5

LOGIKA

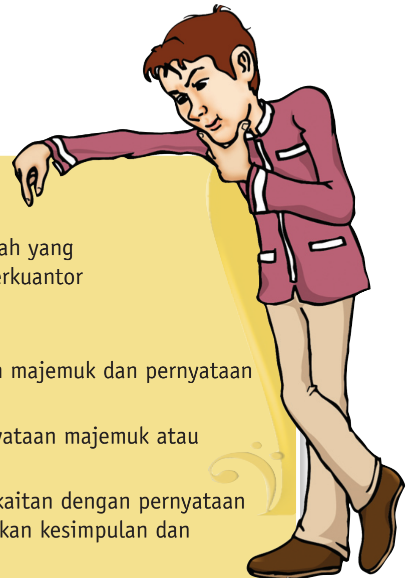
"Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita (pernyataan) maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaanya, yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu".
(QS. Al Hujuraat ayat 6)

Sumber: Maths Quest

Berikut ini adalah provokasi yang dilakukan oleh negara A untuk membangun opini masyarakat dunia, guna mendapatkan dukungan untuk penyerangan ke negara B.

"Negara yang memiliki senjata nuklir membahayakan perdamaian dunia. Negara B memiliki senjata nuklir. Jadi, negara B membahayakan perdamaian dunia".

Syarat apakah yang harus dipenuhi agar diperoleh kesimpulan yang sahih atau benar?



Standar Kompetensi

Menggunakan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor

Kompetensi Dasar

1. Menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor.
2. Merumuskan pernyataan yang setara dengan pernyataan majemuk atau pernyataan berkuantor yang diberikan.
3. Menggunakan prinsip logika matematika yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor dalam penarikan kesimpulan dan pemecahan masalah.

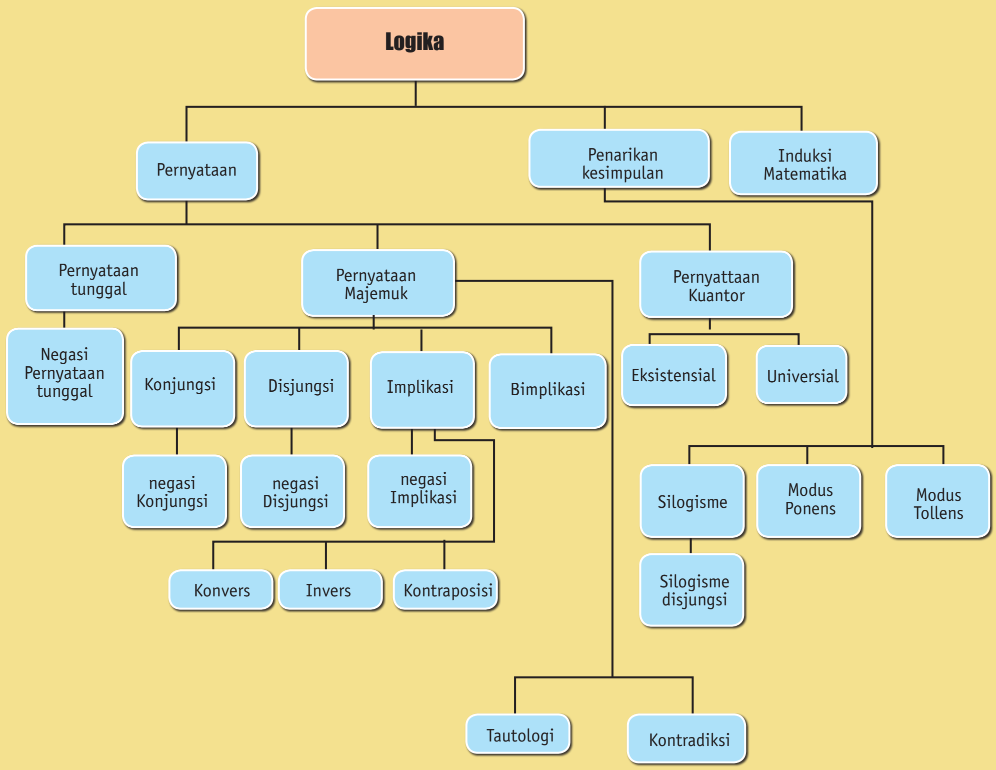
Indikator

Setelah mempelajari pokok bahasan dalam bab ini, kamu diharapkanmampu:

1. Menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan berkuantor.
2. Menentukan ingkaran dari suatu pernyataan berkuantor.
3. Menentukan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk.
4. Menentukan ingkaran dari suatu pernyataan majemuk.
5. Memeriksa kesetaraan antara dua pernyataan majemuk atau pernyataan berkuantor.
6. Membuktikan kesetaraan antara dua pernyataan majemuk atau pernyataan berkuantor.
7. Membuat pernyataan yang setara dengan pernyataan majemuk atau pernyataan berkuantor.
8. Memeriksa keabsahan penarikan kesimpulan menggunakan prinsip logika matematika.
9. Menentukan kesimpulan dari beberapa premis yang diberikan.

“Manusialah yang membuat sejarahnya sendiri sesuai dengan izin Allah. Dialah yang menuliskan sejarahnya dengan perbuatan-perbuatan yang baik atau jelek ” (Dr. ‘Aidh al-Qarni)

Peta Konsep



Kata Kunci

Pernyataan	Disjungsi	Tautologi	Silogisme
Bukan pernyataan	Implikasi	Kontradiksi	Modus ponens
Konjungsi	Biimplikasi	Kuantor	Modus tollens
Invers	Konvers	Kontraposisi	
Induksi matematika			

SEBELUM mengkaji materi Logika, marilah kita baca dan kaji bersama Al-Qur'an Surah Al Hujuraat: 6 berikut ini.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن جَآءَكُمۡ فَاسِقُۢ بِنَبَإٖ فَتَبَيَّنُوٓاْ

أَن تُصِيبُواْ قَوۡمَۢا بِجَهَٰلَةٖ فَتُصۡبِحُواْ عَلَىٰ مَا فَعَلۡتُمۡ نَٰدِمِينَ ٦

Artinya:

> *"Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita (pernyataan) maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaanya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu".*

Dalam bab ini, kita akan mempelajari tentang ilmu logika (*manthiq*). Ilmu logika adalah ilmu yang mempelajari tata cara berpikir. Tujuan dari mempelajari ilmu logika matematika ini adalah agar kita lebih berpikir logis, cermat, dan teliti dalam memutuskan segala sesuatu. Perhatikan ilustrasi berikut ini!

Premis 1: Mempelajari fisika dengan tekun bisa raih juara olimpiade fisika
Premis 2: Ali belajar fisika dengan tekun

Dapatkah kamu menarik kesimpulan dari kedua pernyataan (premis) ini?

"Di antara ciri orang mukmin adalah berpendirian teguh seteguh Gunung Uhud, pantang menyerah, tidak kenal mundur, dan punya keinginan yang kuat"

(Dr. 'Aidh al-Qarni)

Kuis Apersepsi

Dalam penjelajahan kali ini kita akan mengarungi samudra "*Logika*". Untuk mengukur apakah diri kita ini termasuk orang yang sudah siap atau tidak, kita bisa menguji diri sendiri lewat kuis apersepsi ini. Jika kita bisa menjawab seluruhnya, berarti kita sudah siap mengikuti penjelajahan matematika ini. Jika tidak, maka kita harus mengulangi sampai benar-benar bisa. Sudah siapkah kalian?

Tentukan benar atau salah dari sejumlah pernyataan berikut ini!

1. Mekah ibu kota Arab Saudi
2. Persamaan $x^2 - x + 15 = 0$ memiliki akar-akar riil
3. $1 + 3 + 5 + 6 = 42$
4. Paris ibu kota Jerman
5. 2 adalah bilangan prima terkecil
6. Bilangan 9321 habis dibagi 3
7. $\sqrt{3}$ adalah bilangan rasional
8. $2^3 \times 2^5$ senilai dengan 2^8
9. Grafik fungsi kuadrat dengan $D < 0$ memotong sumbu X di dua tempat
10. Faktor dari $(4x^2 - 9)$ adalah $(2x - 3)(2x + 3)$

A. Sejarah Logika (*Manthiq*)

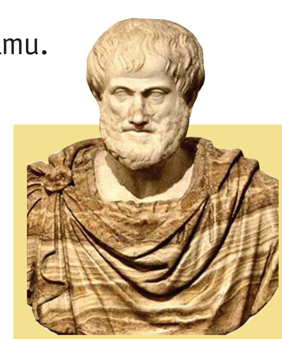
Mengapa ilmu logika atau manthiq diperlukan?

BERPIKIR adalah bagian kehidupan manusia. Proses berpikir bekerja terus menerus dalam diri manusia. Mulai berdialog dengan diri sendiri, berdialog dengan orang lain, bicara, menulis, membaca, mengkaji, mendengarkan penjelasan bahkan sampai mencoba menarik kesimpulan dari apa yang dilihat dan didengar. Begitu seringnya berpikir sehingga rasanya berpikir itu begitu mudah.

Apabila diselidiki ternyata berpikir dengan teliti dan tepat merupakan kegiatan yang cukup sulit. Jika kita meneliti berbagai penalaran dengan seksama dan sistematis maka akan diperoleh bahwa banyak penalaran yang tidak "nyambung." Sebuah pemikiran biasanya didasarkan pada masalah suka atau tidak suka. Orang cenderung menganggap benar terhadap apa yang disukainya.

Kesadaran akan adanya kesulitan berpikir teliti dan tepat itu mendorong orang untuk "*memikirkan caranya ia berpikir*", serta meneliti azas-azas hukum yang mengatur pemikiran agar dapat mencapai kebenaran. Dengan demikian timbullah suatu ilmu yang disebut logika (*manthiq*).

Logika berasal dari kata Yunani logos yang berarti ucapan, kata, pengertian, pikiran atau ilmu. Logika (adalah ilmu dan kecakapan menalar, berpikir dengan tepat (*the science and art of correct thinking*).
Aristoteles (348 – 322 SM) adalah seorang pelopor ilmu logika dengan karyanya yang berjudul To Organon.



Aristoteles
(348 - 322 SM)

Sumber: www.biografiasyvidas.com

Ilmuwan-ilmuwan dan para filosof Muslim, bahkan sampai taraf tertentu para *fuqaha'*, berhutang budi kepada bapak logika Yunani, Aristoteles, yang telah dengan sangat sistematis metode berpikir ini. Dari penelitian Aristoteles dan para pengikutnya maka ditemukanlah beberapa metode dilihat dari tingkat keakuratannya.

Apa metode "burhani" atau silogisme itu?

Metode burhani atau silogisme adalah metode logika yang digunakan untuk menarik kesimpulan dari premis-premis yang telah diketahui sehingga menghasilkan kesimpulan, pengetahuan atau informasi baru, yang sebelumnya tidak atau belum diketahui.

Adapun prosedur yang harus diikuti dalam penarikan tersebut, adalah apa yang disebut sebagai silogisme, yang harus memiliki beberapa bagian pokok, yaitu premis mayor, premis minor, middle term, dan kesimpulan. Mekanismenya adalah sebagai berikut:

premis mayor + premis minor + middle term = kesimpulan

Contoh:

Semua makhluk yang bernyawa akan mati
Kucing makhluk yang bernyawa
Maka kucing akan mati

Baris yang perama disebut premis mayor, yang kedua disebut premis minor, dan baris ketiga disebut kesimpulan. Adapun middle term (*al-hadd al-awsadh*) yang harus dimiliki bersama oleh premis mayor dan premis minor adalah "makhluk yang bernyawa"

Menurut keyakinan para filosof, kesimpulan tersebut niscaya benar karena berkorespondensi dengan kenyataan, dengan syarat bahwa premis mayor dan premis minornya merupakan proposisi yang kebenarannya tidak diragukan.

Sementara, George Boole (1815 – 1864) seorang matematikawan Inggris mulai mengembangkan ilmu logika ini dengan menambahkan simbol-simbol. Karyanya dalam ilmu logika yang terkenal adalah

An investigation of the laws of thought (Sebuah penyelidikan asas-asas berpikir) yang dipublikasikan pada tahun 1849. Boole adalah seorang profesor pada Queen's College Cork Irlandia. Dengan kehadiran simbol ini maka metode *burhani* atau silogisme yang ada di kalangan orang Muslim, selanjutnya, dapat disimbolkan sebagai:

Metode burhani atau silogisme

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \ \ (B) \\ q \Rightarrow r \ \ (B) \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \ \ (B) \end{array}$$

B. Kalimat Terbuka, Pernyataan dan Ingkaran

Pada bagian ini, kita akan mengkaji apakah sebuah kalimat merupakan *pernyataan* ataukah *bukan pernyataan* (*kalimat terbuka*). Oleh karena itu perlu dipahami terlebih dahulu pengertian tentang pernyataan dan kalimat terbuka.

Pernyataan (*atau kalimat tertutup*) adalah suatu kalimat yang memiliki nilai *benar* saja atau *salah* saja, tapi tidak sekaligus bernilai benar dan salah. Suatu pernyataan biasanya dinotasikan dengan huruf kecil seperti p, q, r, s dan sebagainya.

Nilai benar atau nilai salah dari suatu pernyataan disebut *nilai kebenaran*. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan dinotasikan dengan huruf Yunani, yaitu τ (dibaca tau) yang berasal dari kata Inggris *truth* yang artinya kebenaran.

Adapun kalimat yang **bukan pernyataan (*atau kalimat terbuka*)** adalah suatu kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya (benar atau salah) karena mengandung variabel. Suatu kalimat terbuka dengan variabel x dilambangkan oleh p(x), q(x), r(x) dan sebagainya.

Investigasi

Coba perhatikan beberapa kalimat berikut ini. Diskusikan dengan temanmu mana yang merupakan **pernyataan** dan mana yang **bukan pernyataan (kalimat terbuka)**!

a) Jakarta ibu kota Republik Indonesia
b) Kemana anda pergi?
c) Dalam bilangan basis 10 maka $5 + 2 = 7$
d) $2x + 3 = 5$
e) Ini adalah barang berharga mahal
f) Makanan itu enak sekali
g) $5x + 6 = 16$ untuk $x = 5$
h) $2x + y = 19$
i) 2 adalah satu-satunya bilangan prima yang genap

Contoh 5.1

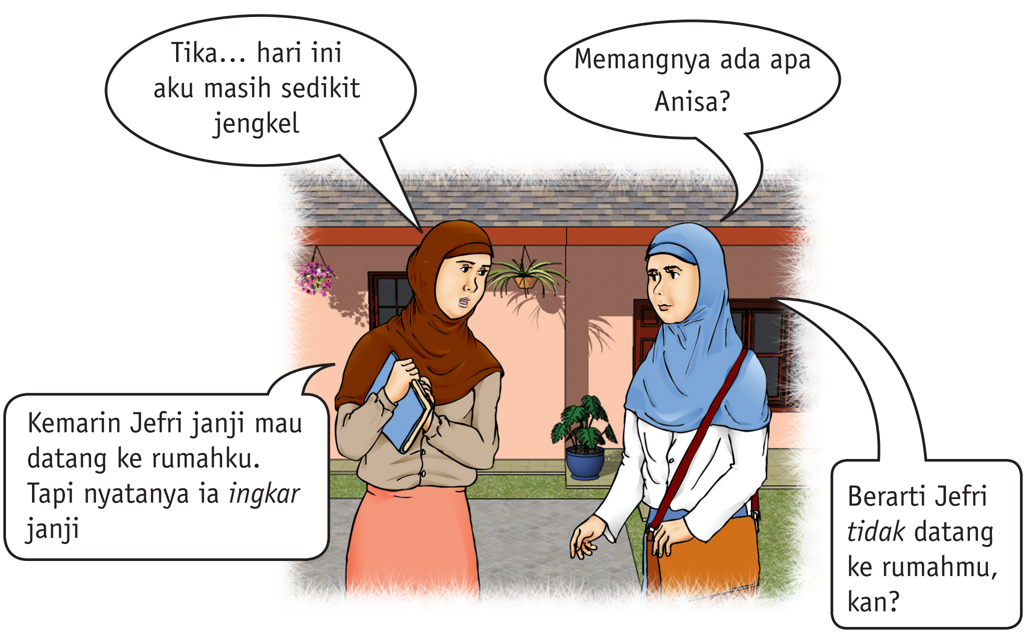
Berikut ini mana yang merupakan pernyataan dan yang bukan pernyataan (kalimat terbuka).

a) Jumlah besar sudut dalam segitiga adalah 180°
b) Antara bilangan 1 sampai dengan 20 terdapat 7 buah bilangan prima
c) $2x + 7 = 15, x \in R$

Penyelesaian:

a) Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° merupakan **pernyataan** bernilai benar
b) Antara bilangan 1 sampai 20 terdapat 7 buah bilangan prima merupakan **pernyataan** yang bernilai salah, sebab ada 8 buah bilangan prima antara dua bilangan tersebut.
c) Kalimat "$2x + 7 = 15, x \in R$" belum bisa diketahui nilai kebenarannya (benar atau salah) karena mengandung variabel maka kalimat ini **bukan pernyataan (kalimat terbuka)**

Ingkaran (*Negasi*)



Apa yang diperbincangkan oleh Tika dan Anisa di atas, merupakan contoh bentuk ingkaran yang dapat kita temui dalam kehidupan sehari-hari. Jadi, ingkaran dari"Jefri akan datang ke rumahku" adalah "Jefri *tidak* datang ke rumahku".

Dalam ilmu logika, ingkaran dari pernyataan p dinyatakan sebagai ~p. Bentuk ingkaran dapat diperoleh dengan cara menambahkan kalimat "**tidak benar bahwa**" di depan pernyataan p atau dengan menyisipkan perkataan "**tidak**" atau "**bukan**" di dalam pernyataan p.

Dengan demikian, ingkaran atau negasi dari suatu pernyataan dapat kita nyatakan sebagai suatu pernyataan baru yang diperoleh dari suatu pernyataan semula dengan sifat jika pernyataan semula bernilai benar, maka ingkarannya bernilai salah, dan jika pernyataan semula bernilai salah maka ingkarannya bernilai benar.

Adapun tabel kebenaran yang menunjukkan hubungan antara pernyataan p dan ingkarannya ~p adalah sebagai berikut.

p	~p
B	S
S	B

Contoh 5.2

Tentukan negasi dari pernyataan p : Medinah ada di Saudi Arabia

Penyelesaian:

a) Tambahkan "**Tidak benar bahwa**" atau "**Adalah salah bahwa**" sehingga ditemukan negasinya sebagai berikut.
   ~p : Tidak benar bahwa Medinah ada di Saudi Arabia
   ~p : Adalah salah bahwa Medinah ada di Saudi Arabia

b) Cara lain, sisipkan "**tidak**" atau "**bukan**" pada pernyataan itu
   ~p : Medinah tidak ada di Saudi Arabia
   ~p : Medinah bukan ada di Saudi Arabia

Contoh 5.3

Tentukan negasi dari q : 2 + 2 = 5

Penyelesaian:

a) Tambahkan "**Tidak benar bahwa**" atau "**Adalah salah bahwa**" sehingga ditemukan negasinya sebagai berikut.

~ q : Adalah salah bahwa 2 + 2 = 5

b) Cara lain, sisipkan "**tidak**" atau "**bukan**" pada pernyataan itu

~q : 2 + 2 tidak sama dengan 5

Dalam bahasa matematika ditulis:

$\sim q : 2 + 2 \neq 5$

Latihan 5.A

Pernyataan, Kalimat Terbuka dan Ingkaran

1. Tentukan manakah yang merupakan pernyataan dan manakah yang bukan dari sejumlah kalimat berikut ini. Berikan alasannya!
   a) Melbourne ada di Australia
   b) $5x + 6 \neq 102$ dimana $x \in R$
   c) Tidak ada bilangan prima yang genap
   d) Bilangan 25749360 tidak habis dibagi sembilan
   f) Jus jeruk adalah minuman yang enak
   g) Pertidaksamaan x2 – 6x + 8 > 0 memiliki HP = { x | x < 2 atau x > 4}
   h) $2x + 3 \leq 5x - 1$ dimana $x \in R$

2. Tentukan ingkaran atau negasi dari pernyataan berikut ini.
   a) k : 9 adalah bukan bilangan prima
   b) l : Jumlah sudut berpenyiku adalah 180°
   d) n : Jumlah kedua akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 10 = 0$ adalah 3
   e) p : 2 + 3 < 15
   f) r : 308 adalah bilangan yang tidak habis dibagi 7
   h) s : 8 adalah faktor dari 1478
   i) t : Dari dua buah titik hanya dapat dibuat satu garis lurus saja

C. Pernyataan Majemuk

Dalam mata pelajaran Bahasa Indonesia, pernahkah kamu mempelajari kalimat tunggal dan kalimat majemuk? Kalimat majemuk adalah kalimat yang tersusun dari dua atau lebih kalimat tunggal, dengan menggunakan kata hubung tertentu. Demikian pula dengan pengertian pernyataan majemuk --*dalam ilmu logika*-- adalah suatu pernyataan yang dibentuk dari beberapa pernyataan tunggal dengan menggunakan kata penghubung logika, seperti:

... dan ...
... atau ...
jika .... maka ...
.... jika dan hanya jika ....

Dalam ilmu logika dikenal beberapa pernyataan majemuk, yaitu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

Kata hubung logika	Lambang	Istilah
.... dan ...	$\wedge$	Konjungsi
... atau ...	$\vee$	Disjungsi
Jika ... maka ...	$\Rightarrow$	Implikasi
... jika dan hanya jika...	$\Leftrightarrow$	Biimplikasi

"Jika Anda yakin bahwa Anda telah berada pada jalur tujuan yang tepat, maka jangan kuatir mengenai berapa lama Anda akan mencapai puncak sukses, dan juga jangan menguatirkan apa yang dikatakan orang lain mengenai hal tersebut" (Anonymous)

D. Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung “dan”. Konjungsi dari pernyataan p dan pernyataan q dinotasikan oleh “$p \wedge q$” (dibaca p dan q).

Nilai kebenaran p dan q ditentukan sebagai berikut.

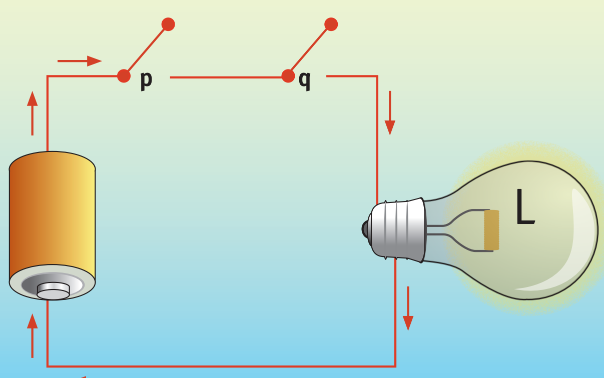
$p \wedge q$ *benar*,	jika p benar dan q benar
$p \wedge q$ *salah*,	jika salah satu p atau q salah, atau jika p salah dan q salah

Tabel kebenaran konjungsi $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Investigasi

DALAM kelompok belajarmu buatlah rangkaian seperti berikut ini. p dan q adalah 2 saklar yang dipasang secara seri dan L adalah lampu.



Ketentuan:

Saklar dihidupkan = B
Saklar mati = S
Lampu hidup = B
Lampu mati = S

Selidikilah:

a) Bagaimana jika hanya saklar p saja yang dihidupkan? Apakah lampunya menyala?
b) Bagaimana jika hanya saklar q saja yang dihidupkan? Aapakah lampunya menyala?
c) Bagaimana jika kedua saklar dihidupkan? Apakah lampunya menyala?

Presentasikan hasil kerjamu!

Contoh 5.4

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk:

"Fungsi kuadrat $y = x^2 + 3x + 5$ memotong sumbu x di dua titik *dan* memotong sumbu y di angka 5".

Penyelesaian:

a) Urai menjadi pernyataan tunggal lalu tentukan nilai kebenarannya
   p : Fungsi kuadrat $y = x^2 + 3x + 5$ memotong sumbu x di dua titik.
   $\tau(p) = S$
   q : Fungsi kuadrat $y = x^2 + 3x + 5$ memotong sumbu y di angka 5.
   $\tau(q) = B$

d) Pernyataan majemuk di atas adalah konjungsi sebab menggunakan kata hubung "**dan**". Menurut tabel kebenaran konjungsi

p	q	$p \wedge q$
S	B	S

Jadi nilai kebenaran pernyataan majemuk di atas adalah S.

"Kamu bisa kalau kamu berpikir bisa"
(Dr. Norman Vincent Peale)

E. Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung "atau". Disjungsi dari pernyataan p dan pernyataan q dinotasikan oleh "$p \vee q$" (dibaca p atau q)

Nilai kebenaran p atau q ditentukan sebagai berikut.

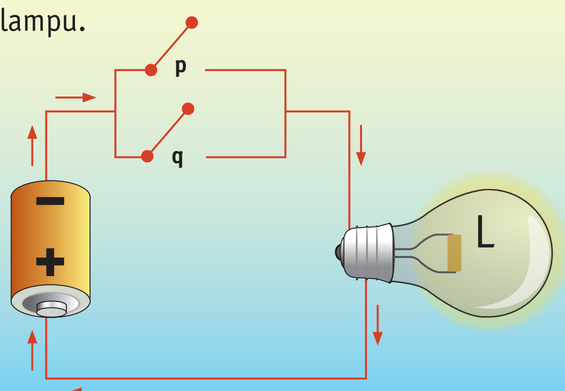
> $p \vee q$ benar, jika salah satu p atau q benar,
> atau jika p dan q keduanya benar
>
> $p \vee q$ salah, jika p dan q keduanya salah

Tabel kebenaran disjungsi $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Investigasi

Dalam kelompok belajarmu buatlah rangkaian seperti berikut ini. p dan q adalah 2 saklar yang dipasang secara paralel dan L adalah lampu.



Ketentuan:

Saklar dihidupkan = B
Saklar mati = S
Lampu hidup = B
Lampu mati = S

Selidikilah:

a) Bagaimana jika hanya saklar p saja yang dihidupkan? Apakah lampunya menyala?

b) Bagaimana jika hanya saklar q saja yang dihidupkan? Apakah lampunya menyala?

c) Bagaimana jika kedua saklar dihidupkan? Apakah lampunya menyala?

Presentasikan hasil kerjamu!

Contoh 5.5

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk:

"Benda jatuh ke bawah karena adanya gravitasi atau log 10 = 2"

Penyelesaian:

a) Urai menjadi pernyataan tunggal dan tentukan nilai kebenarannya
p : benda jatuh ke bawah karena adanya gravitasi. $\tau(p) = B$
q : log 10 = 2. $\tau(q) = S$

b) Pernyataan majemuk di atas adalah *disjungsi* sebab menggunakan kata hubung "atau". Menurut tabel disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	S	B

Jadi, nilai kebenaran pernyataan majemuk di atas adalah B.

"Hampir semua orang menginginkan hasil yang luar biasa, tetapi mereka tidak pernah bersedia melakukan hal yang luar biasa"

(Anonim)

Latihan 5.B

Konjungsi dan Disjungsi

1. Tentukan komponen-komponen pernyataan berikut.
   a) Paris ibukota Perancis dan $3 + 5 = 8$
   b) 2 bilangan prima dan genap
   c) Matahari terbit dari timur dan 11 adalah suku ke 7 dari barisan $Un = 2n - 3$
   d) $\sqrt{9}$ adalah bentuk akar atau lumba-lumba adalah mamalia
   e) 3 lebih besar dari 2 dan atau dua buah garis sejajar
   f) 6 bilangan genap atau $Un = 2n$ adalah bentuk umumnya
2. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut.
   a) 9 bilangan ganjil dan bukan prima
   b) 2 faktor dari 8 dan 2 bukan bilangan prima
   c) $\sqrt{3}$ bilangan rasional dan 3 bilangan genap
   d) 4 atau 5 adalah faktor dari 20
   e) $4^2 = 16$ atau 16 habis dibagi 9
   f) 0 bilangan asli atau bilangan cacah
3. p : Hari hujan
   q : Matahari bersinar
   r : Burung-burung berkicau

   Tulislah dengan kalimat lambang-lambang logika berikut ini.

   a) $p \wedge q$
   b) $p \wedge r$
   c) $p \wedge \sim r$
   d) $p \vee \sim q$
   e) $q \vee \sim r$
   f) $(p \wedge \sim q) \wedge r$
   g) $\sim p \wedge (\sim q \vee r)$
4. Misalkan p : Hari hujan
   q : Udara dingin
   r : Ikan-ikan berenang

   Tuliskan dengan lambang logika pernyataan berikut.
   a) Hari hujan dan udara dingin.
   b) Udara dingin dan ikan-ikan berenang.

c) Hari tidak hujan dan ikan-ikan tidak berenang .
d) Hari tidak hujan atau udara dingin.
e) Udara tidak dingin atau ikan-ikan berenang.
f) Ikan-ikan tidak berenang atau hari tidak hujan.

5. Lengkapilah tabel berikut!

p	q	~p	~p ∨ q	(~p ∨ q) ∧ q
B	B	....	....	....
B	S	....	....	....
S	B	....	....	....
S	S	....	....	....

6. Lengkapilah tabel berikut

p	q	r	~p	~q	q ∧ r	~p ∨ r	(q ∧ r) ∨ (~p ∨ r)
B	B	....	....	....	....	....	....
B	S	....	....	....	....	....	....
B	S	....	....	....	....	....	....
B	S	....	....	....	....	....	....
S	S	....	....	....	....	....	....
S	S	....	....	....	....	....	....
S	S	....	....	....	....	....	....
S	S	....	....	....	....	....	....

Lihatlah dalam kehidupan ini, banyak orang yang tahu apa yang seharusnya dikerjakan, akan tetapi sedikit sekali yang mengerjakan apa yang ia tahu. Tahu saja tidak cukup. Kamu harus bertindak (*take action*)
(Pambayun Muji Lestari)

F. Implikasi

IMPLIKASI adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung "jika ..... maka.....". Implikasi dari pernyataan p terhadap q dinotasikan oleh " $p \Rightarrow q$" dapat dibaca "jika p maka q"

Nilai kebenaran $p \Rightarrow q$ ditentukan sebagai berikut:

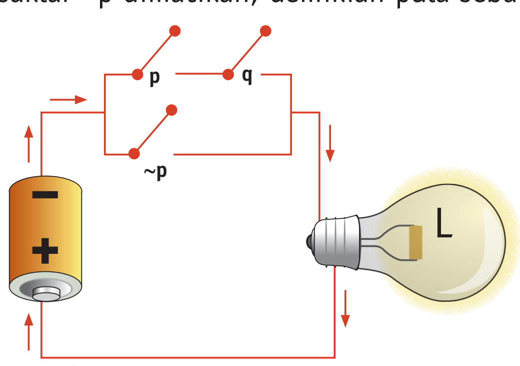
> $p \Rightarrow q$ salah, jika p benar dan q salah
>
> $p \Rightarrow q$ benar, untuk komposisi yang lainnya

Tabel kebenaran implikasi $p \Rightarrow q$

p	**q**	**$p \Rightarrow q$**
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Investigasi

Dalam kelompok belajarmu buatlah rangkaian seperti berikut ini. p, ~p dan q adalah 3 saklar yang dipasang seperti pada gambar dan L adalah lampu. Saklar p dan ~p adalah dua saklar yang memiliki fungsi berlawanan. Jika saklar p dihidupkan maka saklar ~p dimatikan, demikian pula sebaliknya.



Ketentuan:

Saklar dihidupkan = B

Saklar mati = S

Lampu hidup = B

Lampu mati = S

Selidikilah:

a) Bagaimana jika hanya saklar p saja yang dihidupkan? Apakah lampunya menyala?
b) Bagaimana jika hanya saklar p saja yang dimatikan? Apakah lampunya menyala?
c) Bagaimana jika saklar p dan q dihidupkan? Apakah lampunya menyala?

Presentasikan hasil kerjamu!

Contoh 5.6

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk:

"Jika $4^2 = 16$ maka 3 faktor dari 8"

Penyelesaian:

a) Urai menjadi pernyataan tunggal dan tentukan nilai kebenarannya
   p : $4^2 = 16$. $\tau(p) = B$
   q : 3 faktor dari 8. $\tau(q) = S$

b) Pernyataan majemuk di atas adalah *implikasi* sebab menggunakan kata hubung "jika ..... maka ....." sehingga menurut tabel implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	S	S

Jadi, nilai kebenaran pernyataan majemuk di atas adalah S.

G. Biimplikasi

BIIMPLIKASI adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung ".... jika dan hanya jika....." Biimplikasi dari pernyataan p dan pernyataan q dinotasikan oleh "$p \Leftrightarrow q$", dibaca "jika p maka q dan jika q maka p"

Nilai kebenaran biimplikasi p $\Leftrightarrow$ q ditentukan sebagai berikut.

Nilai kebenaran p $\Leftrightarrow$ q ditentukan sebagai berikut:

p $\Leftrightarrow$ q *benar*, jika p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama

$$\tau(p) = \tau(q)$$

p $\Leftrightarrow$ q *salah*, jika p dan q memiliki nilai kebenaran yang berbeda

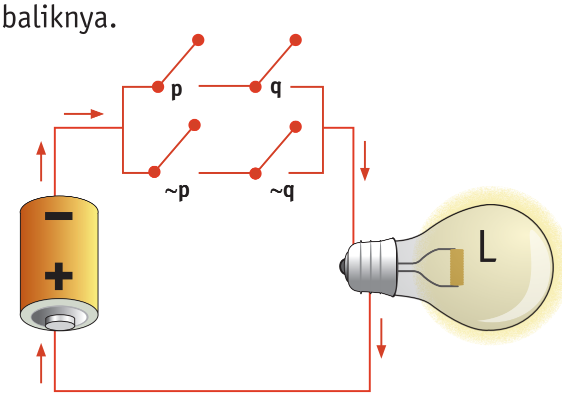
$$\tau(p) \neq \tau(q)$$

Tabel kebenaran konjungsi p $\Leftrightarrow$ q

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Investigasi

DALAM kelompok belajarmu buatlah rangkaian seperti berikut ini. p, ~p, q dan ~q adalah 4 saklar yang dipasang seperti pada gambar dan L adalah lampu. Saklar p dan ~p adalah dua saklar yang memiliki fungsi berlawanan, demikian pula dengan saklar q dan ~q. Misal: Jika saklar p dihidupkan maka saklar ~p dimatikan, demikian pula sebaliknya.



Ketentuan:

Saklar dihidupkan = B

Saklar mati = S

Lampu hidup = B

Lampu mati = S

Selidikilah:

a) Bagaimana jika saklar p dan q dihidupkan? Apakah lampunya menyala?

b) Bagaimana jika p dan q dimatikan? Apakah lampunya menyala?

Presentasikan hasil kerjamu!

Contoh 5.7

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk:

"Paris ibukota Indonesia jika dan hanya jika $3 + 6 \neq 9$"

Penyelesaian:

a) Urai menjadi pernyataan tunggal dan tentukan nilai kebenarannya.
p : Paris ibukota Indonesia. $\tau(p) = S$
q : $3 + 6 \neq 9$. $\tau(q) = S$

b) Pernyataan majemuk di atas adalah biimplikasi sebab menggunakan kata hubung ".....jika dan hanya jika ....." sehingga menurut tabel biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
S	S	B

Jadi nilai kebenaran pernyataan majemuk di atas adalah B.

Latihan 5.C

Implikasi dan Biimplikasi

1. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut ini:
   a) Jika $4 \times 2 = 8$ maka $4 + 2 = 6$
   b) Jika $4 + 5 = 9$ maka 9 bilangan prima

c) $4 + 3 \neq 7$ jika dan hanya jika 7 bilangan ganjil

d) Jika 3 bilangan genap maka 3 bukan bilangan prima

2. Misalkan p : hutan habis ditebang
   q : perumahan terjadi banjir

   Tuliskan dengan kalimat lambang logika berikut:

a) $p \Rightarrow q$	c) $\sim p \Rightarrow q$
b) $p \Rightarrow \sim q$	d) $\sim p \Rightarrow \sim q$
e) $p \Leftrightarrow q$	f) $p \Leftrightarrow \sim q$
g) $\sim p \Leftrightarrow q$	h) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

3. Tunjukkan dengan tabel bahwa $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

4. Jika p adalah pernyataan yang bernilai salah, dan q adalah pernyataan yang bernilai benar. Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut.

a) $p \Rightarrow q$	b) $\sim p \Rightarrow q$	c) $p \Rightarrow \sim q$
d) $\sim p \Rightarrow \sim q$	e) $\sim (p \Rightarrow \sim q)$	f) $\sim(\sim p \Rightarrow q)$
g) $p \Leftrightarrow q$	h) $\sim p \Leftrightarrow q$	i) $p \Leftrightarrow \sim q$
j) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$	k) $\sim (p \Leftrightarrow \sim q)$	l) $\sim(\sim p \Leftrightarrow q)$

5. Tentukan tabel kebenaran dari lambang logika berikut:

a) $q \Rightarrow (p \vee r)$	b) $(p \vee q) \Rightarrow p$
c) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$	d) $\sim[\, p \wedge (q \Rightarrow r)]$

6. Buktikan bahwa

a) $(p \wedge q) \vee \sim q \equiv p \Rightarrow q$	b) $p \vee \sim q \equiv p \Rightarrow q$

Kelemahan terbesar dari kebanyakan manusia adalah keseganan untuk menyatakan pada orang lain betapa mereka menyayangi orang-orang itu sewaktu mereka masih hidup

(O.A. Battista)

H. Negasi Konjungsi dari Disjungsi

Untuk memahami negasi dari konjungsi dan disjungsi, mari kita perhatikan tabel berikut.

p	q	~p	~q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	S	S	B	B	S	S
B	S	S	B	S	B	S	B
S	B	B	S	S	B	S	B
S	S	B	B	S	S	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa pada kolom 5 berlawanan dengan kolom 8 dan kolom 6 berlawanan dengan kolom 7.asil ini menggambarkan aturan umum berikut.

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

Contoh 5.8

Tentukan negasi dari "Jakarta ibukota Indonesia dan $3^2 = 27$"

Penyelesaian:

a) Bentuk logika dari "Jakarta ibukota Indonesia dan $3^2 = 27$" adalah $p \wedge q$

b) Rumus negasi dari $p \wedge q$ adalah $\sim p \vee \sim q$
$p \wedge q$ = Jakarta ibukota Indonesia *dan* $3^2 = 27$, maka
$\sim p \vee \sim q$ = Jakarta bukan ibu kota Indonesia atau $3^2 \neq 27$
Jadi negasi dari pernyataan di atas adalah "Jakarta bukan ibu kota Indonesia *atau* $3^2 \neq 27$"

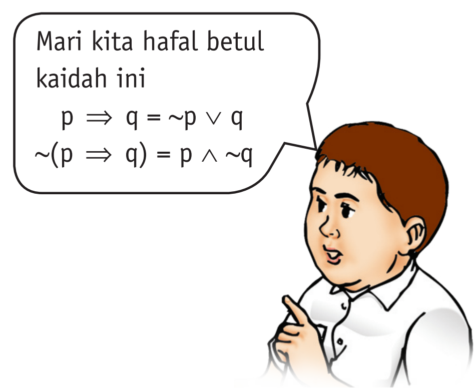
I. Negasi Implikasi

Untuk menentukan negasi implikasi, perhatikan tabel kebenaran berikut:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B
1	2	3	4	5

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran untuk kolom 4 dan 5 sama. Dengan demikian $p \Rightarrow q$ sama dengan $\sim p \vee q$. Dari data ini, kita akan temukan negasi dari implikasi

$$p \Rightarrow q = \sim p \vee q$$
$$\sim(p \Rightarrow q) = \sim(\sim p \vee q)$$
$$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$$



Jadi negasi dari implikasi adalah:

$$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$$

Contoh 5.9

Tentukan negasi dari "Jika hari hujan maka jalan-jalan becek"

Penyelesaian:

a) $p \Rightarrow q$: Jika hari hujan maka jalan-jalan becek

b) Karena $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$ maka negasi implikasi di atas adalah:
$p \wedge \sim q$: Jika hari hujan *dan* jalan-jalan *tidak* becek

J. Konvers, Invers dan Kontraposisi

Nah sekarang, dari bentuk implikasi $p \Rightarrow q$ dapat kita bentuk implikasi-implikasi yang lainnya. Misalkan menjadi $q \Rightarrow p$, $\sim p \Rightarrow \sim q$, dan $\sim q \Rightarrow \sim p$. Dalam istilah ilmu logika $q \Rightarrow p$ merupakan konvers dari $p \Rightarrow q$, $\sim p \Rightarrow \sim q$ merupakan invers $p \Rightarrow q$, dan $\sim q \Rightarrow \sim p$ merupakan kontraposisi dari $p \Rightarrow q$

1) $q \Rightarrow p$ disebut konvers dari $p \Rightarrow q$
2) $\sim p \Rightarrow \sim q$ disebut invers dari $p \Rightarrow q$
3) $\sim q \Rightarrow \sim p$ disebut kontraposisi dari $p \Rightarrow q$

Contoh 5.10

Tentukan invers, konvers dan kontraposisi dari "$\sim q \Rightarrow p$"

Penyelesaian:

a) Invers dari $\sim q \Rightarrow p$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$ atau $q \Rightarrow \sim p$
b) Konvers dari $\sim q \Rightarrow p$ adalah $p \Rightarrow \sim q$
c) Kontraposisi dari $\sim q \Rightarrow p$ adalah $\sim p \Rightarrow q$

Contoh 5.11

Tentukan invers, konvers dan kontraposisi, ingkaran dari:

"Jika 2 + 3 = 5 maka 5 bukan bilangan prima"

Penyelesaian:

a) Implikasi ($p \Rightarrow q$) : Jika 2 + 3 = 5 maka 5 bukan bilangan prima

Inversnya ($\sim p \Rightarrow \sim q$) : Jika 2 + 3 $\neq$ 5 maka 5 bilangan prima

b) *Implikasi* ($p \Rightarrow q$) : Jika 2 + 3 = 5 maka 5 bukan bilangan prima
Konversnya ($q \Rightarrow p$) : jika 5 bukan bilangan prima maka 2 + 3 = 5

c) *Implikasi* ($p \Rightarrow q$) : Jika 2 + 3 = 5 maka 5 bukan bilangan prima
Kontraposisinya ($\sim q \Rightarrow \sim p$) : jika 5 bilangan prima maka $2 + 3 \neq 5$

d) *Implikasi* ($p \Rightarrow q$) : Jika 2 + 3 = 5 maka 5 bukan bilangan prima
Negasinya ($p \wedge \sim q$) : jika 5 bilangan prima dan $2 + 3 \neq 5$

Latihan 5.D

Negasi Konjungsi, Disjungsi dan Implikasi Konvers, Invers dan Kontraposisi

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut!
   a) Gunung semeru meletus dan lahar dingin mengalir
   b) 235746 habis dibagi 3 dan 28 adalah bilangan sempurna
   c) 1,2, $\sqrt{5}$ adalah bilangan Pythagoras atau ada bilangan prima yang habis dibagi 2
   d) Faktor dari 9 adalah 1, 3, 9 atau 19 bukan bilangan prima
   e) Jika segitiga ABC sama sisi maka segitiga ABC sama kaki
   f) Jika 8 bilangan genap maka $3 + 4 \leq 8$
2. Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan berikut!
   a) Jika gunung Merapi meletus maka lahar panas mengalir
   b) Jika Ali tekun dan rajin belajar maka ia lulus ujian
   c) Jika matahari bersinar maka burung-burung berterbangan riang
   d) Jika $3 > -1$ dan $3 < 6$ maka $-1 < 3 < 6$
   e) Jika 2, 3, dan 5 bukan triple Pythogaras maka $5^2 = 2^2 + 3^2$
   f) Jika $x^2 - 3x + 2 = 0$ memiliki akar-akar $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$ maka $2x_1 = 3$
3. Tentukan konvers, invers, kontraposisi dan negasi dari:
   a) $p \Rightarrow \sim q$
   b) $\sim p \Rightarrow \sim q$
   c) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   d) $\sim p \Rightarrow (q \vee \sim r)$
   e) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$

4. Berikut adalah *implikasi* dan *kontraposisinya*. Dengan menggunakan tabel kebenaran buktikan bahwa implikasi setara (*ekuivalen*) dengan kontraposisinya.
   a) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
   b) $\sim p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow p$
   c) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
   d) $\sim p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow p$

K. Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi adalah pernyataan majemuk yang senantiasa menghasilkan nilai kebenaran *benar* tak peduli nilai kebenaran dari pernyataan tunggal yang menyusunnya *benar* atau *salah*.

Contoh 5.12

Buktikan bahwa $p \vee \sim p$ adalah sebuah tautologi.

Penyelesaian:

a) Buat tabel kebenaran untuk membuktikan.

p	~p	p ∨ ~p
B	S	B
B	S	B
S	B	B
S	B	B

b) Terlihat bahwa nilai kebenaran dari $p \vee \sim p$ semuanya B. Jadi, $p \vee \sim p$ adalah sebuah tautologi

Kontradiksi adalah pernyataan majemuk yang selalu menghasilkan nilai kebenaran *salah* tak peduli nilai kebenaran dari pernyataan tunggal yang menyusunnya *benar* atau *salah*.

Contoh 5.13

Buktikan bahwa $p \wedge \sim p$ adalah sebuah kontradiksi.

Penyelesaian:

a) Buat tabel kebenaran untuk membuktikan.

p	~p	$p \wedge \sim p$
B	S	S
B	S	S
S	B	S
S	B	S

b) Terlihat bahwa nilai kebenaran dari $p \wedge \sim p$ semuanya S.
Jadi, $p \wedge \sim p$ adalah sebuah *kontradiksi*.

Investigasi

Selidikilah dengan teman dalam kelompok belajarmu apakah pernyataan yang dikenal dengan nama "**Hukum Silogisme**" yaitu:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

adalah sebuah tautologi ataukah kontradiksi.

Latihan 5.E

Tautologi dan Kontradiksi

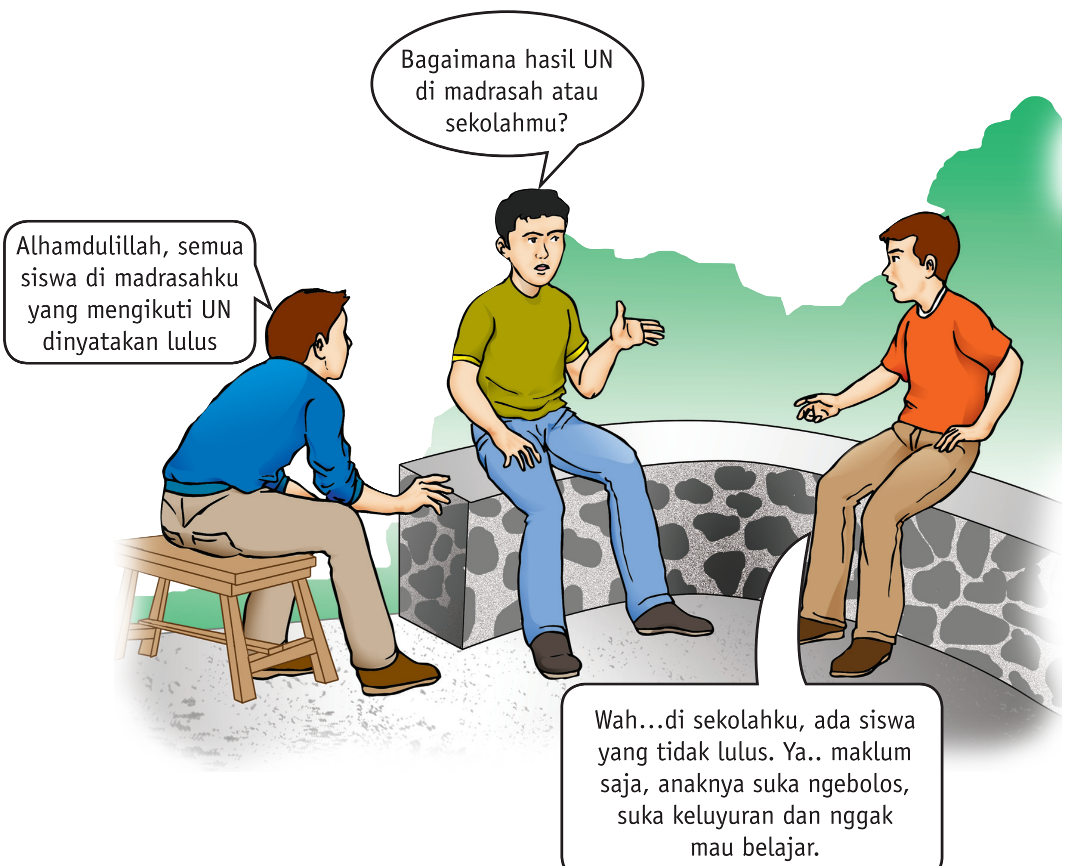
1. Dengan menggunakan tabel kebenaran buktikan apakah pernyataan $p \Rightarrow (p \vee q)$ sebuah tautologi ataukah kontradiksi.
2. Dengan menggunakan tabel kebenaran buktikan apakah pernyataan $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ sebuah tautologi ataukah kontradiksi

3. Dengan menggunakan tabel kebenaran buktikan apakah pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ sebuah tautologi ataukah kontradiksi
4. Dengan menggunakan tabel kebenaran buktikan apakah pernyataan yang dikenal dengan nama "Hukum Modus Ponens" yaitu

   $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ sebuah tautologi ataukah kontradiksi
5. Dengan menggunakan tabel kebenaran buktikan apakah pernyataan yang dikenal dengan nama "Hukum Modus Tollens" yaitu

   $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ sebuah tautologi ataukah kontradiksi

L. Pernyataan Berkuantor



Mari kita perhatikan sekali lagi percakapan di atas. Dalam percakapan tersebut kita menjumpai kata-kata seperti "semua" dan "ada". Dalam ilmu logika, pernyataan yang menggunakan kata "semua" dan "ada" dinamakan pernyataan *berkuantor*.

Suatu kalimat terbuka dapat diubah menjadi pernyataan, dengan cara menentukan nilai variabelnya atau dengan menggunakan suatu kuantor. Mari kita cermati contoh berikut ini.

Kalimat terbuka : $x + 3 > 7$

Dapat dijadikan pernyataan dengan menentukan nilai variabel, misal:

p : Untuk $x > 4$ berlaku $x + 3 > 7$ $\tau(p) = B$

q : Untuk $x < 5$ berlaku $x + 3 > 7$ $\tau(q) = S$

Dapat dijadikan pernyataan dengan menggunakan kuantor, misal:

r : Ada nilai $x \in R$ sehingga berlaku $x + 3 > 7$ $\tau(r) = B$

s : Semua nilai $x \in R$ berlaku $x + 3 > 7$ $\tau(s) = S$

Kuantor universal

KUANTOR universal adalah suatu pernyataan yang menggunakan kata "semua" atau "setiap" yang dilambangkan dengan "$\forall$". Lambang ini diambil dari huruf depan kata Inggris "*All*" (= semua) yang dibalik.

Misalkan p(x) adalah kalimat terbuka pada himpunan semesta S. Bentuk pernyataan yang bisa dibuat dari kalimat terbuka tersebut dengan menggunakan kuantor universal adalah:

$(\forall x \in S).p(x)$

dibaca: Semua x anggota S berlaku p(x)

Setiap x anggota S berlaku p(x)

Oleh karena $(\forall x \in S).p(x)$ merupakan suatu pernyataan, maka mempunyai nilai benar atau salah tapi tidak sekaligus keduanya. Nilai kebenaran dari pernyataan berkuantor universal adalah *benar* jika setiap x anggota S menyebabkan p(x) menjadi benar. Sebaliknya, memiliki nilai kebenaran *salah* apabila setiap x anggota S menyebabkan p(x) menjadi salah.

Kuantor universal dinotasikan dengan "$\forall$" diambil dari huruf depan kata "All" yang dibalik. Kata "All" berarti semua

Contoh 5.14

Tentukan nilai kebenaran dari $(\forall x \in C) . (x + 4 > 3)$;C = bilangan cacah

Penyelesaian:

a) Sederhanakan kalimat terbukanya

   $p(x) : x + 4 > 3$

   $p(x) : x > -1$

   Penyelesaiannya adalah {0, 1, 2, 3, ... }

b) Pernyataan $(\forall x \in C) . (x + 4 > 3)$ bernilai benar karena penyelesaiannya {0, 1, 2, 3, ... } memuat seluruh bilangan C.

Kuantor eksistensial

Kuantor eksistensial adalah suatu pernyataan yang menggunakan kata "beberapa" atau "ada" yang dilambangkan dengan "$\exists$". Lambang ini diambil dari huruf depan kata Inggris "Exist" (= ada) yang dibalik.

Misalkan p(x) adalah kalimat terbuka pada himpunan semesta S. Bentuk pernyataan yang bisa dibuat dari kalimat terbuka tersebut dengan menggunakan kuantor eksistensial adalah:

$(\exists x \in S).p(x)$

dibaca: Ada x anggota S berlaku p(x)

Beberapa x anggota S berlaku p(x)

Nilai kebenaran pernyataan kuantor eksistensial adalah jika himpunan penyelesaian dari p(x) bukan himpunan kosong atau ada nilai x anggota S menyebabkan p(x) benar maka $(\exists x \in S).p(x)$ benar. Jika himpunan penyelesaian dari p(x) himpunan kosong maka

$(\exists x \in S).p(x)$ salah.

Kuantor eksistensial dinotasikan dengan "$\exists$" diambil dari huruf depan kata "Exist" yang dibalik. Kata "Existl" berarti *ada*

Contoh 5.15

Tentukan nilai kebenaran dari:

a) $(\exists x \in A).(x + 4 < 6)$

b) $(\exists x \in A) . (2 - x > 4)$; A = bilangan asli

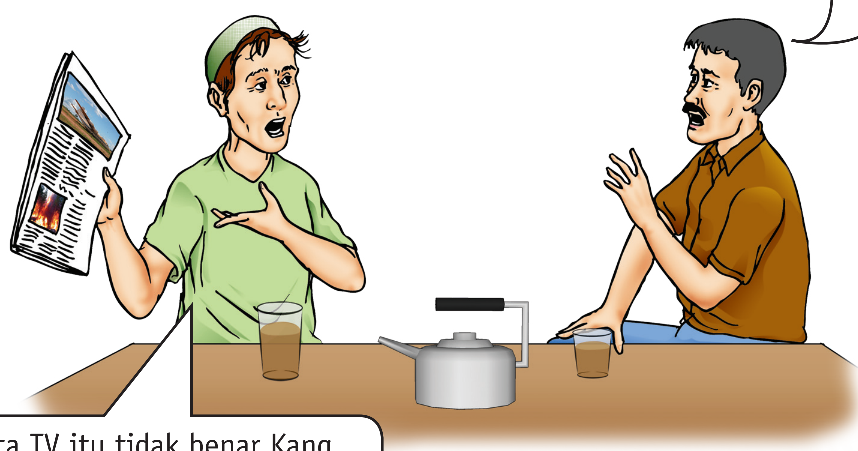
Penyelesaian:

a) Sederhanakan kalimat terbukanya.
   $p(x) : x + 4 < 6$
   $p(x) : x < 2$
   Penyelesaiannya adalah {1} bukan himpunan kosong.
   Jadi, pernyataan $(\exists x \in A) . (x + 4 < 6)$ bernilai *benar*.

b) Sederhanakan kalimat terbukanya
   $q(x) : 2 - x > 4$
   $q(x) : x < -2$
   Tidak ada bilangan asli yang lebih kecil dari –2 atau penyelesaiannya { }
   Jadi, pernyataan $(\exists x \in A) . (2 - x > 4)$ bernilai *salah*.

Dunia ini bukanlah sesuatu yang harus dilihat atau dikenal melalui konsep demi konsep belaka, melainkan sesuatu yang harus dibangun kembali dengan kerja yang tak putus-putusnya
(Muhammad Iqbal)

Negasi kuantor



Dapat kita tarik kesimpulan bahwa pernyataan di koran hari ini telah “menyangkal” pemberitaan yang ada di televisi kemarin.

Kita sudah tahu bahwa istilah menyangkal atau lawan dalam ilmu logika disebut dengan negasi.

Jadi negasi dari:

semua penumpang pesawat yang naas tersebut meninggal dunia

adalah:

beberapa penumpang pesawat naas ditemukan selamat oleh tim SAR

Secara umum, negasi dari pernyataan berkuantor universal mengikuti kaidah seperti berikut ini:

$$\sim[(\forall\ x \in S)\ .\ p(x)] = (\exists\ x \in S).\ \sim p(x),\ \textit{atau}$$

$$\sim[(\forall\ x \in S)\ .\ p(x)] = (\sim\forall\ x \in S)\ .\ p(x)$$

Sedangkan, negasi dari pernyataan berkuantor eksistensial mengikuti kaidah seperti berikut ini:

$\sim[(\exists\ x \in S)\ .\ p(x)] = (\forall\ x \in S).\ \sim p(x)$, *atau*

$\sim[(\exists\ x \in S)\ .\ p(x)] = (\sim\exists\ x \in S)\ .\ p(x)$

Contoh 5.16

Tentukan negasi dari "Semua binatang laut bernafas dengan insang"

Penyelesaian:

a) Pernyataan di atas adalah pernyataan kuantor universal

$(\forall\ x \in S)\ .\ p(x)$: Semua binatang laut bernafas dengan insang

b) Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu:

$(\exists\ x \in S)\ .\ \sim p(x)$: *Ada* binatang laut *tidak* bernafas dengan insang

$(\sim\forall\ x \in S).p(x)$: *Tidak* semua binatang laut bernafas dengan insang

Contoh 5.17

Tentukan negasi dari "Ada binatang laut menyusui".

Penyelesaian:

a) Pernyataan di atas adalah pernyataan kuantor eksistensial

$(\exists\ x \in S)\ .\ \sim p(x)$: Ada binatang laut menyusui

b) Negasinya ada 2 kemungkinan, yaitu:

$(\forall\ x \in S)\ .\ \sim p(x)$: Semua binatang laut *tidak* menyusui

$(\sim\exists\ x \in S)$: *Tidak* ada binatang laut menyusui

M. Penarikan Kesimpulan

Deduksi dalam logika adalah suatu proses bernalar yang alasan-alasanya sudah diketengahkan. Alasan-alasan itu dinamakan dengan premis. Dari premis-premis itu dapat ditarik kesimpulan yang merupakan pengetahuan baru disebut dengan *konklusi*. Suatu *konklusi* dikatakan sah apabila premis-premisnya bernilai benar.

1. Modus Ponens

Modus ponens adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk berikut:

$p \Rightarrow q$	(B)	..... premis 1
p	(B)	..... premis 2
$\therefore q$	(B)	..... kesimpulan/konklusi

Modus ponens merupakan penarikan yang sah sebab pernyataan

$[(p \Rightarrow q \;\wedge p] \Rightarrow p$ merupakan sebuah *tautologi*. **Bisakah kamu membuktikan tautologi ini?**

Contoh 5.18

Tentukan konklusi dari premis-premis berikut ini.
Premis 1: Jika sebuah bilangan habis dibagi 2 maka bilangan itu genap
Premis 2: 18 bilangan habis dibagi 2

Penyelesaian:

a) Gunakan argumentasi modus ponens dalam penarikan kesimpulannya, sebab premis-premisnya mengikuti pola penarikan kesimpulan itu, yaitu:

$p \Rightarrow q$	(B)	..... premis 1
p	(B)	..... premis 2
$\therefore q$	(B)	..... kesimpulan/konklusi

b) $p \Rightarrow q$: Jika sebuah bilangan habis dibagi 2 maka bilangan itu genap
p : 18 bilangan habis dibagi 2

$\therefore q$: Jadi, 18 bilangan genap (*konklusinya*)

2. Modus Tollens

Modus tollens adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk berikut:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(B) ..... premis 1} \\ \sim q & \text{(B) ..... premis 2} \\ \hline \therefore \sim q & \text{(B) ..... kesimpulan/konklusi} \end{array}$$

Modus tollens merupakan penarikan yang sah sebab pernyataan

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ merupakan sebuah tautologi.

Bisakah kamu membuktikan tautologi ini?

Contoh 5.19

Tentukan konklusi dari premis-premis berikut ini.
Premis 1: Jika pabrik X mencemari maka ada limbah di sawah itu
Premis 2: *Tidak* ada limbah di sawah itu

Penyelesaian:

a) Gunakan argumentasi modus tollens dalam penarikan kesimpulannya, sebab premis-premisnya mengikuti pola penarikan kesimpulan itu, yaitu:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(B) ..... premis 1} \\ \sim q & \text{(B) ..... premis 2} \\ \hline \therefore \sim q & \text{(B) ..... kesimpulan/konklusi} \end{array}$$

b) $p \Rightarrow q$: Jika pabrik X mencemari maka maka ada limbah di sawah itu

p : Tidak ada limbah di sawah itu

$\therefore q$: Jadi, pabrik X tidak mencemari (*konklusinya*)

3. Silogisme (Hyphotetical Syllogism)

Silogisme adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk berikut:

$p \Rightarrow q$ (B) ..... premis 1
$q \Rightarrow r$ (B) ..... premis 2

$\therefore p \Rightarrow r$ (B) ..... kesimpulan/konklusi

Silogisme merupakan penarikan yang sah sebab pernyataan

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ merupakan *tautologi*.

Pernyataan p sering dikenal sebagi *term* penengah dalam penarikan kesimpulan. **Bisakah kamu membuktikan tautologi ini?**

Contoh 5.20

Tentukan konklusi dari premis-premis berikut ini.
Premis 1: Jika a bilangan bulat genap maka a^2 bilangan genap
Premis 2: Jika a^2 bilangan genap maka $a^2 + 1$ bilangan ganjil

Penyelesaian:

a) Gunakan argumentasi silogisme dalam penarikan kesimpulannya, sebab premis-premisnya mengikuti pola penarikan kesimpulan itu, yaitu:

$p \Rightarrow q$ (B) ..... premis 1
$q \Rightarrow r$ (B) ..... premis 2

$\therefore p \Rightarrow r$ (B) ..... kesimpulan/konklusi

b) $p \Rightarrow q$: Jika a bilangan bulat genap maka a^2 bilangan genap
$q \Rightarrow r$: Jika a^2 bilangan genap maka $a^2 + 1$ bilangan ganjil

---

$\therefore\ p \Rightarrow r$: Jadi, Jika a bilangan bulat genap maka $a^2 + 1$ bilangan ganjil

4. Silogisme disjungsi (Disjunctive syllogism)

Silogisme disjungsi adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk berikut:

$p \vee q$	(B)	..... premis 1
$\sim p$	(B)	..... premis 2
$\therefore\ q$	(B)	..... kesimpulan/konklusi

Silogisme disjungsi merupakan penarikan yang sah sebab pernyataan $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ merupakan tautologi.

Bisakah kamu membuktikan tautologi ini?

Contoh 5.21

Tentukan konklusi dari premis-premis berikut ini.
Premis 1: Ali ataukah Tonny Burrows yang lahir di Australia
Premis 2: Ali tidak lahir di Australia

Penyelesaian:

a) Gunakan argumentasi silogisme dalam penarikan kesimpulannya, sebab premis-premisnya mengikuti pola penarikan kesimpulan itu, yaitu:

$p \vee q$	(B)	..... premis 1
$\sim p$	(B)	..... premis 2
$\therefore\ q$	(B)	..... kesimpulan/konklusi

b) $p \Rightarrow q$: Ali ataukah Tonny Burrows yang lahir di Australia
$\sim p$: Ali tidak lahir di Australia

$\therefore q$: Jadi, Tonny Burrows yang lahir di Australia

Latihan 5.F

Penarikan Kesimpulan

1. Tentukan sah dan tidaknya argumentasi berikut ini. Bila perlu gunakan tabel kebenaran

a) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim p \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$ b) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$ c) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow \sim q \\ \hline \therefore r \Rightarrow \sim r \end{array}$

d) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ \sim r \Rightarrow \sim q \\ \hline \therefore p \Rightarrow \sim r \end{array}$ e) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$ f) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ r \Rightarrow q \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$

g) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ \sim p \Rightarrow r \\ \hline \therefore r \Rightarrow q \end{array}$ h) $\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ r \Rightarrow p \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$ i) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore r \Rightarrow p \end{array}$

2. Tentukan sah dan tidaknya argumentasi berikut ini. Bila perlu gunakan tabel kebenaran

a) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \vee \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$ b) $\begin{array}{l} \sim q \vee p \\ p \Rightarrow r \\ \hline \therefore q \Rightarrow r \end{array}$

c) $\begin{array}{l} p \vee q \\ p \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$ d) $\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore p \end{array}$

Untuk diingat

"Ekuivalensi"

DUA pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen jika kedua pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran yang sama

1) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
2) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3) $p \vee q \equiv q \vee p$
4) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

e) $p \vee q$
$\sim p$
$\therefore q$

f) $\sim(p \wedge \sim q)$
$\sim q$
$\therefore p$

g) $q \vee \sim p$
$q \Rightarrow r$
$\sim r \vee s$
$\therefore q \Rightarrow r$

h) $\sim(\sim p \wedge q)$
$\sim p$
$\therefore q$

5) $p \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow \sim p$
6) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
8) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
9) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

3. Tariklah kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini.
   a) Premis 1 : Jika hari hujan maka jalan-jalan becek
      Premis 2 : Jalan-jalan *tidak* becek.
   b) Premis 1 : Jika bilangan bulat habis dibagi 6 maka juga habis dibagi 3
      Premis 2 : 60 habis dibagi 6
   c) Premis 1 : Jika ia kaya maka ia dermawan
      Premis 2 : Jika ia dermawan maka ia disenangi masyarakat

4. Periksalah manakah yang merupakan argumen yang sah
   a) Premis 1 : Jika planet dalam tata surya kita maka diselimuti atmosper
      Premis 2 : Pluto adalah planet dalam tata surya
      Konklusi : Jadi, pluto diselimuti atmosper
   b) Premis 1 : Jika logam maka benda itu padat
      Premis 2 : Baja adalah logam
      Konklusi : Jadi, baja adalah benda padat
   c) Premis 1 : Jika air dipanaskan maka ia dapat mendidih
      Premis 2 : Jika air mendidih maka ia dapat menguap
      Konklusi : Jadi, jika air dipanaskan maka ia dapat mendidih
   d) Premis 1 : Jika n bilangan prima ganjil maka n > 2
      Premis 2 : Jika n > 2 maka n2 > 4
      Konklusi : Jadi, jika n bilangan prima maka n > 2 maka n2 > 4

N. Pembuktian dengan Induksi Matematika

Untuk membuktikan kebenaran suatu rumus atau dalil, harus dibuktikan dengan memperlihatkan bahwa rumus atau dalil tersebut adalah akibat pernyataan lain *yang telah diterima kebenarannya* dan dari dalil-dalil yang telah dibuktikan.

Bukti Langsung

Bukti langsung yaitu membuktikan kebenaran suatu pernyataan menggunakan fakta-fakta yang telah tersedia.

Contoh 5.22

Jika a, b $\in$ R buktikan bahwa $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Penyelesaian:

a) Hukum distributif	$(a - b)(a + b)$	$= (a - b)\,a + (a - b)\,b$
b) Hukum distributif		$= a^2 - ab + ab - b^2$
c) Sifat komutatif		$= a^2 + ab - ab - b^2$
d) Lakukan pengurangan		$= a^2 - b^2$ (**terbukti**)

Taukah Kamu...?

Ketika orang-orang Eropa menerjemahkan warisan intelektual Yunani ke dalam bahasa Latin, mereka tidak langsung menerjemahkannya dari bahasa Yunani, melainkan mereka menerjemahkannya dari bahasa Arab yang menjadi bahasa peradaban dunia saat itu dan sebelum kebangkitan Eropa. Warisan intelektual Yunani ini telah diterjemahkan ke dalam bahasa Arab bersamaan dengan digalakkannya gerakan terjemah pada masa Khalifah Al-Ma'mun. Kemudian orang-orang Eropa mengutipnya ke dalam bahasa Latin dengan cara menyadur, mengkritik, dan menganalisanya. Hal inilah yang sangat berpengaruh bagi pemberdayaan pemikiran bangsa Eropa.

(Muhammad Algharib Jaudah)

Bukti Tak Langsung

Bukti tak langsung yaitu membuktikan kebenaran suatu pernyataan dengan menunjukkan bahwa *ingkarannya salah*.

Contoh 5.23

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah *bilangan irasional*.

Penyelesaian:

a) Misalkan dengan *ingkarannya*: $\sqrt{2}$ adalah bilangan *rasional* maka dapat dinyatakan $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan a, b $\in$ B yang tidak memiliki faktor persekutuan.

b) Dikuadratkan diperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$

$$a^2 = 2b^2$$

Jadi a bilangan genap dan dapat dinyatakan a = 2k, sehingga

$$a^2 = 2b^2$$
$$(2k)^2 = 2b^2$$
$$4k^2 = 2b^2$$
$$b^2 = 2k^2$$

c) Jadi b pun bilangan genap.

d) Karena a dan b bilangan genap maka a dan b mempunyai faktor persekutuan yaitu 2. Padahal pernyataan sebelumnya dikatakan bahwa a dan b tidak memiliki faktor persekutuan. Jadi, pemisalan $\sqrt{2}$ bilangan rasional adalah "salah". Sehingga $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$. Jadi $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Induksi Matematika

PERHATIKAN “fenomena” berikut dan ceklah kebenarannya

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$

Dapatkah kamu menemukan contoh yang lainnya? Dapatkah kamu menemukan contoh yang menyangkal kebenaran aturan itu? Benarkah penjumlahan n buah bilangan ganjil (2n -1) hasilnya sama dengan n2? Apakah untuk membuktikan kebenaran aturan itu kita melakukan penjumlahan seluruh bilangan ganjil yang ada? Mungkinkah?

Terkait dengan hal ini Sir Francis Bacon (1561 – 1626) seorang pelopor pemikir sains modern dari Inggris menyarankan dengan mengajukan pertanyaan yang unik: “Apakah untuk menyimpulkan kebenaran jumlah gigi kuda dewasa kita harus membuka seluruh mulut kuda yang ada di negeri ini?” Tentunya tidak. Jadi untuk menerima kebenaran fenomena di atas kita juga tidak perlu membuktikan penjumlahan seluruh bilangan ganjil satu persatu, melainkan dengan induksi matematika.

Sir Francis bacon
(1561 - 1626)

Adapun langkah-langkah induksi matematika adalah sebagai berikut:

i) Tunjukkan bahwa rumus benar untuk n = 1
ii) Dianggap benar bahwa rumus berlaku untuk n = k
iii) Buktikan bahwa rumus benar untuk n = k + 1

Perhatikan contoh berikut untuk membuktikan kebenaran fenomena di atas.

Contoh 5.24

Buktikan bahwa penjumlahan n buah bilangan ganjil sama dengan n^2, yaitu:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Penyelesaian:

a) Tunjukkan bahwa rumus benar untuk $n = 1$

$n = 1 \dashrightarrow 2n - 1 = n^2$

$2(1) - 1 = (1)^2$

$2 - 1 = 1$

$1 = 1$ (B)

b) Dianggap benar bahwa rumus berlaku untuk $n = k$

$n = k \dashrightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ (B) .... *)

c) Buktikan bahwa rumus benar untuk $n = k + 1$

$n = k + 1 \dashrightarrow$ Ruas kanan $= n^2$

Ruas kanan $= (k + 1)^2$

Ruas kanan $= k^2 + 2k + 1$

$n = k + 1 \dashrightarrow$ Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$

Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2(k + 1) - 1)$

Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k + 2 - 1)$

Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k + 1)$

Temukan sebuah suku sebelum suku terakhir (untuk menemukan suku sebelumnya kurangilah dengan 2, misal di depan 5 adalah 3)

Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + ((2k + 1) - 2) + (2k + 1)$

Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1)$

Lihat *) bahwa $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
sehingga diperoleh:

Ruas kiri = $k^2 + (2k + 1)$

Ruas kiri = $k^2 + 2k + 1$

Ruas kiri = ruas kanan (B)

d) Jadi *benar* bahwa $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Contoh 5.25

Buktikan bahwa $n(n + 1)(n + 2)$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan asli n

Penyelesaian:

a) Tunjukkan bahwa rumus benar untuk n = 1

$n = 1 \dashrightarrow n(n + 1)(n + 2)$

$= 1\,(1 + 1)(1 + 2)$

$= 1\,(2)\,(3)$

$= 6$, habis dibagi 6 (B)

b) Dianggap *benar* bahwa rumus berlaku untuk n = k

$n = k \dashrightarrow n(n + 1)(n + 2)$

$= k(k + 1)(k + 2)$, habis dibagi 6 (B)

c) Buktikan bahwa rumus benar untuk n = k + 1

$n = k + 1 \dashrightarrow n(n + 1)(n + 2)$

$= (k + 1)(k + 2)(k + 3)$

> Habis dibagi 6 dapat difikirkan sebagai pengurangan berturur-turut dengan 6 atau *dikurangi* dengan sesuat yang habis dibagi 6 sampai *sisanyapun* habis dibagi 6. Adapun sesuatu yang habis dibagi 6 yaitu k(k + 1)(k + 2), lihat bagian (b) di atas.

$= (k + 1)(k + 2)(k + 3) - k(k + 1)(k + 2)$

$= \{(k + 1)(k + 2)\}\,\{(k + 3) - k\}$

$= (k + 1)(k + 2).\ 3$ ....(sisanya)

Periksa bentuk (k + 1) (k + 2)
Untuk nilai k = ganjil maka (k + 1) (k + 2) hasilnya *genap*
Untuk nilai k = genap maka (k + 1) (k + 2) hasilnya *genap*
Karena (k + 1)(k + 2) genap maka dapat dimisalkan sebagai 2m

= 2m . 3
= 6m, sisanyapun habis dibagi 6

Dengan demikian (k + 1)(k + 2)(k + 3) habis dibagi 6 (B)

d) Karena rumus benar untuk n=1, n = k dan n = k + 1 maka terbukti n(n + 1)(n + 2) habis dibagi 6

Contoh 5.26

Buktikan bahwa $7^n - 2^n$ selalu terbagi habis oleh 5, untuk setiap bilangan asli n

Penyelesaian:

Misalkan p(n) menyatakan 7n – 2n terbagi habis oleh 5

a) Tunjukkan bahwa rumus benar untuk n = 1

n = 1 --------→ $7^n - 2^n$
$7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5$
5 habis dibagi 5 (B)

b) Diasumsikan p(k) benar untuk suatu bilangan asli k, yaitu 7k – 2k terbagi habis oleh 5

c) Dan akan ditunjukkan benar untuk p(k + 1), yaitu 7k + 1 – 2k +1 terbagi habis oleh 5. Perhatikan berikut ini:

$7^{k+1} - 2^{k+1}$ $= 7^k . 7 - 2^k . 2$
$= 7^k . 7 - 2^k . 2 + (-2^k . 7 + 2^k . 7)$ Apa artinya?
$= 7^k . 7 - 2^k . 7 + 2^k . 7 - 2^k . 2$
$= (7^k . 7 - 2^k . 7) + (2^k . 7 - 2^k . 2)$

$= 7(7^k - 2^k) + 2^k(7 - 2)$
$= 7(7^k - 2^k) + 2^k . 5$

Telah diasumsikan bahwa $(7^k - 2^k)$ terbagi habis oleh 5, maka $7(7^k - 2^k)$ terbagi habis oleh 5 pula sebab memiliki faktor 5 pula. Sedang 2k.5, jelas terbagi habis oleh 5. Jadi $7(7^k - 2^k) + 2^k . 5$ habis terbagi oleh 5.

Latihan 5.G

Bukti langsung, Bukti tak langsung dan Induksi Matematika

1. Dengan bukti langsung buktikan bahwa:

   a) Jika x_1 dan x_2 akar-kar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka $(x_1 - x_2)^2 = \frac{D}{a^2}$ dimana $D = b^2 - 4ac$

   b) $(\cos A + \sin A)^2 + (\cos A - \sin A)^2 = 2$

   c) $(a - b)^2 = (a + b) - 4ab$

   d) Jika $y = mx + c$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ buktikan bahwa $c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

2. Buktikan bilangan-bilangan berikut ini adalah bilangan irasional

   a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{13}$

3. Buktikan bahwa $4 + 8 + 12 + 16 + ... + 4n = 2n(n + 1)$ untuk setiap bilangan asli n

4. Buktikan bahwa $3 + 8 + 13 + 18 + ... + (5n - 2) = \frac{1}{2}n(5n + 1)$ untuk setiap bilangan asli n

5. Buktikan bahwa $(1 \times 2) + (2 \times 3) +... + n(n + 1) = \frac{1}{3}$ $n(2n- 1)(2n + 1)$ untuk setiap bilangan asli n

6. Buktikan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}$ $n(n + 1)(2n + 1)$untuk setiap bilangan asli n

7. Buktikan bahwa $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$untuk setiap bilangan asli n

8. Buktikan bahwa $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 3n = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)2$ untuk setiap bilangan asli n

9. Buktikan bahwa untuk setiap n bilangan asli berlaku
   a) $n^2 (n^2 + 1)$ habis dibagi 4
   b) $5^2 n - 1$ habis dibagi 3
   c) $3^{2n} - 1$ habis dibagi 8

10. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $11^n - 4^n$ terbagi habis oleh 7

Soal-soal Kontekstual

TABEL KEBENARAN DENGAN EXCEL

Dalam kelompokmu, ekplorasilah tabel kebenaran *konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi* dengan menggunakan Microsoft Excel. Asyik sekali memang!, ternyata Microsof Excel dapat "memutuskan" benar salahnya terhadap pernyataan majemuk yang diberikan. Nah, sekarang perhatikan kesetaraan simbol logika dan fungsi pada Microsoft Excel.

Simbol logika	Fungsi pada Excel
$p \wedge q$	= AND(p;q)
$p \vee q$	= OR(p,q)
$p \Rightarrow q$	= OR(AND(p;q);NOT(p))
$p \Leftrightarrow q$	= OR(AND(p;q);(AND(NOT(p);NOT(q))))

Dapatkah kamu menjelaskan mengapa implikasi dan biimplikasi masing-masing bisa formulasikan sebagai

=OR(AND(p;q);NOT(p)) dan =OR(AND(p;q);(AND(NOT(p);NOT(q))))?

Diskusikan dengan temanmu!

Perhatikan hasil investigasi tabel kebenaran dengan Microsoft Excel sebagai berikut. TRUE = BENAR (B) dan FALSE = SALAH (S).

a. Tabel Kebenaran Konjungsi

fx =AND(B3;C3)

B	C	D
p	q	p AND q
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	FALSE

b. Tabel Kebenaran Disjungsi

fx =OR(B3;C3)

B	C	D
p	q	p OR q
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	FALSE

c. Tabel Kebenaran Implikasi

fx =OR(AND(B3;C3);NOT(B3))

B	C	D
p	q	p OR q
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	TRUE

d. Tabel Kebenaran Biimplikasi

=OR(AND(B3;C3);(AND(NOT(B3);NOT(C3))))

p	q	p OR q
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	TRUE

Investigasi

Dengan menggunakan Microsoft Excel temukan tabel kebenaran dari pernyataan majemuk berikut ini:

a. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$
b. $p \wedge (\sim p \wedge q)$

O. Matematika dalam Dunia Kerja

Assalamu'alaikum, namaku Badi'ul Hikmah. Aku bekerja di bagian bendahara ketatausahaan pada sebuah Madrasah Aliyah. Aku harus bisa mengelola keuangan dengan baik dan sekaligus memberikan laporan dengan cepat untuk diambil keputusan, biasanya, sebelum semester berlangsung.

Sumber: www.iiees.ac.ir

Alhamdulillah sekarang telah hadir program Microsoft Excel. Dengan ilmu logika terutama penggunaan implikasi dan konjungsi aku padukan dalam fungsi Excel untuk mengetahui dengan cepat mana siswa yang sudah melunasi administrasi sekolah/madrasah dan mana yang belum. Rasanya akan memerlukan banyak waktu jika aku melakukannya secara manual untuk mengecak satu persatu dari jumlah siswa kurang lebih 12 kelas.

Nih...tak berikan sedikit ilustrasi dalam kerjaku yang harus aku cek sebagai syarat mengikuti semester gasal tahun ini. Uang gedung harus sudah membayar minimal Rp500000,00, SPP harus lunas paling sedikit 6 bulan atau 6 × Rp75.000,00 dan biaya internet 6 × Rp50000,00.

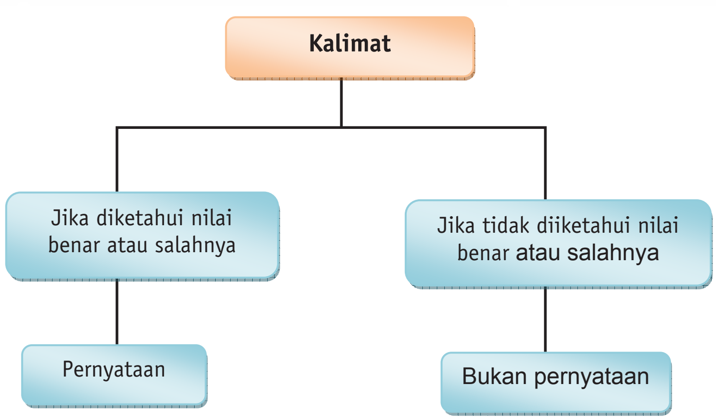
F3 fx =IF(AND(AND(C3>=500000;D3>=450000);E3>=300000); "Lunas"; "Belum Lunas")

	A	B	C	D	E	F
1						
2	NO	NAMA SISWA	UANG GEDUNG	SPP	INTERNET	KETERANGAN
3	1	Ana Sofiana	500000	375000	300000	Belum Lunas
4	2	Aan Kunaefi	500000	450000	300000	Lunas
5	3	Badriyah	500000	450000	300000	Lunas
6	4	Budi Prasetyo	500000	450000	250000	Belum Lunas
7	5	M. Akhsan	500000	450000	300000	Lunas
8	6	Nabila Aulia F.	500000	450000	300000	Lunas
9	7	Naela A.	500000	450000	300000	Lunas

Sudah dulu ya .., selamat mencoba!

Rangkuman

1. Pernyataan dan bukan pernyataan



2. Ingkaran pernyataan p adalah ~p dapat diperoleh dengan cara menambahkan kalimat “*tidak benar bahwa*” di depan pernyataan p atau dengan menyisipkan perkataan “*tidak*” atau “*bukan*” di dalam pernyataan p. Jika pernyataan semula bernilai benar, maka ingkarannya bernilai salah, dan jika pernyataan semula bernilai salah maka ingkarannya bernilai benar.

3. Pernyataan majemuk ditinjau dari kata hubung dan nilai kebenarannya

4. *Konjungsi* adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung “dan”. Konjungsi dari pernyataan p dan pernyataan q dinotasikan oleh “$p \wedge q$” (dibaca p dan q).

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

5. Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung “atau”. Disjungsi dari pernyataan p dan pernyataan q dinotasikan oleh “$p \wedge q$” (dibaca p atau q)

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

6. *Implikasi* adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung "jika ..... maka.....". Implikasi dari pernyataan p terhadap q dinotasikan oleh " $p \Rightarrow q$" dapat dibaca "jika p maka q"

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

7. *Biimplikasi* adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal dengan menggunakan kata hubung ".... jika dan hanya jika....." Biimplikasi dari pernyataan p dan pernyataan q dinotasikan oleh "$p \Leftrightarrow q$", dibaca "jika p maka q dan jika q maka p"

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

8. Negasi konjungsi dan disjungsi:

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) = \sim p \vee \sim q$$

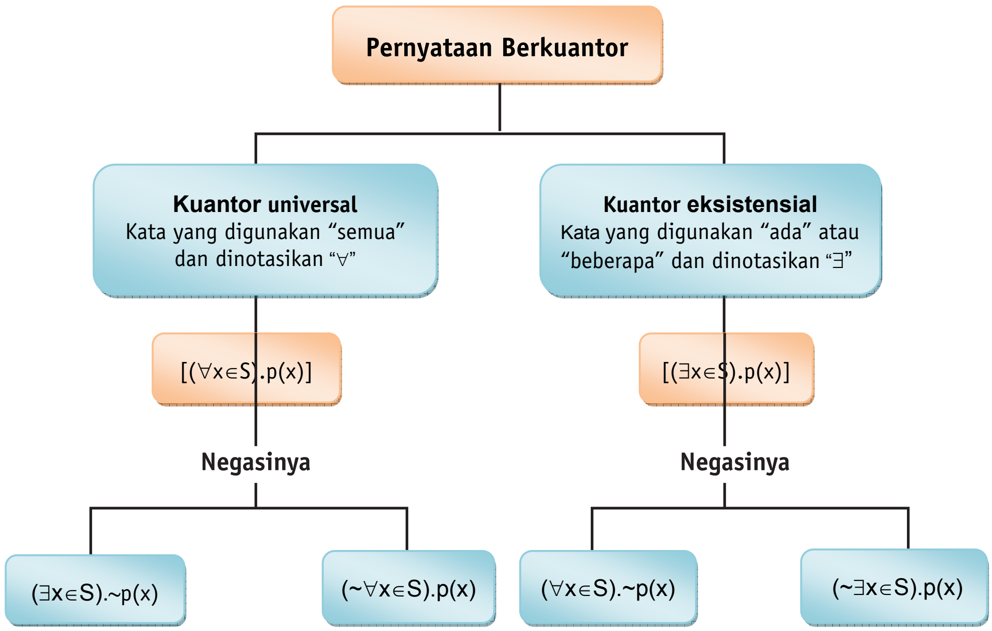
9. Negasi implikasi:

$$\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$$

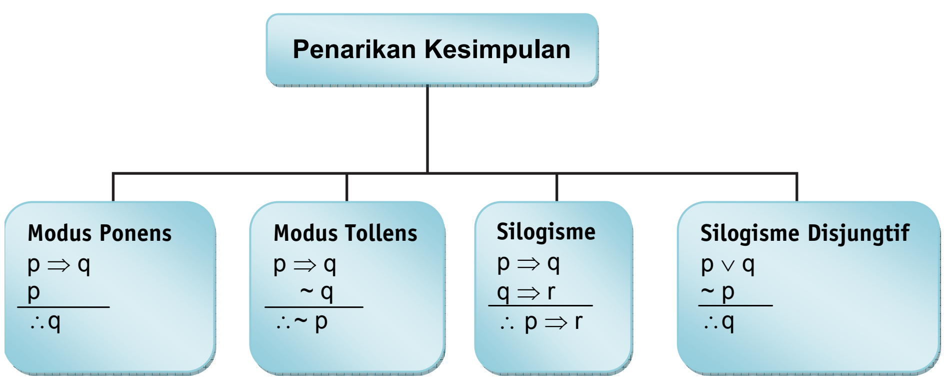
10. Hubungan invers, konvers dan kontraposisi

$$\begin{tikzcd}
p \Rightarrow q \arrow[r, "\text{Konvers}"] \arrow[d, "\text{Invers}"'] \arrow[dr, "\text{Kontraposisi}"] & q \Rightarrow p \\
\sim p \Rightarrow \sim q & \sim q \Rightarrow \sim p
\end{tikzcd}$$

11. Pernyataan berkuantor dan negasinya



12. Penarikan kesimpulan di dalam ilmu logika

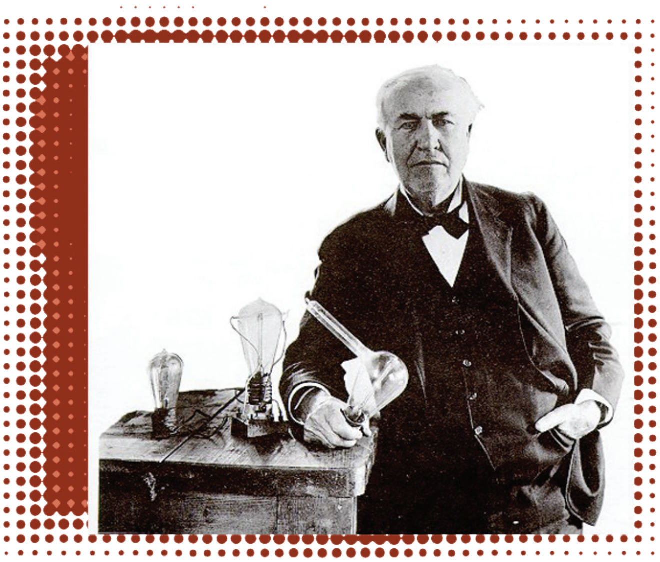


13. Dua pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen jika kedua pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran yang sama

1) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
2) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3) $p \vee q \equiv q \vee p$
4) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
5) $p \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow \sim p$
6) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
8) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
9) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

14. Langkah-langkah induksi matematika adalah:
    i) Tunjukkan bahwa rumus benar untuk n = 1
    ii) Dianggap benar bahwa rumus berlaku untuk n = k
    iii) Buktikan bahwa rumus benar untuk n = k + 1

Inspirasi Pagi .....



Sumber: www. rri-online com

Thomas Alva Edison, dinilai oleh gurunya terlalu bodoh dan bahkan ia dikeluarkan (di-*drop out*) dari sekolah. Akan tetapi, ia memiliki impian dan semangat yang besar. Meski ia menyadari keterbatasannya. Lalu sang ibu mengajarkannya membaca, menulis dan berhitung. Ternyata, dengan cepat ia menyerap apa yang diajarkan ibunya. Ia kemudian termotivasi dan sangat gemar membaca. Berbagai buku habis dilahapnya. Berjilid-jilid ensiklopedi dibacanya tanpa jemu. Selanjutnya, sejarah ilmu pengetahuan mencatat namanya sebagai penemu terbesar dunia. Ia menemukan 3.000 penemuan, di antaranya lampu listrik, sistim distribusi listrik, stasiun tenaga listrik, mikrofon, proyektor film (kinetoskop), laboratorium riset untuk industri, fonograf (berkembang jadi tape-recorder), dan kinetograf (kamera film). Sungguh luar biasa! (Prembayun Miji Lestari)

Ujilah dirimu

Soal Pilihan Ganda

1. Kalimat berikut ini merupakan pernyataan, kecuali....
   a. Banyaknya titik sudut suatu segitiga adalah 3
   b. Matahari terbit dari sebelah barat
   c. Satu minggu terdiri atas 7 hari
   d. Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil
   e. Jumlah dari tiga buah bilangan yang sama adalah 15
2. Di bawah ini yang bukan pernyataan adalah....
   a. Jakarta ibukota Republik Indonesia
   b. Ada bilangan prima yang genap
   c. Semua bilangan prima ganjil
   d. Bunga itu indah
   e. Ada segitiga yang jumlah sudutnya tidak 180°
3. Berikut ini yang merupakan penyataan bernilai benar adalah ....
   a. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ untuk $x = -1$
   b. $3x - 5 = 4$ untuk $x = 2$
   c. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ melalui titik $(-2, 0)$
   d. $(x + 3)^2 > 0$ untuk semua x anggota bilangan riil
   e. Besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 50°, 70°, 80°
4. Pernyataan majemuk dalam bentuk "p dan q" disebut ....
   a. disjungsi
   b. negasi
   c. konjungsi
   d. implikasi
   e. biimplikasi
5. Jika diketahui pernyataan p benar dan q salah, maka pernyataan di bawah ini yang benar adalah ....
   a. $p \Rightarrow q$
   b. $\sim p \vee q$
   c. $\sim p \wedge q$
   d. $\sim p \Rightarrow q$
   e. $\sim p \vee \sim q$

6. Jika pernyataan p bernilai salah dan pernyataan q bernilai benar, maka pernyataan berikut yang bernilai salah adalah ....
   a. $p \vee q$
   b. $p \Rightarrow q$
   c. $\sim p \Rightarrow \sim q$
   d. $\sim p \wedge q$
   e. $\sim p \vee \sim q$
7. Dua pernyataan p dan q
   p : bernilai benar
   q : bernilai salah
   Pernyataan majemuk di bawah ini bernilai benar, kecuali ....
   a. $p \vee q$
   b. $p \wedge \sim q$
   c. $\sim p \Rightarrow q$
   d. $\sim p \vee q$
   e. $\sim(p \Leftrightarrow q)$
8. Ingkaran pernyataan "semua murid menganggap matematika sukar" ialah ....
   a. beberapa murid menganggap matematika sukar
   b. semua murid menganggap matematika sukar
   c. ada murid yang menganggap matematika tidak sukar
   d. tidak seorangpun menganggap matematika tidak sukar
   e. ada murid tidak menganggap matematika mudah
9. Negasi dari pernyataan: "Semua orang makan nasi" adalah ....
   a. beberapa orang tidak makan nasi
   b. semua orang tidak makan nasi
   c. tidak semua orang tidak makan nasi
   d. tidak semua orang makan nasi
   e. beberapa orang makan nasi
10. Ingkaran pernyataan: "Semua siswa tidak membuat tugas kokurikuler" adalah ....
    a. semua siswa tidak membuat tugas kokurikuler
    b. ada siswa yang tidak membuat tugas kokurikuler
    c. beberapa siswa membuat tugas kokurikuler
    d. beberapa siswa tidak membuat tugas kokurikuler
    e. tidak ada siswa membuat tugas kokurikuler

11. Ingkaran pernyataan: “Beberapa peserta ujian membawa kalkulator” adalah ....
    a. beberapa peserta ujian tidak membawa kalkulator
    b. bukan peserta ujian membawa kalkulator
    c. semua peserta ujian membawa kalkulator
    d. semua peserta ujian tidak membawa kalkulator
    e. tidak peserta ujian tidak membawa kalkulator

12. Negasi dari pernyataan: “Jika upah buruh naik maka harga barang naik” adalah....
    a. jika upah buruh tidak naik maka harga barang naik
    b. jika harga barang naik maka upah buruh naik
    c. upah buruh naik dan harga barang naik
    d. upah buruh naik atau harga barang naik
    e. harga barang naik jika dan hanya jika upah buruh naik

13. Negasi dari pernyataan: “Jika waktu istirahat tiba maka semua peserta meninggalkan ruangan” adalah ....
    a. jika ada peserta yang meninggalkan ruangan maka waktu istirahat tiba
    b. jika ada peserta yang tidak meninggalkan ruangan maka waktu istirahat tiba
    c. tidak ada peserta yang tidak meninggalkan ruangan dan waktu istirahat tiba
    d. waktu istirahat tiba dan ada peserta yang tidak meninggalkan ruangan
    e. waktu istirahat tiba dan semua peserta meninggalkan ruangan

14. Negasi dari “Jika perang terjadi maka semua orang gelisah” adalah....
    a. perang terjadi dan semua orang tidak gelisah
    b. perang terjadi dan ada orang gelisah
    c. perang terjadi tetapi semua orang gelisah
    d. perang terjadi dan tidak ada orang gelisah
    e. perang terjadi dan ada orang yang tidak gelisah

15. Ingkaran dari $(p \wedge q) \Rightarrow r$ adalah....
    a. $\sim p \vee \sim q \vee r$
    b. $(\sim p \wedge q) \vee r$
    c. $p \wedge q \wedge \sim r$
    d. $\sim p \wedge \sim q \wedge r$
    e. $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$

16. Invers dari pernyataan “Jika saya tidak datang maka saya pergi” adalah....
    a. jika ia datang maka saya pergi
    b. jika ia datang maka saya tidak pergi
    c. jika ia tidak datang maka saya tidak pergi
    d. jika saya pergi maka ia tidak datang
    e. jika saya tidak pergi maka ia datang

17. Konvers dari kalimat “Jika ia seorang Belanda maka ia orang Eropa” adalah....
    a. jika ia bukan orang Eropa maka ia bukan orang Belanda
    b. jika ia bukan orang Belanda maka ia tentu orang Eropa
    c. jika ia bukan orang Belanda maka ia bukan orang Eropa
    d. jika ia orang Belanda maka ia belum tentu orang Eropa
    e. jika ia orang Eropa maka ia orang Belanda

18. Kontraposisi dari “Jika sungai itu dalam maka sungai itu banyak ikannya” adalah....
    a. jika sungai itu tidak dalam maka sungai itu tidak banyak ikannya
    b. jika sungai itu banyak ikannya maka sungai itu dalam
    c. jika sungai itu tidak banyak ikannya maka sungai itu tidak dalam
    d. jika sungai itu dalam maka ikannya tidak banyak
    e. jika sungai itu dalam maka sungai itu banyak ikannya

19. Invers dari pernyataan $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$ adalah....
    a. $\sim p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
    b. $\sim p \Rightarrow (p \vee \sim q)$
    c. $(\sim p \vee q) \Rightarrow p$
    d. $(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim p$
    e. $(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$

20. Kontraposisi dari pernyataan $\sim p \Rightarrow \sim q$ adalah....
    a. $\sim p \Rightarrow q$
    b. $\sim q \Rightarrow \sim p$
    c. $q \Rightarrow \sim p$
    d. $p \Rightarrow q$
    e. $q \Rightarrow p$

21. Kontraposisi dari $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ adalah....
    a. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
    b. $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
    c. $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
    d. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
    e. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

22. Suatu pernyataan yang sesuai dengan pernyataan: “Jika anda datang maka saya tidak pergi” adalah ....
    a. jika saya pergi maka anda tidak datang
    b. jika saya tidak pergi maka anda datang
    c. jika anda datang maka saya pergi
    d. jika anda tidak datang maka saya tidak pergi
    e. jika saya pergi maka anda datang

23. Pernyataan majemuk: “Jika hari hujan maka sungai meluap”, ekuivalen dengan ....
    a. hari hujan dan sungai meluap
    b. hari tidak hujan dan sungai tidak meluap
    c. jika sungai meluap maka hari tidak hujan
    d. jika sungai tidak meluap maka hari tidak hujan
    e. jika hari tidak hujan maka sungai tidak meluap

24. Perhatikan penarikan kesimpulan di bawah ini, yang disebut Modus Ponens adalah ....

a. $\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & (B) \\ a & (B) \\ \hline \therefore b & (B) \end{array}$

d. $\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & (B) \\ \sim b & (B) \\ \hline \therefore \sim a & (B) \end{array}$

b. $\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & (B) \\ a & (B) \\ \hline \therefore a & (B) \end{array}$

e. $\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & (B) \\ a \Rightarrow c & (B) \\ \hline \therefore a \Rightarrow c & (B) \end{array}$

c. $\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & (B) \\ a & (B) \\ \hline \therefore \sim b & (B) \end{array}$

25. Penarikan kesimpuln yang merupakan Silogisme adalah

a. $\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ p & (B) \\ \hline \therefore q & (B) \end{array}$

d. $\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ p \Rightarrow r & (B) \\ \hline \therefore p \Rightarrow r & (B) \end{array}$

b. $$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ q & (B) \\ \hline \therefore q & (B) \end{array}$$

c. $$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ \sim p & (B) \\ \hline \therefore \sim q & (B) \end{array}$$

e. $$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ q \Rightarrow r & (B) \\ \hline \therefore p \Rightarrow r & (B) \end{array}$$

26. Cara mengambil kesimpulan

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ p & (B) \\ \hline \text{Jadi } q & (B) \end{array}$$

disebut....
a. modus tollens
b. modus ponens
c. silogisme
d. implikasi
e. biimplikasi

27. Diberikan argumentasi-argumentasi

I. $$\begin{array}{ll} \sim p \Rightarrow \sim q & (B) \\ p & (B) \\ \hline \therefore q & (B) \end{array}$$

II. $$\begin{array}{ll} p \Rightarrow \sim q & (B) \\ p & (B) \\ \hline \therefore \sim q & (B) \end{array}$$

III. $$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (B) \\ q \Rightarrow r & (B) \\ \hline \therefore p \Rightarrow r & (B) \end{array}$$

Argumen yang sah adalah....
a. I, II, dan III
b. I dan II saja
c. I dan III saja
d. II dan III saja
e. III saja

28. Kesimpulan dari tiga premis

1) $p \Rightarrow q$ 2) $q \Rightarrow r$ 3) $\sim r$

adalah....

a. p
b. q
c. r
d. $\sim p$
e. $\sim r$

29. Diketahui premis I $p \rightarrow \sim q$ (B)

premis II $q \vee r$ (B)

$$\therefore\ p \rightarrow r \text{ (B)}$$

Kesimpulan tersebut merupakan....

a. konvers
b. kontraposisi
c. modus Ponens
d. modus tollens
e. silogisme

30. Penarikan kesimpulan dari premis-premis

$p \vee q$ (B)

$\sim q$ (B)

.... adalah ....

a. p
b. $\sim p$
c. q
d. $\sim(p \vee q)$
e. $\sim q$

"Berhentinya seseorang dari aktivitas adalah kelalaian. Kekosongan adalah musuh yang mematikan, dan kesenggangan adalah sebuah kemalasan. Dan, kebanyakan orang yang selalu gundah dan hidup dalam kecemasan adalah mereka yang terlalu banyak waktu senggangnya"

(*Dr. 'Aidh al-Qarni*)