)$ alors d'après (26) et (27), (3) et (8)

$$\|z_{n+1}\| \leq \|g_1\|_{L^q(0, T)} k(\|z_n\|, 0) \|z_n\| + \beta \|u\| \leq \|g_1\|_{L^q(0, T)} \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0) a + \beta m = a$$

$$\|v_{n+1}\| \leq \|x_d\|_V + \|L_T N z_{n+1}\|_V \leq \|x_d\|_V + \|g_2\|_{L^d(0, T)} k(\|z_{n+1}\|, 0) \|z_{n+1}\| \leq \|x_d\|_V + \|g_2\|_{L^d(0, T)} \sup_{\theta \leq a} k(\theta, 0) a \leq m$$

donc pour tout $n \geq 0$, $(v_n, z_n) \in B(0, m) \times B(0, a)$.

Par ailleurs d'après (27):

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \phi(z_n, v_n) - \phi(z_{n-1}, v_{n-1}) \\ &= (\phi(z_n, v_n) - \phi(z_{n-1}, v_n)) + (\phi(z_{n-1}, v_n) - \phi(z_{n-1}, v_{n-1})) \\ &= (\phi(z_n, v_n) - \phi(z_{n-1}, v_n)) + L(\cdot)^B (v_n - v_{n-1}) \end{aligned}$$

d'où, en utilisant (10) et (8)

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq C_1 \|z_n - z_{n-1}\| + \beta \|v_n - v_{n-1}\|$$

et en considérant (26) on obtient:

$$\|v_n - v_{n-1}\| \leq \|g_2\|_{L^d(0, T)} \sup_{\theta_1 \leq a} k(\theta_1, \theta_2) \|z_n - z_{n-1}\|$$

d'où d'après (14) et (10)

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq C_2 \|z_n - z_{n-1}\|, \quad C_2 < 1 \quad (28)$$

Ainsi la suite (z_n) est de Cauchy dans la boule $B(0, a)$, elle converge donc vers $z \in B(0, a)$ et par suite (v_n) converge vers $v \in B(0, m)$ et on a, par passage à la limite dans (26) et (27):

$$z = \phi(z, v)$$

$$v = G^+(x_d - L_T N z)$$

z est point fixe de $\phi(\cdot, v)$ donc $z = f(v)$, d'où

$$v = G^+(x_d - L_T N f(v)) = \psi(x_d, v), \quad v \in B(0, m)$$

l'unicité du point fixe de $\psi(x_d, \cdot)$ et le théorème 2 impliquent:

$$v = u_* \text{ et } z = f(v) = x_*$$

Remarque:

En remplaçant (26) dans (27) et en faisant $t=T$ on a $z_{n+1}(T) = x_d$, mais les fonctions (z_n) ne sont pas solutions de (2).

Proposition 2

Supposons que les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées, et soit, pour $n \geq 1$

$$y_n = f(v_{n-1}) \quad (29)$$

l'état du système commandé par v_{n-1} , on a alors:

$$\|y_n(T) - x_d\|_V \leq C_3(C_2)^{n-1} \|x_d\|_V \quad (30)$$

où C_2 et C_3 sont donnés en (14) et (16).

Démonstration.

Soient a, m, C_1 définis comme précédemment. Comme (v_n) est incluse dans $B(0, m)$, (29) a un sens et on a:

$$y_n = \phi(y_n, v_{n-1}) \in B(0, a) \quad (31)$$

d'où, d'après (7) et puis (26)

$$y_n(T) = L_T N y_n + G v_{n-1} = L_T N y_n + x_d - L_T N z_{n-1}$$

soit, $y_n(T) - x_d = L_T(N y_n - N z_{n-1})$

et d'après (3) et (H_3) on a:

$$\|y_n(T) - x_d\|_V \leq \|g_2\| \|L^d(0, T)\| \sup_{\theta_1 \leq \theta_2} k(\theta_1, \theta_2) \|y_n - z_{n-1}\| \quad (32)$$

d'autre part en utilisant (27), (31) et (10)

$$\|y_n - z_n\| \leq C_1 \|y_n - z_{n-1}\|$$

$$\begin{aligned} \|y_n - z_{n-1}\| &\leq \|y_n - z_n\| + \|z_n - z_{n-1}\| \\ &\leq C_1 \|y_n - z_{n-1}\| + \|z_n - z_{n-1}\|. \end{aligned}$$

d'où

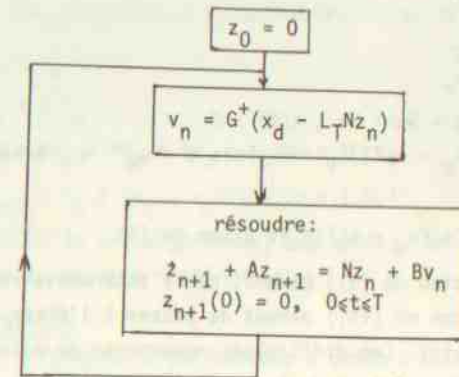
$$\|y_n - z_{n-1}\| \leq \frac{1}{1 - C_1} \|z_n - z_{n-1}\| \quad (33)$$

et d'après (28) et puis (26), (27) et (8):

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leq C_2^{n-1} \|z_1\| \leq C_2^{n-1} \beta \|x_d\|_V \quad (34)$$

et finalement en utilisant (34), (33), (32) et (16) on a l'égalité (30).

On peut représenter l'algorithme (26), (27) par:



5.3 Comparaison des suites (u_n) et (v_n)

a) Convergence.

Il s'agit de savoir laquelle des suites (u_n) et (v_n) amène le plus rapidement l'état du système (2) de 0 à x_d , autrement dit laquelle des suites $\|x_n(T) - x_d\|$ et $\|y_n(T) - x_d\|$ converge le plus rapidement vers 0.

Si nous considérons alors les majorations (23) et (30)

$$\|x_n(T) - x_d\|_V \leq C_3^n \|x_d\|_V$$

$$\|y_n(T) - x_d\|_V \leq C_3 C_2^{n-1} \|x_d\|_V$$

En utilisant (14) et (16) on a:

$$C_2 - C_3 = C_3(1 - C_2) \|g_1\| \|L^q(0, T)\| / \beta > 0$$

d'où $C_2 > C_3$ et par conséquent la suite de commandes (u_n) amène plus vite le système à l'état désiré.

b) Test d'arrêt.

Nous avons vu que l'algorithme 1 peut être représenté par (22). Soit $\epsilon > 0$, alors d'après la majoration (23), il existe $M > 0$ tel que

$$\|x_M(T) - x_d\|_V < \epsilon$$

et donc la commande u_M correspondante amène, à ϵ près, l'état du système (2) de 0 à x_d . Nous pouvons alors introduire dans l'algorithme (22) le test suivant:

- (i) $r = x_d$
 $u = G^+ r$
(ii) $\dot{x} + Ax = Nx + Bu$, $x(0) = 0$
 si $\|x_d - x(T)\|_V < \epsilon$ alors $u = u_M \rightarrow$ arrêt
 sinon
(iii) $r = r + (x_d - x(T))$ et aller en (i)

Ainsi la résolution de (ii) permet, par l'intermédiaire du test, d'arrêter l'algorithme et (iii) permet de passer à l'étape suivante lorsque le test est négatif. Les difficultés numériques se situent au niveau du calcul de u dans (i) et de la résolution de (ii).

Considérons maintenant la suite (v_n) donnée par (26) et (27). On peut la schématiser par:

$$(j) \quad z_0 = 0$$

$$z_n(t) = \int_0^t S(t-\tau) N z_{n-1}(\tau) d\tau + \int_0^t S(t-s) B G^+ \left\{ x_d - \int_0^T S(T-\tau) N z_{n-1}(\tau) d\tau \right\} (s) ds$$

$$(jj) \quad v_n = G^+ \left(x_d - \int_0^T S(T-\tau) N z_n(\tau) d\tau \right)$$

et pour avoir le test d'arrêt: $\|y_n(T) - x_d\| \leq \epsilon$ (y_n donné par (29)) il faut résoudre l'équation:

$$(jjj) \quad \dot{y}_n + A y_n = N y_n + B v_{n-1}, y_n(0) = 0$$

ce qui ajoute une difficulté supplémentaire pour l'implémentation de l'algorithme 2. Remarquons que l'algorithme 1 est récursif dans V alors que l'algorithme 2 est récursif dans un espace de fonctions. Dans le paragraphe suivant nous allons développer l'aspect numérique pour l'implémentation de l'algorithme 1.

6. ASPECT NUMERIQUE - EXEMPLE

Soit x_d dans V tel que $\|x_d\|_V < \rho_T$ et $\epsilon > 0$, et soit M le plus petit entier vérifiant $\|x_d - x_M(T)\| \leq \epsilon$. Considérons la suite (22) avec $n \leq M$

$$r_1 = x_d$$

$$u_n = G^+ r_n$$

$$\dot{x}_n + A x_n = N x_n + B u_n; x_n(0) = 0$$

$$r_{n+1} = r_n + (x_d - x_n(T)); n = 1, M-1$$

Pour l'implémentation de cet algorithme, une difficulté numérique apparaît dans la résolution du système différentiel.

6.1 Discrétisation

Supposons qu'on dispose d'une méthode d'ordre p pour résoudre:

$$\dot{x} + Ax = Nx + Bu$$

$$x(0) = 0, 0 \leq t \leq T$$

autrement dit si $t_0 = 0, t_{i+1} = t_i + h, t_k = T$ est une subdivision de l'intervalle $[0, T]$ et $x_i^h, i=1, k$, les valeurs approchées de x aux points t_i on a:

$$\|x(t_i) - x_i^h\| \leq K h^p \quad (35)$$

où K est une constante dépendant de u .

La procédure de résolution devient alors:

$$r_1^h = x_d$$

$$u_n^h = G^+ r_n^h \quad (36)$$

$$\dot{x}_n^h + A x_n^h = N x_n^h + B u_n^h; x_n^h(0) = 0 \quad (37)$$

$$r_{n+1}^h = r_n^h + (x_d - x_{k,n}^h); 1 < n < M-1 \quad (38)$$

où $x_{k,n}^h$ est la valeur approchée de $x_n^h(T)$

Nous pouvons alors montrer

Proposition.

Pour tout $n \leq M$,

$$\|u_n - u_n^h\|_{L^2(0, T; U)} \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$$

Démonstration.

D'après (22), (38) et (36), nous avons:

$$r_{n+1} - r_{n+1}^h = r_n - r_n^h + x_{k,n}^h - x_n(T)$$

et $u_{n+1} - u_{n+1}^h = G^+(r_{n+1} - r_{n+1}^h)$

d'où

$$u_{n+1} - u_{n+1}^h = u_n - u_n^h + G^+(x_{k,n}^h - x_n(T))$$

soit

$$\|u_{n+1} - u_{n+1}^h\| \leq \|u_n - u_n^h\| + \|x_n(T) - x_{k,n}^h\| \quad (39)$$

Par ailleurs, nous avons d'après (35)

$$\|x_n^h(T) - x_{k,n}^h\| \leq K_n h^p ; K_n > 0 \quad (40)$$

et

$$\|x_n^h(T) - x_n(T)\| \leq K'_n \|u_n^h - u_n\| ; K'_n > 0 \quad (41)$$

d'où en utilisant (39), (40) et (41)

$$\|u_{n+1} - u_{n+1}^h\| \leq (1+K'_n) \|u_n - u_n^h\| + K_n h^p, n \leq M-1 \quad (42)$$

pour n=1 on a $u_1 = u_1^h = G^+ x_d$ et en utilisant (42), on montre par récurrence sur n, n=1,M, que:

$$\|u_n - u_n^h\| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

et on a, en plus:

$$\|u_n - u_n^h\| \leq \delta_n h^p$$

où $\delta_n > 0$ dépend de K_n et K'_n et vérifie:

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_M \text{ et exprime l'accumulation de}$$

l'erreur provenant du passage d'une étape à l'autre.

Remarquons que le résultat peut avoir lieu si on suppose, au lieu de (35), que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|x(t_i) - x_i^h\| = 0$$

Mise en oeuvre de l'algorithme 1:

i) $r = x_d$

ii) $u = G^+ r$

iii) résolution de

$$\dot{x} + Ax = Nx + Bu ; x(0) = 0 ; h = T/k$$

soit x^k la valeur approchée de $x(T)$,

test: si $\|x^k - x_d\| \leq \epsilon$ s'arrêter ou aller en v)

sinon

iv) $r = r + x_d - x^k$ et aller en ii)

v) appliquer le feedback (24):

$$u = B^* S^*(T-t) \left(\int_t^T S(T-\tau) B B^* S^*(T-\tau) d\tau \right)^{-1} (r - S(T-t)x(t) + \int_0^t S(T-\tau) N x(\tau) d\tau)$$

Remarques.

1- i), ii), iii) et iv) constituent une phase de préparation pour le calcul de la commande.

2- L'algorithme précédent s'adapte aux systèmes non linéaires localisés (voir exemple ci-après). Dans le cas de systèmes à paramètres répartis, il faut approcher l'opérateur G^+ par un opérateur en dimension finie (dans l'étape iii)) et projeter dans (35) les x_i^h sur un sous-espace de dimension finie.

6.2 Exemple

Soit l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \dot{x} + x^2 = u, t \in [0,1] \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

et soit

$$z_d = \begin{bmatrix} x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ceci peut se mettre sous la forme du système

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Nz + Bu \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{où: } z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z_1^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a appliqué l'algorithme précédent avec $\epsilon = 10^{-3}$ et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 pour la résolution numérique de l'équation iii). Le pas de discrétisation choisi est $h = 10^{-2}$. Le nombre d'itérations effectuées est $M = 6$. Nous avons obtenu les résultats suivants:

$$((x(1) - x_d)^2 + (\dot{x}(1) - \dot{x}_d)^2)^{1/2} = 0,17 \cdot 10^{-3}$$

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
x_i^h	0.08	0.3	0.6	0.97	1.36	1.72	2.01	2.18	2.19	1.99
\dot{x}_i^h	1.52	2.68	3.48	3.87	3.83	3.33	2.36	0.94	-0.86	-2.99

$$\|u\|_{L^2(0,1)}^2 = 10.32$$

CONCLUSION

Dans cet article nous avons développé un algorithme de commande pour une classe de systèmes distribués non linéaires. Cependant, et comme dans les problèmes non linéaires en général, il faut signaler le caractère local des résultats que nous avons établis et qui découle des conditions de validité du théorème de l'application contractante.

Par ailleurs, cet algorithme opère dans des espaces de dimension infinie; et dans un but de simulation numérique, les travaux en cours visent à l'approcher par un algorithme opérant dans des espaces de dimension finie. Cela peut être le cas en définissant par exemple une sous classe de systèmes non linéaires pour lesquels la méthode de Faedo-Galerkin est valable.

Remerciements

Les auteurs remercient le Professeur A.J.PRITCHARD pour les échanges fructueux qu'ils ont eus tout au long de ce travail.

Annexe

OPERATEURS SECTORIELS

Soient X un espace de Banach et A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X et $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A .

Définition.

On dit que A est sectoriel, s'il existe $\phi \in]0, \pi/2[$, $M \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que:

$$S = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\text{Arg}(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a \} \subset \rho(A)$$

et

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| < M / |\lambda - a| \quad \text{pour tout } \lambda \in S$$

Rappelons un résultat de caractérisation important:

" A est un opérateur sectoriel si et seulement si $-A$ engendre un semi-groupe analytique $S(t)$, $t \geq 0$ sur X ".

Par ailleurs, si A est un opérateur sectoriel et si $\text{Re } \sigma(A) > 0$, alors on peut définir pour $\alpha > 0$:

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt$$

$A^{-\alpha}$ ainsi défini est un opérateur borné et injectif; on définit alors

$$A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1} \quad \text{avec } D(A^{\alpha}) = \text{Im } (A^{-\alpha})$$

REFERENCES

- [Amouroux, 1983] M. Amouroux, M. Courdresses, A. El jai
Comparison of two optimal feedback controls for parabolic systems.
Optimal Control, Application & Methods. (A paraître).
- [Carmichael, 1982] N. Carmichael, A.J.Pritchard, M.D.Quinn
State and parameter estimation for nonlinear systems. Applied Mathematics &
Optimization. 9. 133-161. (1982).
- [Dan Henry, 1981] Dan Henry. Geometric theory of semilinear parabolic
systems. Lecture Notes in Mathematics. 840.
- [Goong Chen, 1981] Goong Chen, Wendell H. Mills JR, Giovanni Crosta
Exact controllability theorems and numerical simulations for some nonlinear
differential equations. SIAM J. on Control and Optimization. Vol. 19. N° 6.
Nov. 1981.
- [Magnusson, 1980] K. Magnusson, A.J.Pritchard, M.D.Quinn
The application of fixed point theorems to global nonlinear controllability
problems. University of Warwick. CTC report N° 87. 1980.
- [Lions, 1969] J.L.Lions. Quelques methodes de résolution de problèmes aux
limites non linéaires. Dunod. 1969.
- [Michael Reed] Abstract nonlinear wave equations. Lecture Notes in Mathema-
tics. 507.

DECENTRALIZED MEMORYLESS STABILIZATION OF LINEAR LARGE-SCALE INTERCONNECTED SYSTEMS WITH TIME DELAYS

A. HMAMED and L. RADOUANE

L.E.E.S.A. Faculté des Sciences
B.P. 1014 - Rabat
Marocco

ABSTRACT

The problem of decentralized stabilization of large-scale intercon-
nected systems with delays using local feedback controllers is investigated. By
employing the aggregation technique based on the Lyapunov vector function,
sufficient degree of stability for each isolated subsystem are determined
in order to guarantee the overall system stability. This sufficient condition
presents a more general decentralized stability test.

INTRODUCTION

Recently, there are a number of research works on the stability and
stabilization of memoryless large-scale systems - see for example, /1/-/12/.
A more complex but practically important problem arises when the systems
have some memory. In /13/, /14/ the stability for dissipative systems was
considered. In /13/ it was found that the delays cause no particular diffi-
culties in determining the stability of a specific type of large-scale sys-
tems with delays in interconnections. In /14/, a stability test is proposed
for a more general class of large scale delayed systems. Related to the pro-
blem of the stabilization of systems with memory, the optimal control of
linear systems with quadratic cost /15/-/17/ yields optimal feedback gains
which are solution of a set of coupled partial differential equations with
great computational cost /17/. In the present paper, we consider the problem
of stabilization of a more general class of systems with delays and show