

PERTIDAKSAMAAN SATU VARIABEL

Katakanlah: “Adakah sama orang buta dan yang dapat melihat, atau samakah gelap gulita dan terang benderang; apakah mereka menjadikan beberapa sekutu bagi Allah yang dapat menciptakan seperti ciptaan-Nya sehingga kedua ciptaan itu serupa menurut pandangan mereka?” Katakanlah: “Allah adalah Pencipta segala sesuatu dan Dia-lah Tuhan Yang Maha Esa lagi Maha Perkasa.”
(Q.S. Ar Ra’ad :16)

Kenaikan biaya listrik tahun ini lebih rendah dari tahun kemarin karena sudah berdirinya pembangkit listrik tenaga nuklir. Kenaikan diperkirakan kurang dari 20% dan minimal 10%. Jika sebelumnya Pak Harun membayar biaya listrik sebesar Rp250.000,00 per-bulan. Apakah kenaikannya di tahun ini lebih dari Rp75.000,00 per bulan?

Standar Kompetensi

Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dan pertidaksamaan satu variabel

Kompetensi Dasar

1. Menyelesaikan pertidaksamaan satu variabel yang melibatkan bentuk pecahan aljabar.
2. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan satu variabel.
3. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan satu variabel dan penafsirannya.



Indikator

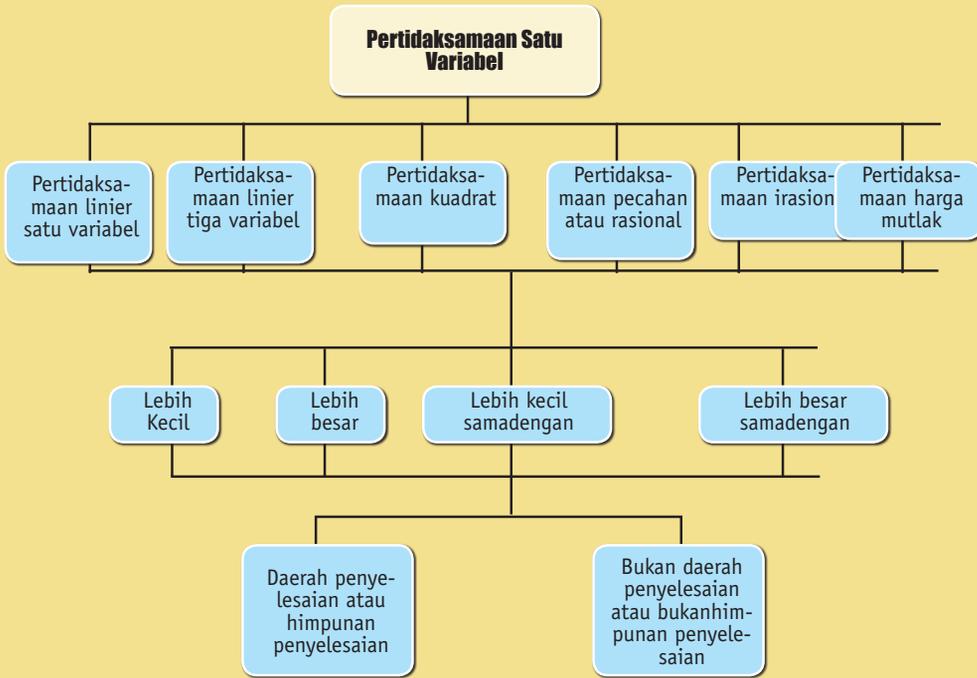
Setelah mempelajari pokok bahasan dalam bab ini, kamu diharapkan mampu:

1. Menentukan syarat penyelesaian pertidaksamaan yang melibatkan bentuk pecahan aljabar.
2. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan satu variabel yang melibatkan bentuk pecahan aljabar.
3. Mengidentifikasi masalah yang berhubungan dengan pertidaksamaan satu variabel.
4. Membuat model matematika yang berhubungan dengan pertidaksamaan satu variabel.
5. Menentukan penyelesaian model matematika dari masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan satu variabel berbentuk pecahan aljabar.
6. Menafsirkan hasil penyelesaian masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan satu variabel berbentuk pecahan aljabar.



Saat kita berusaha meraih sesuatu kemudian kita tidak bisa meraihnya adalah sebuah kegagalan. Saya tidak mengatakan keberhasilan yang tertunda. Tetapi dibalik kegagalan tersebut ada keberhasilan lain, yaitu kita mengetahui cara meraih sesuatu yang salah, sehingga kita tidak akan mengulang cara tersebut

Peta Konsep



Kata Kunci

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| Variabel | Pertidaksamaan |
| Lebih besar | Lebih kecil |
| Definit negative | Definit positif |
| Lebih besar sama dengan | Diskriminan |
| Pecahan rasional | Memotong |
| Lebih kecil sama dengan | Harga mutlak |
| Selang atau interval | Himpunan penyelesaian |

Sebelum mengkaji sistem persamaan linier dan kuadrat, marilah kita baca dan kaji bersama Surah Ar-Ra'ad: 16 berikut ini.

.... قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الْأَعْمَىٰ وَالْبَصِيرُ أَمْ هَلْ تَسْتَوِي الظُّلُمَاتُ وَالنُّورُ

أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَبَّهُ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ

قُلِ اللَّهُ خَلِقُ كُلِّ شَيْءٍ وَهُوَ الْوَاحِدُ الْقَهْرُ

Artinya:

Katakanlah: "Apakah sama orang buta dan yang dapat melihat, atau samakah gelap gulita dan terang benderang; apakah mereka menjadikan beberapa sekutu bagi Allah yang dapat menciptakan seperti ciptaan-Nya sehingga kedua ciptaan itu serupa menurut pandangan mereka?" Katakanlah: "Allah adalah Pencipta segala sesuatu dan Dia-lah Tuhan Yang Maha Esa lagi Maha Perkasa" .

Pada bab 2 kita telah mempelajari persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat. Dalam bab ini kita akan melanjutkannya dengan pertidaksamaannya. Coba perhatikan ilustrasi berikut!

Sebuah kapal yang memuat bantuan kemanusiaan, melakukan perjalanan dari pelabuhan A ke pelabuhan B yang berjarak yang berjarak 500 km. Kapal tersebut diharapkan tiba di pelabuhan B dalam waktu kurang dari 4 jam. Berapakah kecepatan rata-rata minimumnya?



Aku akan menjadi abdi bagi siapa saja yang telah mengajarku satu huruf

(Sayidina Ali)

Kuis Apersepsi

Sudah siapkah kamu berpetualang di belantara “Pertidaksamaan” ini? Untuk mengukur apakah kamu termasuk orang yang sudah siap atau tidak, kamu bisa menguji diri lewat kuis apersepsi ini. Jika kamu bisa menjawab seluruhnya, berarti kamu sudah siap mengikuti penjelajahan matematika ini. Jika tidak, maka kamu harus mengulangi sampai benar-benar bisa. Sudah siapkah?



1. Himpunan $\{x \mid -2 < x \leq 3\}$ dapat dinyatakan ke dalam bentuk interval sebagai:

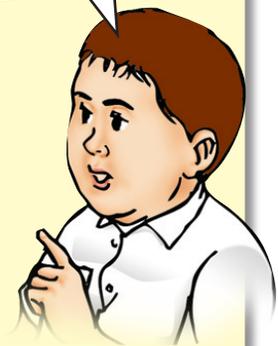
- a. 
- b. 
- c. 
- d. 

2. Bentuk $-2x + 5 > 7$ setara dengan

- a. $-2x > -2$
- b. $-2x < -2$
- c. $2x < -2$
- d. $2x > -2$

3. Himpunan penyelesaian dari $3x - 5 \geq -5x + 3$ adalah

- a. $\{x \mid x \geq 1\}$
- b. $\{x \mid x \geq -1\}$
- c. $\{x \mid x \leq 1\}$
- d. $\{x \mid x \leq -1\}$

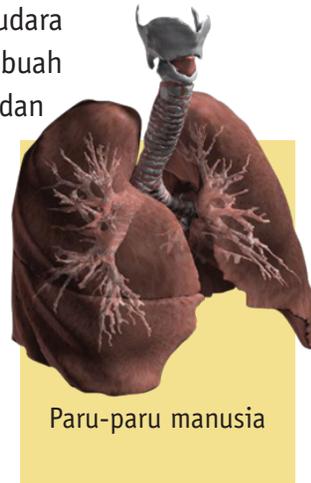


A. Matematika dalam Bidang Kesehatan

KAPASITAS VITAL PARU-PARU

PERNAHKAH Kamu berpikir berapa banyak udara yang ada dalam paru-parumu? Ambilah sebuah balon! Sekarang tariklah nafas dalam-dalam, dan lihatlah berapa banyak udara yang dapat kamu tiupkan ke dalam balon. Banyaknya udara yang dapat kamu tiupkan ke dalam balon dinamakan "*vital capacity*".

Banyaknya udara tersebut diukur dalam satuan liter. *Vital capacity* tergantung beberapa faktor diantaranya *usia* dan *tinggi badan*. Formula untuk menghitung kapasitas vital ideal paru-paru sebagai berikut.



Paru-paru manusia

Sumber: www.fractal.org

Kapasitas vital seorang laki-laki = $0,057H - 0,022A - 4,23$

Kapasitas vital seorang perempuan = $0,041H - 0,018A - 2,69$

Keterangan:

H = Tinggi badan seseorang (dalam cm)

A = Usia seseorang (dalam tahun)

Misalnya, kamu seorang wanita berusia 13 tahun dengan tinggi tubuh 130 cm. Kapasitas vital ideal paru-parumu adalah

$$\begin{aligned} \text{Kapasitas vital} &= (0,041 \times \text{tinggi tubuh}) - (0,018 \times \text{usia}) - 2,69 \\ &= (0,041 \times 130) - (0,018 \times 13) - 2,69 \\ &= 2,406 \text{ liter} \end{aligned}$$

Sekarang, hitunglah kapasitas vital paru-parumu berdasarkan formula di atas. Kemudian bandingkan perhitungan di atas dengan perhitungan dari hasil meniupkan udara ke dalam balon

(*lebih besar ">", lebih kecil "<"* ataukah *sama "="* dengan kapasitas vital ideal paru-parumu?).

(Volume balon = $\frac{4}{3}\pi r^3$, r adalah jari-jari balon)

Misalkan jari-jari balon 8 cm, maka:

$$V \cong 4 \times 3,14 \times 83 \text{ cm}^3$$

$V \cong$ liter

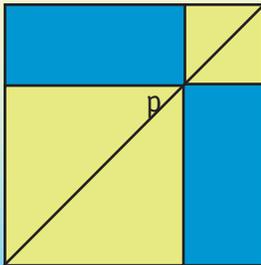
B. Pengertian Pertidaksamaan

Pertidaksamaan matematika pada dasarnya adalah hubungan matematika yang mengurutkan besar kecilnya bilangan-bilangan. Simbol-simbol di samping ini adalah simbol yang digunakan untuk menyatakan *pertidaksamaan*. Sebagai contoh, pertidaksamaan $3 < 10$ dikatakan bahwa bilangan 3 kurang dari bilangan 10.

Simbol	Arti
$<$	lebih kecil
\leq	lebih kecil sama dengan
$>$	lebih besar
\geq	lebih besar sama dengan



Investigasi



Jika P adalah sembarang titik pada persegi. Selidikilah bahwa luas daerah persegi panjang warna biru selalu lebih kecil atau sama dengan (\leq) luas daerah persegi panjang warna kuning.



PENYELESAIAN dari pertidaksamaan seperti $-2x + 6 > 0$ adalah nilai-nilai untuk x sehingga bentuk $-2x + 6$ memiliki nilai lebih besar dari nol. Hukum-hukum dalam aljabar dapat diterapkan untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Teorema 4.1

Penambahan dan pengurangan pada pertidaksamaan

Tanda pertidaksamaan tidak berubah jika dilakukan penambahan atau pengurangan dengan suatu bilangan yang sama pada kedua ruasnya

Bukti:

Misalkan k adalah bilangan yang akan ditambahkan pada $a < b$.

Karena $a < b$ maka

$$a - b = n, \quad n < 0 \text{ (Mengapa?)}$$

$$a - b + (k - k) = n, \quad n < 0 \text{ (Mengapa?)}$$

$$a + k - b - k = n, \quad n < 0$$

$$(a + k) - (b + k) = n, \quad n < 0$$

Karena $n < 0$ maka

$$a + k < b + k$$

Berdasarkan teorema 4.1, jika aku mengurangi dengan 3 kedua ruas pertidaksamaan $3x + 5 > 7$ maka arah tanda pertidaksamaannya tidak berubah, yaitu:

$$3x + 5 - 3 > 7 - 3$$

$$3x + 2 > 4$$



Taukah Kamu...?

Abad pertengahan adalah abad antara jatuhnya Romawi ke tangan bangsa Barbar Jerman pada tahun 476 M hingga pemerintahan Turki Utsmani menaklukkan konstantinopel pada tahun 1453 M. Secara singkat, barangkali masa ini adalah masa tahun 500 M hingga tahun 1500 M, dan ini merupakan abad kegelapan (*the dark age*) bagi bangsa Eropa. Sedangkan bagi dunia Islam, masa ini merupakan masa keemasan dan kejayaan.

(Muhammad Algharib Jaudah)

Teorema 4.2

Perkalian atau pembagian pada pertidaksamaan dengan bilangan positif

Tanda pertidaksamaan *tidak berubah* jika dilakukan perkalian atau pembagian dengan bilangan positif pada kedua ruasnya.

Bukti:

Misalkan $a < b$ dan $k > 0$

$$a - b < n, n < 0$$

Kalikan kedua ruas dengan k diperoleh:

$$k(a - b) = kn, kn < 0 \text{ (sebab } n < 0 \text{ dan } k > 0)$$

$$ka - kb = kn, kn < 0$$

Karena $kn < 0$ maka

$$ka < kb$$

Berdasarkan teorema 4.2, jika aku mengalikan 2 kedua ruas pertidaksamaan $3x > 7$ maka *arah tanda pertidaksamaannya tidak berubah*, yaitu:

$$2(3x) > 2(7)$$

$$6x > 14$$



Teorema 4.3

Perkalian atau pembagian pada pertidaksamaan dengan bilangan negatif

Tanda pertidaksamaan akan berubah jika dilakukan perkalian atau pembagian dengan bilangan negatif pada kedua ruasnya.

Bukti:

Misalkan $a < b$ dan $k < 0$

$$a - b < n, n < 0$$

Kalikan kedua ruas dengan k diperoleh:

$$k(a - b) = kn, kn > 0$$

(sebab $n < 0$ dan $k < 0$)

$$ka - kb = kn, kn > 0$$

Oleh karena $kn > 0$ maka

$$ka > kb$$

Berdasarkan teorema 4.3, jika aku mengalikan dengan -2 kedua ruas pertidaksamaan $3x > 7$ maka *arah tanda pertidaksamaannya akan berubah*, yaitu:

$$-2(3x) < -2(7)$$

$$-6x < -14$$

Semula " $>$ " menjadi " $<$ "





Problem Solving

Benarkah $9 < 2$?



Perhatikan sejumlah proses berikut!

1. Misalkan $a = 7$ dan $b = 2$ maka : $a < b$
2. Kalikan dengan a : $a^2 < ab$
3. Kurangi dengan b^2 : $a^2 - b^2 < ab - b^2$
4. Faktorkan : $(a + b)(a - b) < b(a - b)$
5. Bagi dengan $(a - b)$: $a + b < b$
6. Substitusikan $a = 7$ dan $b = 2$: $9 < 2$

Pada proses ke berapakah yang menyebabkan kesalahan ini?

C. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

PERTIDAKSAMAAN linier satu variabel adalah suatu pertidaksamaan dengan satu variabel, dengan pangkat variabel tersebut berderajat satu. Secara umum pertidaksamaan ini dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$ax + b > 0$$

$$ax + b < 0 \quad \text{dengan } a \neq 0 \text{ dan } a, b \in \text{Riil}$$

$$ax + b \leq 0$$

$$ax + b \geq 0$$

Contoh 4.1

Sketlah grafik $2x + 8 > 0$. Jangan arsir daerah yang menjadi penyelesaiannya.

Penyelesaian:

- a) Kurangilah dua buah sisi dengan 8

$$2x + 8 > 0$$

$$2x + 8 - 8 > 0 - 8$$

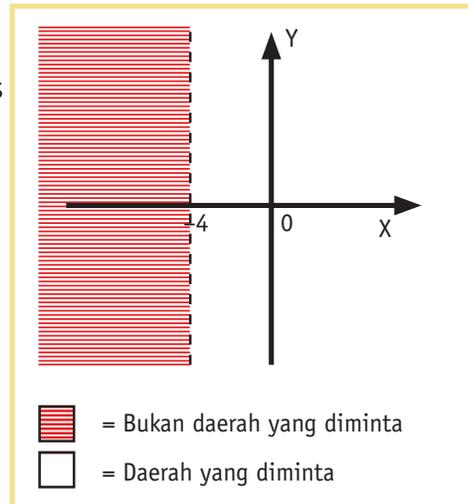
$$2x > -8$$

Kemudian, bagilah kedua ruas dengan 2 diperoleh

$$1 x > -4$$

- b) Oleh karena pertidaksamaannya menggunakan tanda $>$, maka harus digambar dengan garis putus-putus

- c) Ambil $x = 0$. Substitusikan ke $x > -4$ untuk melihat apakah daerah yang memuat $x = 0$ merupakan daerah penyelesaiannya. Ternyata $0 > -4$ (benar) Berarti daerah yang memuat $x = 0$ termasuk wilayah penyelesaiannya. Arsirlah wilayah yang *bukan* penyelesaiannya.



Saat kita berusaha meraih sesuatu kemudian kita tidak bisa meraihnya adalah sebuah kegagalan. Saya tidak mengatakan keberhasilan yang tertunda. Tetapi dibalik kegagalan tersebut ada keberhasilan lain, yaitu kita mengetahui cara meraih sesuatu yang salah, sehingga kita tidak akan mengulang cara tersebut.

Contoh

4.2

Sketlah grafik $\frac{-2x+6}{2} \geq \frac{x+21}{3}$. Jangan arsir daerah yang menjadi penyelesaiannya.

Penyelesaian:

- a) Kalikan kedua buah sisi dengan 6

$$\frac{-2x+6}{2} \geq \frac{x+21}{3}$$

$$3(-2x+6) \geq 2(x+21)$$

$$-6x+18 \geq 2x+42$$

Kemudian, kurangilah kedua ruas dengan $2x$ dan 18

$$-6x-2x+18-18 \geq 2x-2x+42-18$$

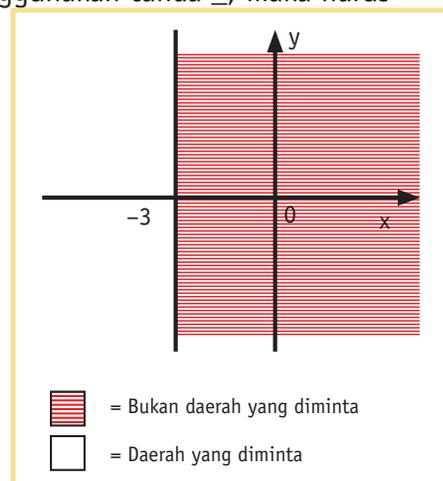
$$-8x \geq 24$$

Bagilah kedua ruas dengan -8 . **Ingat:** membagi atau mengalikan dengan bilangan negatif akan mengubah arah tanda pertidaksamaan.

$$x \leq -3$$

- b) Oleh karena pertidaksamaannya menggunakan tanda \leq , maka harus digambar dengan garis tidak putus-putus.

- c) Ambil $x = 0$. Substitusikan ke $x \leq -3$ untuk melihat apakah daerah yang memuat $x = 0$ merupakan daerah penyelesaiannya. Ternyata $0 \leq -3$ (salah) Berarti daerah yang memuat $x = 0$ bukan termasuk wilayah penyelesaiannya. Arsilah daerah yang bukan penyelesaiannya.



Contoh 4.3

Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $-3y - 12 > 0$

Penyelesaian:

- a) Tambah kedua ruas dengan 12.

$$\begin{aligned} -3y - 12 + 12 &> 0 + 12 \\ -3y &> 12 \end{aligned}$$

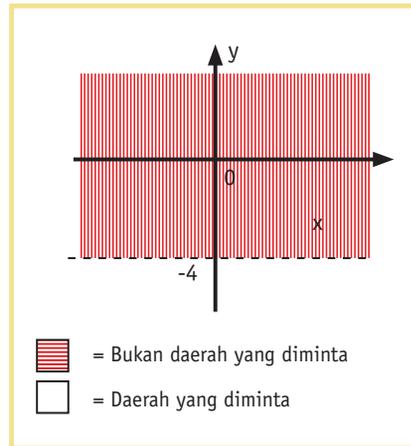
Bagilah dengan -3 . **Ingat**, -3 adalah bilangan negatif. Membagi dengan bilangan negatif mengakibatkan berubahnya arah tanda pertidaksamaan.

$$y < -4$$

- b) Oleh karena pertidaksamaannya menggunakan tanda $<$, maka harus digambar dengan garis putus-putus

- c) Ambil $y = 0$. Substitusikan ke $y < -4$ untuk melihat apakah daerah yang memuat $y = 0$ merupakan daerah penyelesaiannya.

Ternyata $0 < -4$ (salah), berarti daerah yang memuat $y = 0$ bukan termasuk wilayah penyelesaiannya. Arsilah daerah yang bukan penyelesaiannya.



Contoh 4.4

Tentukan penyelesaian dari $4x + 1 < 2x - 1 < 3x + 1$

Penyelesaian:

- a) Bentuk pertidaksamaan $4x + 1 < 2x - 1 < 3x + 1$ dapat dipisahkan menjadi dua pertidaksamaan berikut.

$$\begin{aligned} 4x + 1 < 2x - 1 & \dots\dots\dots 1) \\ 2x - 1 < 3x + 1 & \dots\dots\dots 2) \end{aligned}$$

b) Selesaikan pertidaksamaan (1)

$$4x + 1 < 2x - 1$$

Kurangi dengan $2x$ dan 1 pada kedua ruasnya

$$4x - 2x + 1 - 1 < 2x - 2x - 1 - 1$$

$$2x < -2$$

$$x < -1$$

c) Selesaikan pertidaksamaan (2)

$$2x - 1 < 3x + 1$$

Kurangi dengan $3x$ dan tambah dengan 1 pada kedua ruasnya

$$2x - 3x - 1 + 1 < 3x - 3x + 1 + 1$$

$$-x < 2$$

Kalikan ruas kiri dan kanan dengan

-1 . **Ingat**, perkalian dengan

bilangan negatif mengubah arah

tanda pertidaksamaan.

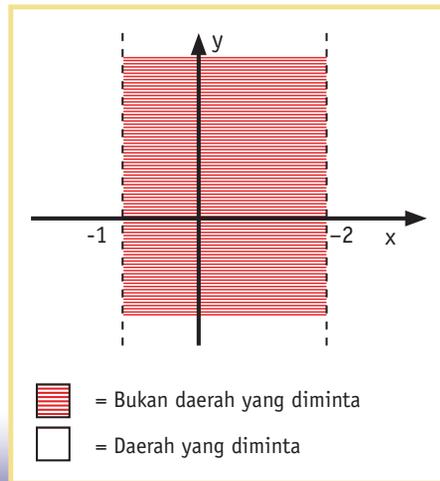
$$x > -2$$

d) Sketsalah pertidaksamaan $x < -1$

dan $x > 2$ pada satu sistem koordinat

yang sama. Arsirlah wilayah yang

bukan penyelesaian.



Latihan 4.A

Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

1. Sketsalah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $y \geq 2$

b) $y \leq 0$

c) $y > -1$

d) $y < 6$

e) $y > 0$

f) $y \leq -6$

g) $x \geq -4$

h) $x \leq 0$

i) $x > -2$

j) $x < 1$

k) $x > 0$

l) $x \leq -1$

2. Sketsalah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $-x < 7$

b) $-y \geq 2$

c) $-x > 3$

d) $-x \geq -5$

e) $-y > -4$

f) $-y \leq 3$

g) $x + 2 > 0$

h) $y - 3 \leq 0$

i) $x - 8 < 0$

j) $-x + 4 \geq 0$

k) $y - 2 < 3$

l) $-y - 6 \leq 2$

3. Sketsalah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $3x < 9$	b) $2x + 10 \leq 0$	c) $5x - 4 > 16$
d) $-5y > 10$	e) $-2y \leq -6$	f) $-3y - 8 \geq 4$

4. Sketsalah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $2x + 5 > 5x - 4$	b) $3x - 2 < x + 2$
c) $-3x + 11 \leq 5x - 5$	d) $4x - 2 \geq -5x + 25$
e) $5y - 7 < -3y - 39$	f) $7x + 5 \leq -5x + 5$

5. Sketsalah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $3(x - 1) < 13 - 5(x + 1)$	b) $5(x - 2) > (3x + 2) - 6$
c) $-2(x + 3) + 7 \leq 3(2x - 5) + 32$	d) $4(x + 7) \geq -3(x + 10) + 79$
e) $2(y + 5) > -3(y - 2) - 16$	f) $3(y - 1) \leq 5(y - 3)$

6. Sketlah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{x+1}{2}$	b) $\frac{2y-5}{2} > \frac{y+1}{3}$
c) $\frac{2}{3} \geq \frac{x-2}{4} + \frac{x-4}{6}$	d) $\frac{y+2}{5} + \frac{y-3}{2} \leq \frac{19}{5}$
e) $\frac{2x+3}{3} - \frac{x+3}{4} > -1$	f) $\frac{3y+5}{3} + \frac{2y}{7} < \frac{41}{7}$

7. Sketsalah grafik yang menunjukkan pertidaksamaan berikut.

a) $-2 > x - 3 > 1$	b) $-1 < y + 2 < 7$
c) $9 \leq 2x + 5 \leq 19$	d) $-16 \geq 5y - 1 \geq -1$
e) $2x + 10 > 3x - 6 > -5x + 26$	f) $3y - 3 \leq 5y - 15 \leq 4y - 17$
g) $3(x + 2) > -3(x - 5) \leq -5x + 11$	h) $2(y + 2) \leq -4(y + 2) > -5(y - 1)$



**Pemenang sejati bukanlah orang yang
 juara dalam sebuah perlombaan, akan
 tetapi setiap orang yang bisa bangkit
 setelah mengalami setiap kegagalan**
(Prembayun Muji Lestari)

D. Pertidaksamaan Kuadrat

PERTIDAKSAMAAN kuadrat adalah suatu bentuk pertidaksamaan yang pangkat tertinggi variabelnya adalah dua. Bentuk umum:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{dengan } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0$$

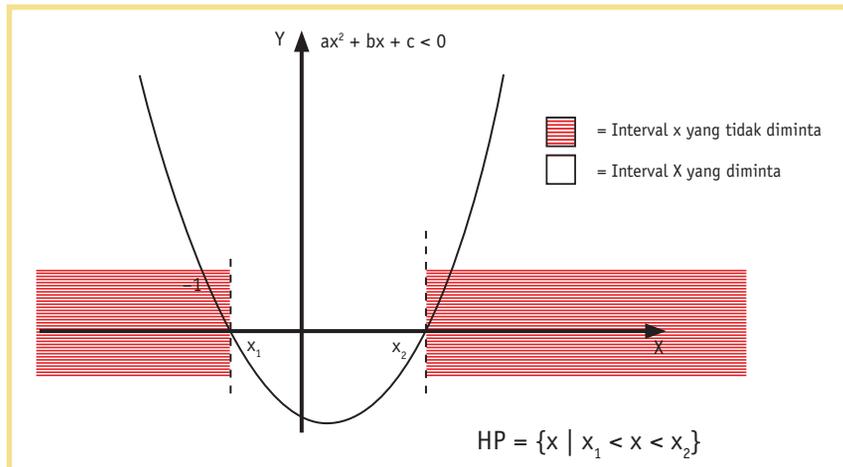
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

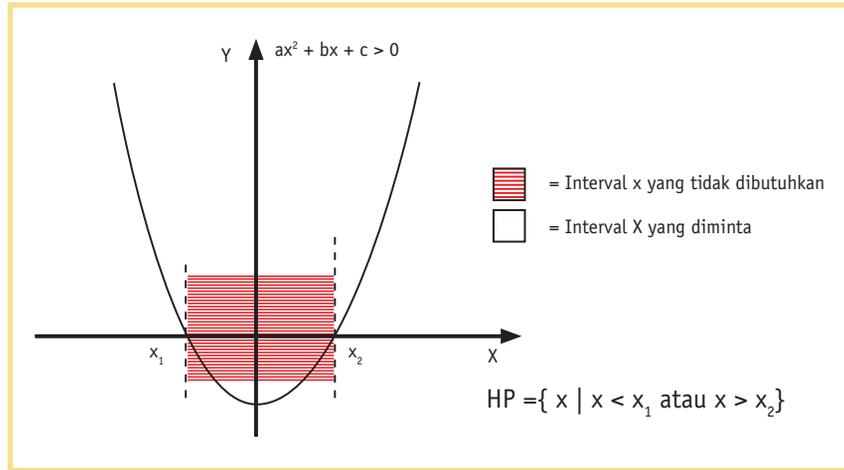
Mari kita analisis tentang pengertian himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat secara geometris. Pada bagian ini uraian akan difokuskan pada tanda pertidaksamaan $<$ dan $>$ saja. Adapun untuk kajian tanda \leq dan \geq tidak berbeda cara berfikirnya.

Kasus 1: Grafik menghadap ke atas dan memotong sumbu x ($a > 0$ dan $D > 0$)

Untuk nilai $a > 0$ dan $D > 0$ bentuk pertidaksamaan $ax^2 + bx + c < 0$, dapat diartikan sebagai daerah asal x yang menghasilkan nilai $y < 0$. Dari sketsa grafik ternyata nilai $y < 0$ diperoleh pada interval $x_1 < x < x_2$

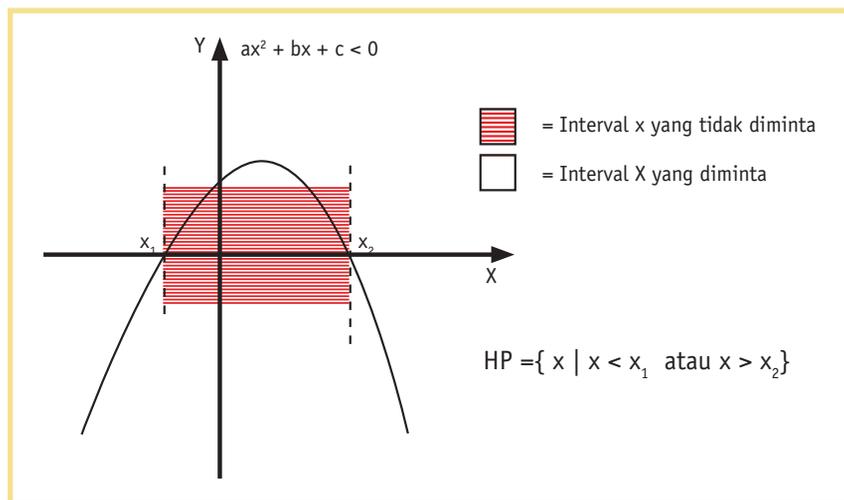


Untuk nilai $a > 0$ dan $D > 0$ bentuk pertidaksamaan $ax^2 + bx + c > 0$ dapat diartikan sebagai daerah asal x yang menghasilkan nilai $y > 0$. Dari sketsa grafik ternyata nilai $y > 0$ diperoleh pada interval $x < x_1$ atau $x > x_2$

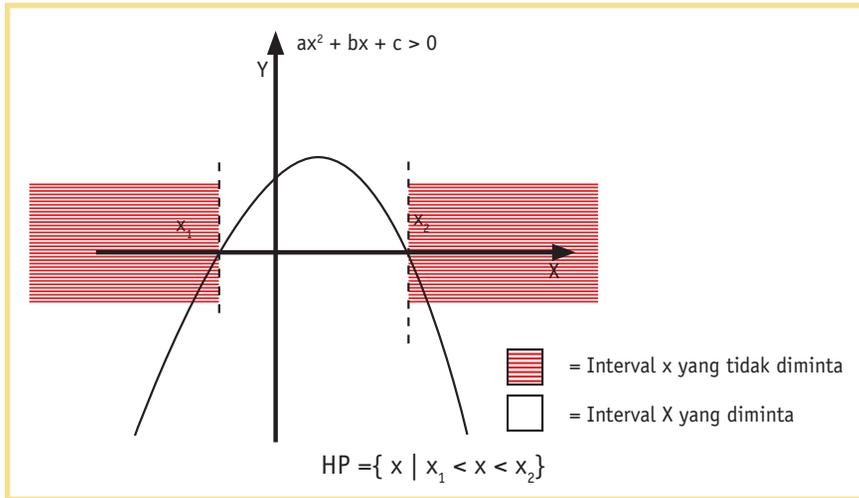


Kasus 2: Grafik menghadap ke bawah dan memotong sumbu x ($a < 0$ dan $D > 0$)

Untuk nilai $a < 0$ dan $D > 0$ bentuk pertidaksamaan $ax^2 + bx + c < 0$, dapat diartikan sebagai daerah asal x yang menghasilkan nilai $y < 0$. Dari sketsa grafik ternyata nilai $y < 0$ diperoleh pada interval $x < x_1$ atau $x > x_2$



Untuk nilai $a < 0$ dan $D > 0$ bentuk pertidaksamaan $ax^2 + bx + c > 0$ dapat diartikan sebagai daerah asal x yang menghasilkan nilai $y > 0$. Dari sketsa grafik ternyata nilai $y > 0$ diperoleh pada interval $x_1 < x < x_2$



Kasus 3: Grafik menghadap ke atas dan menyinggung sumbu x ($a > 0$ dan $D = 0$)

Untuk $a > 0$ dan $D = 0$ maka grafik ini menghadap ke atas dan menyinggung sumbu x di sebuah titik katakanlah $(p, 0)$. Seluruh kurvanya berada di atas sumbu x kecuali pada $x = p$. Jadi himpunan penyelesaian dari $ax^2 + bx + c < 0$ adalah himpunan \emptyset (Mengapa?). Adapun penyelesaian $ax^2 + bx + c > 0$ adalah semua nilai x kecuali di $x = p$ atau $HP = \{x \mid x \in R, x \neq p\}$ (Mengapa?).

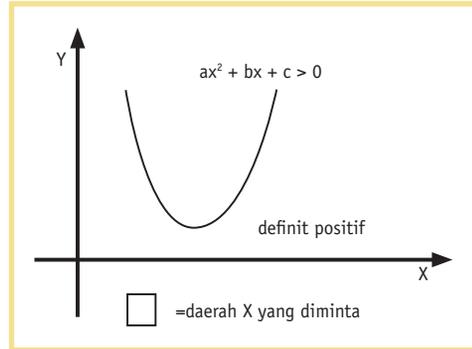
Kasus 4: Grafik menghadap ke bawah dan menyinggung sumbu x ($a < 0$ dan $D = 0$)

Untuk $a < 0$ dan $D = 0$ maka grafik ini menghadap ke bawah dan menyinggung sumbu x di sebuah titik katakanlah $(p, 0)$. Seluruh kurvanya berada di bawah sumbu x kecuali pada $x = p$. Jadi himpunan penyelesaian dari $ax^2 + bx + c > 0$ adalah himpunan \emptyset (Mengapa?). Adapun penyelesaian $ax^2 + bx + c < 0$ adalah semua nilai x kecuali di $x = p$ atau $HP = \{x \mid x \in R, x \neq p\}$ (Mengapa?).

**Kasus 5: Grafik menghadap ke atas dan definit positif
 ($a > 0$ dan $D < 0$)**

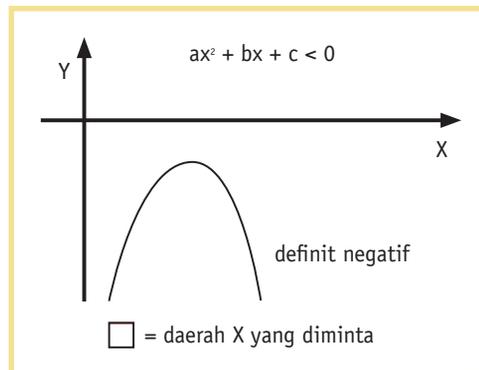
Untuk $a > 0$ dan $D < 0$ maka grafik ini menghadap ke atas dan seluruh kurvanya berada di atas sumbu x.

Jadi himpunan penyelesaian dari $ax^2 + bx + c < 0$ adalah tidak ada atau himpunan \emptyset (*Mengapa?*) Sedangkan untuk penyelesaian $ax^2 + bx + c > 0$ adalah semua nilai x. Jadi HP = $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



**Kasus 6: Grafik menghadap ke bawah dan definit negatif
 ($a < 0$ dan $D < 0$)**

Untuk $a < 0$ dan $D = 0$ maka grafik ini menghadap ke bawah dan seluruh kurvanya berada di bawah sumbu x. Jadi himpunan penyelesaian dari $ax^2 + bx + c > 0$ adalah himpunan \emptyset (*Mengapa?*). Penyelesaian dari $ax^2 + bx + c < 0$ adalah semua nilai x. Jadi HP = $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



Contoh 4.5

Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 6x + 9 > 0$

Penyelesaian:

- a) Buatlah menjadi persamaan $y = x^2 + 6x + 9$
 $a = 1$ dan $D = 0$, berarti grafik menghadap ke atas dan *menyinggung* sumbu x.

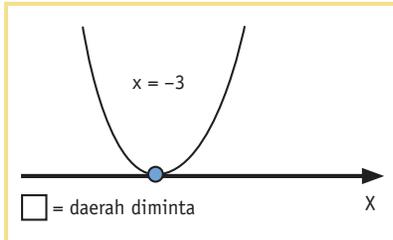
b) Menemukan titik singgung jika $y = 0$.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

$$x = -3$$

c) Sketlah:



d) Hampir semua nilai y lebih besar dari 0 kecuali di $x = -3$

Jadi HP = $\{x \mid x \in R, x \neq -3\}$

Contoh

4.6

Tentukan himpunan penyelesaian dari $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$

Penyelesaian:

a) Buatlah menjadi persamaan $y = -x^2 + 5x - 6$
 $a = -1$ dan $D = 1$ lebih besar dari 0, berarti grafik menghadap ke bawah dan memotong sumbu x di dua tempat.

b) Memotong sumbu x jika $y = 0$.

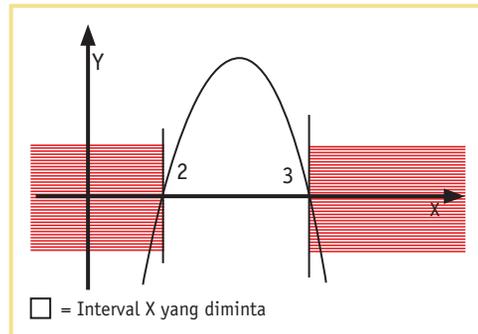
$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 2$$

c) Nilai y yang lebih besar atau sama dengan nol dipenuhi oleh x pada interval dari 2 sampai 3
 Jadi, HP = $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$



Contoh 4.7

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x^2 + 2x + 6 < 0$.

Penyelesaian:

- a) Buatlah menjadi persamaan $y = 2x^2 + 2x + 6$.
 $a = 2$ dan $D = -44$ atau $D < 0$, berarti grafik *definit positif* atau semuanya terletak di atas sumbu x
- b) $2x^2 + 2x + 6 \leq 0$ berarti meminta pada interval mana grafik berada di bawah sumbu x sedangkan semua grafik di atas sumbu x . Akibatnya tidak ada jawaban untuk persoalan ini atau $HP = \emptyset$

Latihan 4.B

Pertidaksamaan Kuadrat

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

a) $x^2 - 4x + 3 < 0$	b) $x^2 - 3x - 10 > 0$
c) $x^2 - x - 12 \leq 0$	d) $x^2 + 2x - 15 \geq 0$
e) $x^2 + 8x + 15 > 0$	f) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$
g) $-x^2 + 8x - 15 \leq 0$	h) $-x^2 - 3x - 2 > 0$
i) $12 - x - x^2 < 0$	j) $21 + 4x - x^2 \leq 0$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

a) $x^2 - 25 > 0$	b) $x^2 - 16 < 0$
c) $x^2 - 81 \leq 0$	d) $x^2 - 4 \geq 0$
e) $64 - x^2 < 0$	f) $49 - x^2 > 0$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

a) $2x^2 + 5x + 3 > 0$	b) $3x^2 + 8x + 5 < 0$
c) $3x^2 - 10x + 8 \geq 0$	d) $5x^2 + 8x + 3 \leq 0$
e) $-3x^2 - 4x + 7 < 0$	f) $-5x^2 - 12x - 7 \geq 0$
g) $-2x^2 - 7x - 5 \geq 0$	h) $-2x^2 - 2x + 4 > 0$

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

a) $(x + 3)(x + 2) \geq x(3x + 4)$
b) $(2x + 1)(x - 1) < (x - 1)(x + 3)$

- c) $(2x - 3)^2 - 6 \geq (3 - 2x)$
 d) $(x + 1)^2 > x(2x + 3) - 19$
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $2x^2 + 1x + 7 > 0$ | b) $2x^2 + 2x + 7 < 0$ |
| c) $x^2 - 2x + 8 \geq 0$ | d) $x^2 + 5x + 9 \leq 0$ |
| e) $-3x^2 - 4x - 7 < 0$ | f) $-x^2 - 3x - 16 \geq 0$ |
| g) $-2x^2 - 3x - 8 \leq 0$ | h) $-x^2 - x - 5 > 0$ |
6. Tentukan nilai m agar $y = 2x^2 + x + m$ bernilai positif untuk setiap x.
7. Tentukan nilai n agar $y = (n + 1)x^2 - 2nx + n - 4$ definit negatif.
 (Petunjuk: Syarat definit negatif adalah $a < 0$ dan $D < 0$)
8. Tentukan nilai k agar $y = 2kx^2 + (k - 1)x - k + 1$ gambar parabolanya di atas sumbu x.



E. Pertidaksamaan Pecahan atau Rasional

Investigasi

SELIDIKILAH karakteristik grafik $y = \frac{x+9}{x-2}$ dengan melukiskan grafiknya terlebih dahulu di kertas berpetak atau kertas millimeter block. Gunakan kalkulator jika kamu memerlukannya.

Ingat: Untuk nilai $x = 2$ fungsi tidak terdefinisi. Mengapa?

Kamu boleh melakukan investigasi dengan menggunakan *Microsoft Excel* atau *Software Graphmatica* atau jenis yang lainnya untuk mengetahui karakteristik fungsi itu.



- a) Tentukan daerah tempat fungsi $y = \frac{x+9}{x-2} \geq 0$

b) Tentukan daerah tempat fungsi $y = \frac{x+9}{x-2} \leq 0$

Presentasikan hasil investigasimu tersebut di depan teman-temanmu!

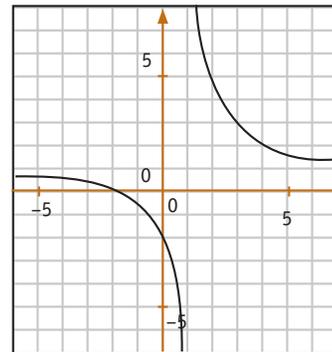
Contoh 4.8

Lukislah grafik fungsi $y = \frac{x+2}{x-1}$. Kemudian, tentukan penyelesaian dari:

- i) pertidaksamaan $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$ ii) pertidaksamaan $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$

Penyelesaian:

- a) Lukislah grafik $y = \frac{x+2}{x-1}$.
- b) Grafik memotong sumbu x di -2 dan grafik mendekati angka 1 dari kiri maupun dari kanan.
- c) Grafik berada di atas/pada sumbu x (≥ 0) pada interval $x \leq -2$ atau $x > 1$, maka penyelesaian dari $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$ adalah $HP = \{x | x \leq -2 \text{ atau } x > 1\}$



- d) Grafik berada di bawah/pada sumbu x (≤ 0) pada interval $-2 \leq x < 1$, maka penyelesaian $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$ adalah $HP = \{x | -2 \leq x < 1\}$

PERTIDAKSAMAAN di atas dinamakan dengan “pertidaksamaan pecahan”. Bentuknya bisa bentuk linier dibagi dengan linier, bentuk kuadrat dibagi linier atau sebaliknya dan bentuk kuadrat dibagi dengan bentuk kuadrat.

Apakah cara untuk menemukan himpunan penyelesaian dari bentuk pertidaksamaan pecahan itu kita harus melukiskan terlebih dahulu? Adakah tip lain untuk menemukan himpunan penyelesaian itu? Cara lain adalah menggunakan “metode garis bilangan”.

Caranya:

- 1) Buatlah garis bilangan sebagai representasi dari sumbu x
- 2) Ubahlah pertidaksamaan menjadi sebuah fungsi $y = f(x)$. Temukan titik potongnya dengan sumbu x yaitu jika $y = 0$.
- 3) Pasangkan titik potong-titik potong tersebut dalam garis bilangan. Sehingga tercipta beberapa ruas garis (interval)
- 4) Ambil sebuah bilangan pada masing-masing interval dan substitusikan pada bentuk pertidaksamaan itu. Tandai pada interval itu dengan (+) jika hasil substitusi menghasilkan bilangan positif dan tandai dengan (-) jika hasil substitusi menghasilkan bilangan negatif.
- 5) Apa artinya tanda (+)? Secara aljabar, interval tersebut sebagai himpunan penyelesaian atas pertidaksaksamaan yang menggunakan tanda ($>$ dan \geq). Secara geometri, tanda (+) artinya pada interval itu kurva berada di atas sumbu x .
- 6) Apa artinya tanda (-)? Secara aljabar interval tersebut sebagai himpunan penyelesaian atas pertidaksaksamaan yang menggunakan tanda ($<$ dan \leq). Secara geometri, tanda (-) artinya pada interval itu kurva berada di bawah sumbu x .

Gunakan "metode garis bilangan" untuk memecahkan pertidaksamaan pecahan



Mari kita kaji sekali lagi contoh 4.8 sebagai contoh 4.9 dengan menggunakan pendekatan metode garis bilangan.

Contoh

4.9

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

- i) pertidaksamaan $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$ ii) pertidaksamaan $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$

Penyelesaian:

- a) Ubah menjadi fungsi terlebih dahulu, yaitu $y = \frac{x+2}{x-1}$

b) Memotong sumbu x jika $y = 0$.

$\frac{x+2}{x-1} = 0$	Syarat sebuah pecahan adalah
$x + 2$	pembilang tidak boleh sama dengan nol
$x = -2$	$x - 1 \neq 0$
	$x \neq 1$ (lukis sebagai titik berlobang)

c) Buatlah garis bilangannya



Terdapat tiga buah ruas. Ambillah sebuah bilangan dari masing-masing ruas. Taruhlah $x = -3$ untuk ruas kiri, $x = 0$ untuk ruas tengah, dan $x = 2$ untuk ruas sebelah kanan. Substitusikan

$x = -3$ -----> $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ (bilangan positif)
 Tandailah ruas kiri dengan (+)

$x = 0$ -----> $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{2}{-1} = -2$ (bilangan negatif)
 Tandailah ruas tengah dengan (-)

$x = 2$ -----> $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$ (bilangan positif)
 Tandailah ruas kanan dengan (+)

d) Tandailah garis bilangan tersebut



Jadi, penyelesaian dari $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$ adalah $HP = \{x \mid x \leq -2 \text{ atau } x > 1\}$
 dan penyelesaian dari $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$ adalah $HP = \{x \mid -2 \leq x < 1\}$.

Mengapa demikian? Jelaskan dengan kata-katamu sendiri!

Contoh

4.10

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{2x+1}{x-2} < \frac{2x+3}{x+1}$

Penyelesaian:

a) Sederhanakan.

$$\frac{2x+1}{x-2} < \frac{2x+3}{x+1}$$

$$\frac{2x+1}{x-2} - \frac{2x+3}{x+1} < 0$$

$$\frac{(2x+1)(x+1) - (2x+3)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\frac{(2x^2 + 3x + 1) - (2x^2 - x - 6)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\frac{4x+7}{(x-2)(x+1)} < 0$$

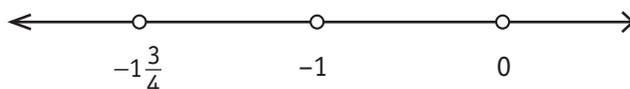
b) Temukan nilai x.

i) $4x + 7 = 0 \rightarrow x = -1\frac{3}{4}$

ii) $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

iii) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

c) Tuliskan nilai-nilai x tersebut pada garis bilangan



d) Tentukan interval mana yang bertanda negatif. Mengapa kita hanya memfokuskan pada interval yang bertanda negatif saja?

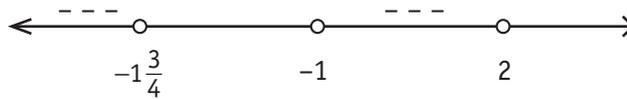
Ambil $x = -2 \rightarrow \frac{4x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{4}$ (negatif)

Ambil $x = -1,5 \rightarrow \frac{4x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{4}{7}$ (positif)

Ambil $x = 0 \rightarrow \frac{4x+7}{(x-2)(x+1)} = -\frac{7}{2}$ (negatif)

Ambil $x = 3$ -----> $\frac{4x + 7}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{19}{4}$ (positif)

e) Berikan tanda (-) pada interval yang bersangkutan



f) Himpunan penyelesaiannya

HP = $\{x \mid x < -1\frac{3}{4} \text{ atau } -1 < x < 2\}$

Latihan 4.B

Pertidaksamaan Pecahan

1. Tentukan penyelesaian dari

a) $\frac{x + 6}{x - 2} > 0$

b) $\frac{x - 3}{x + 5} < 0$

c) $\frac{3x + 12}{x - 2} \geq 0$

d) $\frac{x + 6}{2x - 8} \leq 0$

e) $\frac{2x + 7}{2x - 5} < 0$

f) $\frac{3x + 7}{2x + 4} \geq 0$

g) $\frac{x}{4x - 10} \leq 0$

g) $\frac{5x - 6}{3x} \geq 0$

2. Tentukan penyelesaian dari

a) $\frac{x + 2}{x - 1} < \frac{x + 4}{x - 3}$

b) $\frac{2x + 3}{x + 1} > \frac{2x + 1}{x - 3}$

c) $\frac{2x + 5}{3x + 6} \geq \frac{x + 3}{x - 2}$

d) $\frac{2x + 6}{x + 3} \leq \frac{5x + 15}{x}$

e) $\frac{-2x + 7}{3x + 1} < \frac{-5x + 3}{2x - 3}$

f) $\frac{-3x + 2}{x} \geq \frac{4 - 3x}{5 - 2x}$

3. Tentukan penyelesaian dari

a) $\frac{(x^2 - 5x + 6)}{x - 4} > 0$

b) $\frac{x^2 - x - 12}{x + 5} < 0$

c) $\frac{3x + 12}{x^2 + 5x + 6} < 0$

d) $\frac{5x + 10}{x^2 - 8x + 15} > 0$

e) $\frac{-3x^2 + 4x + 4}{2x - 5} \leq 0$

f) $\frac{3x^2 - 13x + 10}{2x + 3} \geq 0$



Problem Solving



"TRADE MARK"

SEBUAH perusahaan kue ingin membuat simbol perdagangannya (*trade mark*) dengan huruf M yang terbuat dari dua buah persamaan kuadrat yaitu $y = 4 - x^2$ dan $y = -x^2 + 6x - 8$. Apa syarat dan pada interval manakah tercipta huruf M yang diinginkan itu?

F. Pertidaksamaan Irasional

Perhatikan bentuk $\sqrt{2x - 8}$. Bolehkah nilai x diganti dengan 3? Mengapa? Bagaimana jika nilai x diganti dengan 4? Mengapa? Bentuk akar tersebut akan memiliki penyelesaian dengan "syarat" tertentu yaitu nilai bentuk di bawah tanda akar "sama dengan nol" atau "lebih besar dari nol" yang dalam bahasa matematika dinyatakan sebagai $2x - 8 \geq 0$. Dengan demikian untuk menyelesaikan bentuk pertidaksamaan irasional, misalnya $\sqrt{2x - 8} < 0$, tidak hanya seka dar melakukan proses aljabar untuk menemukan nilai x , melainkan harus memikirkan bagaimana "syaratnya" agar bentuk akar memiliki nilai bilangan riil.

Agar $\sqrt{2x - 8}$ memiliki penyelesaian "syaratnya harus positif" atau $2x - 8 \geq 0$. Apa yang terjadi jika bilangan negatif diakarkan? Gunakan kalkulatormu!



Contoh 4.11

Tentukan penyelesaian dari $\sqrt{2x - 8} < 2$

Penyelesaian:

- a) Syarat agar bentuk akar memiliki penyelesaian riil.

$$2x - 8 \geq 0$$

$$x \geq 4$$

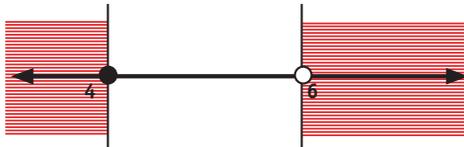
- b) Menemukan nilai x untuk bentuk pertidaksamaan.

$$\sqrt{2x - 8} < 2 \text{ (kuadratkan kedua sisinya)}$$

$$2x - 8 < 4$$

$$x < 6$$

- c) Tentukan nilai-nilai x tersebut dalam garis bilangan. Arsirlah wilayah yang bukan menjadi penyelesaiannya.



 = bukan daerah yang diminta

- d) Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah

$$HP = \{x \mid 4 \leq x < 6\}.$$

Contoh 4.12

Tentukan himpunan pertidaksamaan $\sqrt{2x - 4} > \sqrt{-x + 8}$

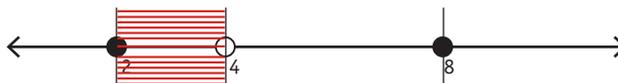
Penyelesaian:

- a) Untuk bentuk $\sqrt{2x - 4}$ agar memiliki akar riil maka

$$2x - 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

- b) Untuk bentuk $\sqrt{-x+8}$ agar memiliki akar riil maka
 $-x + 8 \geq 0$
 $-x \geq -8$ (kalikan kedua ruas dengan -1)
 $x \leq 8$ (mengapa tanda pertidaksamaan berbalik arah?)
- c) Temukan nilai x dari pertidaksamaan.
 $\sqrt{2x-4} > \sqrt{-x+8}$ (kuadratkan kedua ruas)
 $2x - 4 > -x + 8$
 $x > 4$
- d) Tandailah nilai-nilai x pada garis bilangan. Arsirlah yang bukan penyelesaiannya



= bukan daerah yang diminta

- e) Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah
 $HP = \{ x \mid 4 < x \leq 8 \}$.

Latihan 4.C

Pertidaksamaan Irasional

- Tentukan penyelesaian dari

a) $\sqrt{3x+3} < 12$	b) $\sqrt{2x-2} > 8$
c) $\sqrt{-2x+1} > -9$	d) $\sqrt{3x+1} < 4$
e) $\sqrt{7x+14} \leq 35$	f) $\sqrt{-4x+5} \leq -15$
g) $\sqrt{5x+3} \geq 28$	h) $\sqrt{6x-12} \leq 6$
- Tentukan penyelesaian dari

a) $\sqrt{2x+3} < \sqrt{x+9}$	b) $\sqrt{5x-1} > \sqrt{2x-7}$
c) $\sqrt{-4x+3} < \sqrt{x-12}$	d) $\sqrt{-3x-1} < \sqrt{-5x-9}$
e) $\sqrt{7x+3} \geq \sqrt{3x+11}$	f) $\sqrt{2x+7} \leq \sqrt{3x-6}$
g) $\sqrt{-6x-8} \leq \sqrt{-x+17}$	h) $\sqrt{-8x+2} \geq \sqrt{-3x+12}$

3. Tentukan penyelesaian dari

a) $\sqrt{10 - x^2} < x + 2$

b) $x > \sqrt{x + 6}$

c) $\sqrt{x^2 + 2x - 48} \leq x - 3$

d) $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq x$

e) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} > \sqrt{4 - x^2}$

f) $\sqrt{-x^2 + 5} \leq \sqrt{3x + 7}$



G. Pertidaksamaan Harga Mutlak

HARGA mutlak atau modulus dari suatu bilangan dalam matematika adalah bilangan itu sendiri tanpa memperhatikan tandanya (*selalu positif*). Harga mutlak dari bilangan n dituliskan sebagai $|n|$. Sebagai contoh, bilangan -5 dan 5 memiliki harga mutlak yang sama.

$$|-5| = 5$$

$$|5| = 5$$

$$\text{Jadi } |-5| = |5| = 5$$

Investigasi

HARGA MUTLAK

Misalkan n adalah bilangan-bilangan $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ dan 5 . Tentukan $|n|$ dari tiap-tiap bilangan tersebut. Jika pasangan $(n, |n|)$ menyatakan titik dalam koordinat kartesius maka lukislah grafik relasi antara n dan $|n|$.

Dapatkan kamu menarik kesimpulan dari pekerjaanmu itu?



Hasil investigasimu menggambarkan hal berikut:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Untuk dapat menemukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan harga mutlak maka perlu dipahami sifat-sifat berikut ini:

- Sifat 1: Jika $|f(x)| < a$ maka $f(x) < a$ atau $-f(x) < a$
- Sifat 2: Jika $|f(x)| > a$ maka $f(x) > a$ atau $-f(x) > a$
- Sifat 3: Jika $|f(x)| < |g(x)|$ maka $f(x)^2 < g(x)^2$
- Sifat 4: Jika $|f(x)| > |g(x)|$ maka $f(x)^2 > g(x)^2$

Catatan: Untuk pertidaksamaan harga mutlak yang bertanda \leq ataupun \geq sama dengan sifat-sifat tersebut.

Contoh
4.13

Tentukan penyelesaian dari $|2x - 3| > 5$.

Penyelesaian:

- a) Bentuk $|2x - 3| > 5$ dapat diuraikan ke dalam dua pertidaksamaan
 - $2x - 3 > 5$ i)
 - $-(2x - 3) > 5$ ii)
- b) Selesaikan pertidaksamaan pertama.
 - $2x - 3 > 5$
 - $2x > 8$
 - $x > 4$
- c) Selesaikan pertidaksamaan kedua.
 - $-(2x - 3) > 5$ (kalikan dengan negatif)
 - $2x - 3 < -5$
 - $2x < -2$
 - $x < -1$
- d) Tempatkanlah nilai-nilai x tersebut pada sebuah garis bilangan. Kemudian, arsirlah daerah yang bukan merupakan penyelesaian.



= bukan daerah penyelesaian

Jadi, himpunan penyelesaian dari $|2x - 3| > 5$ adalah $\{x \mid -1 < x < 4\}$.

Contoh 4.14

Tentukan penyelesaian dari $|x^2 - 3x - 5| \leq 5$.

Penyelesaian:

a) Bentuk $|x^2 - 3x - 5| \leq 5$ dapat diuraikan dalam dua pertidaksamaan berikut.

$$x^2 - 3x - 5 \leq 5 \quad \dots\dots\dots \text{i)}$$

$$-(x^2 - 3x - 5) \leq 5 \quad \dots\dots\dots \text{ii)}$$

b) Temukan nilai x untuk pertidaksamaan (i) dengan merubah menjadi persamaan terlebih dahulu.

$$x^2 - 3x - 5 = 5$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) \leq 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 5$$

c) Temukan nilai x untuk pertidaksamaan (ii) dengan merubah menjadi persamaan terlebih dahulu.

$$-(x^2 - 3x - 5) = 5 \text{ (kalikan dengan bilangan } -1)$$

$$x^2 - 3x - 5 = -5$$

$$x^2 - 3x = 0$$

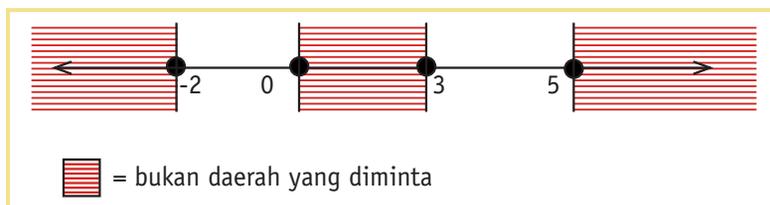
$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 3$$

d) Terdapat empat buah nilai x yaitu -2, 0, 3, dan 5. Ambil nilai x dalam interval-interval itu dan ujikan ke dalam $|x^2 - 3x + 1| \leq -1$ Apakah merupakan wilayah penyelesaiannya?

x	-3	-1	1	4	6
$ x^2 - 3x - 5 \leq 5$	$13 \leq 5$ Bukan	$1 \leq 5$ Ya	$7 \leq 5$ Bukan	$1 \leq 5$ Ya	$13 \leq 5$ Buka

Arsirlah yang bukan daerah penyelesaian



Himpunan penyelesaiannya $HP = \{x | -2 \leq x \leq 0 \text{ atau } 3 \leq x \leq 5\}$.

Contoh 4.15

Tentukan penyelesaian dari $\left| \frac{x+3}{x-4} \right| < 2$.

Penyelesaian:

a) Kerjakan secara aljabar.

$$\left| \frac{x+3}{x-4} \right| < 2$$

$$|x+3| < 2|x-4|$$

$$|x+3| < |2x-8| \quad (\text{kuadratkan})$$

$$x^2 + 6x + 9 < 4x^2 - 32x + 64$$

$$-3x^2 + 38x - 55 < 0$$

$$3x^2 - 38x + 55 > 0$$

b) Ubahlah pertidaksamaan menjadi persamaan dan temukan pembuat nolnya.

$$3x^2 - 38x + 55 = 0$$

$$(3x - 5)(x - 11) = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ atau } x = 11$$

c) Tempatkanlah nilai x tersebut pada garis bilangan dan uji mana yang merupakan daerah yang diminta.

x	0	2	12
$\left \frac{x+3}{x-4} \right < 2$	$\frac{3}{4} < 2$	$\frac{5}{2} < 2$	$\frac{15}{8} < 2$
	Ya	Bukan	Ya

Arsilah daerah yang tidak diminta



Jadi, himpunan penyelesaian dari $\left| \frac{x+3}{x-4} \right| < 2$ adalah

$$\text{HP} = \left\{ x \mid x < \frac{5}{3} \text{ atau } x > 11 \right\}.$$



Berdasarkan sifat $|f(x)| > a$
 maka bentuk $|x + 5| > 15$ dapat
 diselesaikan sebagai

$$-15 > x + 5 > 15$$

$$-15 - 5 > x + 5 - 5 > 15 - 5$$

$$-20 > x > 10$$


Berdasarkan sifat $|f(x)| < a$
 maka bentuk $|x + 3| < 20$ dapat
 diselesaikan sebagai

$$-20 < x + 3 < 20$$

$$-20 - 3 < x + 3 - 3 < 20 - 3$$

$$-23 < x < 17$$

▶ Latihan 4.D

Pertidaksamaan Nilai Mutlak

- Tentukan penyelesaian dari

a) $ 2x - 5 > 1$	b) $ 3x - 4 > 2$
c) $ 8 - 2x < 4$	d) $ 7x - 5 < 9$
e) $ 9 - 3x \geq -3$	f) $5 \leq 2x - 2 $
g) $ 3x + 2 \geq 5$	h) $ 2x - 3 < 1$ dan $2x < 3$
- Tentukan penyelesaian dari

a) $ x^2 + x - 1 > 1$	b) $ x^2 - 3x + 1 < 1$
c) $ x^2 - 5x + 8 \leq 2$	d) $ x^2 + 6x + 11 \geq 3$
e) $ 2x^2 + 9x - 2 < 3$	f) $ 3x^2 - 7x - 1 > 5$
g) $ 5x^2 + 9x + 1 \geq 3$	i) $ x^2 - 2 - 6 + 2x < 0$
- Tentukan penyelesaian dari

a) $ x - 3 > x - 1 $	b) $ 2x - 1 < x + 2 $
c) $2 x - 1 \leq x + 2 $	d) $ 2x + 1 \geq 2x - 3 $

4. Tentukan penyelesaian dari

a) $\left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1$

b) $\left| \frac{x+2}{x-2} \right| < 1$

c) $\left| \frac{x+3}{x-1} \right| \leq 1$

d) $\left| \frac{2x-1}{x+5} \right| < 1$

5. Tentukan penyelesaian dari

a) $|x-2|2 < 4|x-2| + 12$

b) $|x-3|2 > 4|x-3| + 12$

c) $|x-1|2 \leq 5|x-1| - 6$

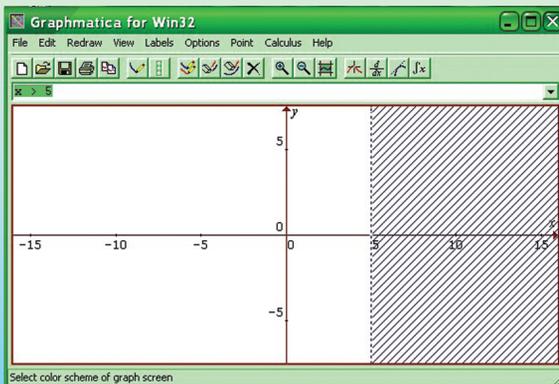
d) $|x+5|2 \geq -|x+5| + 2$



Proyek

SOFTWARE GRAPHMATICA

GRAPHMATICA adalah salah satu software yang dapat digunakan untuk menemukan daerah penyelesaian pertidaksamaan satu variabel. Anda bisa mendownload software tersebut di <http://www.pair.com/ksoft/>. Software ini dirancang oleh Keith Hertzler. Misalkan kita ingin menemukan daerah $x > 5$. Ketiklah $x > 5$ pada kotak dialognya kemudian tekan ENTER. Dengan cepat software ini memberikan penyelesaiannya yaitu berupa *daerah yang diarsir*. Perhatikan berikut ini:



Dul...perhatikan daerah yang "diarsir" pada komputer ini. Daerah yang diarsir itu adalah ujud dari bentuk pertidaksamaan $x > 5$





Investigasi



Dengan menggunakan software Graphmatica, temukan daerah penyelesaian dari:

- | | | |
|----------------|---------------------|------------------|
| a. $x > 2$ | b. $x < -3$ | c. $x > -5$ |
| d. $y > -2$ | e. $y < -2$ | f. $x \geq 2$ |
| g. $x \geq -3$ | h. $x \leq -5$ | i. $x \leq 3$ |
| j. $y \geq 3$ | k. $5x > 10$ | l. $(x : 5) < 2$ |
| m. $2x \geq 8$ | n. $5x - 2 \leq -4$ | |

Catatan: Untuk tanda bagi harus diketikkan dengan menggunakan “/”.

Lampirkan hasil kerjamu dalam portofoliomu!

Soal-soal Kontekstual

- Batas kecepatan maksimum di jalan raya tertulis seperti pada tanda lalu lintas berikut ini!
 - Nyatakan tanda lalu lintas tersebut dalam pertidaksamaan matematika!
 - Sebagai seorang yang taat berlalu lintas, bolehkah kita menjalankan kendaraan pada kecepatan 130 km/jam? Mengapa?
 - Bolehkah kita menjalankan mobil dengan kecepatan 80 km/jam? Mengapa?
 - Bolehkah kita menjalankan mobil dengan kecepatan 120 km/jam? Mengapa?
- Syarat minimal perusahaan sepatu memperoleh keuntungan adalah apabila perusahaan sepatu itu mampu memproduksi 3600 pasang sepatu setiap minggunya.
 - Nyatakan dalam pernyataan tersebut dalam pertidaksamaan matematika!



Sumber: Maths Quest

- b. Jika seminggu diproduksi 3500 pasang sepatu, apakah perusahaan itu sudah mulai mendapatkan keuntungan? Deskripsikan!
3. Untuk memasuki SMA/MA maksimal usianya adalah 21 tahun pada bulan Juli ini.
 - a. Nyatakan persyaratan tersebut dalam pertidaksamaan matematika
 - b. Ali berusia 20 tahun 3 bulan pada bulan Juli ini, bolehkah Ali mendaftarkan diri sebagai siswa baru di SMA/MA tersebut?
 - c. Jika Renita berusia 21 tahun lebih 4 bulan, bolehkah Rudi mendaftar sebagai siswa baru? Mengapa?
4. Sebuah terowongan jalan raya bertanda lalu lintas sebagai berikut:
 - a. Nyatakan kalimat tersebut ke dalam pertidaksamaan matematika
 - b. Bolehkah truk yang memuat barang dengan tinggi total 6 meter memasuki terowongan tersebut
 - c. Bolehkah truk kontainer dengan tinggi 7,3 meter memasuki terowongan tersebut? Deskripsikan!
5. Di kantor perusahaan penerbangan tertulis "Demi keselamatan penerbangan, penumpang tidak boleh lebih dari 375 orang".
 - a. Nyatakan pernyataan tersebut ke dalam pertidaksamaan matematika
 - b. Bolehkah pesawat berisi penumpang sebanyak 375 orang? Deskripsikan!
 - c. Bolehkan pesawat diisi penumpang 400 orang? Deskripsikan!



Ada tiga hal besar (*three big killers*) yang akan menghancurkan masa depan seseorang:

1. motivasi yang sangat lemah (*very low motivation*), (2) lingkungan buruk (*bad environment*), (3) bahasa yang meracuni (*poisoned language*)

(Reza M. Sarif)



Dua orang bersahabat, seorang berkebangsaan Pakistan, seorang lagi berkebangsaan Inggris. Bertolak dari Karachi menuju London dengan pesawat. Jadwal penerbangan dalam tiket jam 5 pagi. Berarti setengah lima kedua sahabat itu harus *check in* di Bandara. Shalat Subuh waktu setempat adalah jam lima kurang empat puluh menit. Maka, rencananya si Pakistan akan shalat di perjalanan.

Apa hendak dikata, di perjalanan ban belakang mobil meletus. Alangkah jengkelnya hati mereka. Terpaksa ban yang rusak diganti dahulu dengan ban serep. Ketika mau melanjutkan, jam menunjukkan pukul lima kurang empat puluh. Si Pakistan harus sholat dulu. Sampai di bandara sudah terlambat dan pesawat yang mau ditumpangi sudah *take-off*.

“Ini akibat dari kamu harus sembahyang. Apa sih untungnya sembahyang? Bagaimana dengan kontrak bisnis kita yang ada di London? Apakah Tuhanmu bisa menolongnya? *Non-sense!*” Mendengar cacian Inggris itu si Pakistan hanya terdiam dan berdo’a minta pertolongan dari Allah sambil mencari hotel untuk istirahat guna penerbangan besok pagi.

Ketika melepas penat si Pakistan menyalakan TV ruangan. Betapa kagetnya, ternyata pesawat yang berangkat ke London tadi mengalami kecelakaan meledak di udara dan tak satupun penumpang yang selamat. Si Pakistan sujud syukur sementara si Inggris hanya terdiam di sudut tempat tidurnya.

(M. Amin Akkas & Hasan M. Noer)

H. Matematika dalam Dunia Kerja



DOSIS OBAT

PERNAHKAH kamu sakit akhir-akhir ini? Apakah orang tuamu memberi kamu obat? Apakah seorang bayi, anak muda, orang dewasa memiliki dosis obat yang sama?

Biasanya besarnya dosis obat yang diberikan kepadamu ditentukan dari berat badanmu. Jenis obat tertentu memberikan dosisnya seperti pada tabel berikut:



Sumber: dailymail.co.uk

Umur	Berat Badan	Dosis
6 bulan – < 1 tahun	Lebih dari 10 kg	2,5 mL
1 – 5 tahun	10 – 20 kg	5,0 mL
6 – 10 tahun	20 – 35 kg	7,5 mL
11 – 13 tahun	35 – 45 kg	10 mL
14 – 18 tahun	45 – 75 kg	12,5 mL
dewasa	lebih dari 70 kg	15 mL

Sekarang, ada satu aturan untuk menentukan dosis bagi seorang anak dengan menggunakan persamaan berikut:

Aturan Clark (Amerika)

$$\text{Dosis Anak} = \frac{\text{Berat badan dalam kilogram}}{68} \times \text{dosis orang dewasa}$$

Aturan Cowling

$$\text{Dosis Anak} = \frac{\text{Usia ulang tahun menda tang}}{24} \times \text{dosis orang dewasa}$$

Misalkan usia kamu adalah 11 tahun dengan berat badan 40 kg, berapa dosismu?

Dari tabel 11 tahun – 10 mL

Aturan Clark Dosis = $\frac{40}{68} \times 15 = 9$ mL

Aturan Cowling Dosis = $\frac{12}{24} \times 15 = 7,5$ mL

Pertanyaan:

1. Hitunglah dosis yang tepat untukmu berdasarkan usia dan berat badanmu.
2. Satu sendok teh berisi kurang lebih 5 mL. Menurut aturan Cowling, bolehkah seorang anak usia 8 tahun dengan berat badan 20 kg diberikan obat dengan dosis $1\frac{1}{2}$ sendok teh? Mengapa?
3. Menurut aturan Clark, bolehkah seorang anak usia 15 tahun dengan berat badan 35 kg diberikan obat dengan dosis $1\frac{1}{2}$ sendok teh? Mengapa?

Rangkuman

1. Pertidaksamaan linier satu variabel adalah suatu pertidaksamaan dengan satu variabel dengan pangkat tertinggi variabel satu. Secara umum dapat diformulasikan sebagai berikut.
 - $ax + b > 0$
 - $ax + b < 0$ dimana $a \neq 0$ dan $a, b \in \text{Riil}$
 - $ax + b \leq 0$
 - $ax + b \geq 0$

2. Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu bentuk pertidaksamaan yang pangkat tertinggi variabelnya adalah dua. Bentuk umumnya:

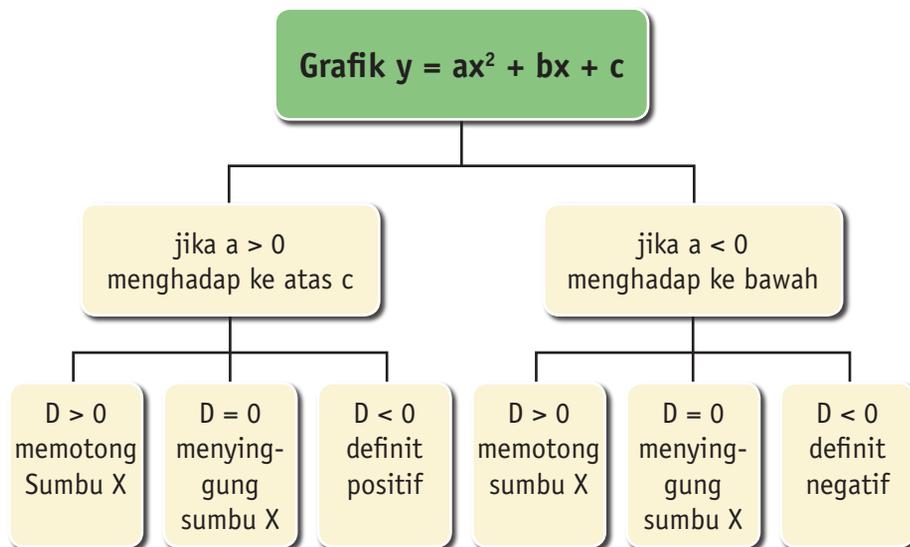
$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{dimana } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

- 3.



4. Pertidaksamaan irasional yang memiliki bentuk $\sqrt{ax + b} < c$ berlaku jika ditambah syarat khusus yaitu $ax + b \geq 0$

$$5. |x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

6. Untuk dapat menemukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan harga mutlak maka perlu dipahami sifat-sifat berikut ini:

Sifat 1: Jika $|f(x)| < a$ maka $f(x) < a$ atau $-f(x) < a$

Sifat 2: Jika $|f(x)| > a$ maka $f(x) > a$ atau $-f(x) > a$

Sifat 3: Jika $|f(x)| < |g(x)|$ maka $f(x)^2 < g(x)^2$

Sifat 4: Jika $|f(x)| > |g(x)|$ maka $f(x)^2 > g(x)^2$



Soal Pilihan Ganda

1. Nilai $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $|2x - 5| < 1$ adalah
 - a. $x < 3$
 - b. $x < 2$
 - c. $2 < x < 3$
 - d. $-3 < x < -2$
 - e. $x > 2$

2. Himpunan penyelesaian dari $x^2 - 10x + 21 < 10$, $x \in \mathbb{R}$ adalah
 - a. $\{x \mid x < 3 \text{ atau } x > 7, x \in \mathbb{R}\}$
 - b. $\{x \mid x < -7 \text{ atau } x > 3, x \in \mathbb{R}\}$
 - c. $\{x \mid -7 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$
 - d. $\{x \mid -3 < x < 7, x \in \mathbb{R}\}$
 - e. $\{x \mid 3 < x < 7, x \in \mathbb{R}\}$

3. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - 5x - 6 > 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$, adalah
 - a. $\{x \mid -6 < x < 1\}$
 - b. $\{x \mid -3 < x < 2\}$
 - c. $\{x \mid x < -1 \text{ atau } x > 6\}$
 - d. $\{x \mid x < -6 \text{ atau } x > 1\}$
 - e. $\{x \mid x < 2 \text{ atau } x > 3\}$

4. Harga-harga x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 3x - 10 < 0$ ialah....
 - a. $-2 < x < 5$
 - b. $0 < x < 5$
 - c. $x > 5$
 - d. $x < -2$
 - e. $-2 < x < 0$

5. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-2x^2 - 5x + 3 \leq 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$ adalah....
 - a. $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq \frac{1}{2}\}$
 - b. $\{x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ atau } x \geq 3\}$
 - c. $\{x \mid -3 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$
 - d. $\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$
 - e. $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq -\frac{1}{2}\}$

6. Himpunan penyelesaian dari $2(x - 3) \geq 4(2x + 3)$ adalah
- $\{x \mid x \leq -1\}$
 - $\{x \mid x \geq 1\}$
 - $\{x \mid x \leq 1\}$
 - $\{x \mid x \leq -3\}$
 - $\{x \mid x \geq -3\}$
7. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $(2x - 2)^2 < (5 - x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ adalah
- $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \leq \frac{7}{3}, x \in \mathbb{R}\}$
 - $\{x \mid x \leq 3 \text{ atau } x \leq -\frac{7}{3}, x \in \mathbb{R}\}$
 - $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq \frac{7}{3}, x \in \mathbb{R}\}$
 - $\{x \mid -3 \leq x \leq \frac{7}{3}, x \in \mathbb{R}\}$
 - $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$
8. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{1-2x}{2-x} \geq 3$ adalah
- $\{x \mid x > 5\}$
 - $\{x \mid 2 < x \leq 5\}$
 - $\{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$
 - $\{x \mid x < 2 \text{ atau } x \geq 5\}$
 - $\{x \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 5\}$
9. Pertidaksamaan $\frac{2x+7}{x-1} \leq 1$ dipenuhi oleh
- $x \leq -4 \text{ atau } x < 1$
 - $-4 < x \leq 1$
 - $0 \leq x \leq 1$
 - $-8 \leq x < 1$
 - $-8 \leq x \leq 1$
10. Agar pecahan $\frac{3x^2 + 3x - 10}{x^2 - x + 2}$ bernilai positif maka nilai x yang memenuhi adalah
- $x \leq -4 \text{ atau } x < 1$
 - $-4 < x \leq 1$
 - $0 \leq x \leq 1$
 - $-8 \leq x < 1$
 - $-8 \leq x \leq 1$
11. Harga x yang memenuhi $\sqrt{x^2} < 3$ adalah
- $0 \leq x < 3$
 - $0 < x \leq 3$
 - $-3 < x < 3$
 - $x \geq 3$
 - $x \geq -3$

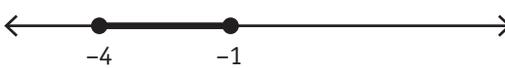
12. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x > \sqrt{x+6}$, $x \in \mathbb{R}$ adalah

- a. $\{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$
- b. $\{x \mid x < -3 \text{ atau } x > 2, x \in \mathbb{R}\}$
- c. $\{x \mid -6 < x < -2 \text{ atau } x > 3, x \in \mathbb{R}\}$
- d. $\{x \mid x < -2 \text{ atau } x > 3, x \in \mathbb{R}\}$
- e. $\{x \mid x > 2, x \in \mathbb{R}\}$

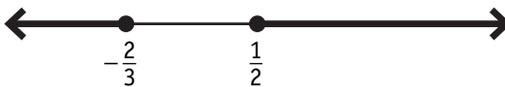
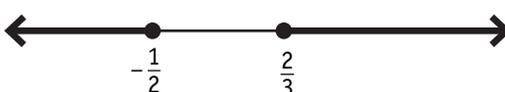
13. Nilai-nilai x yang memenuhi $x+2 > \sqrt{10-x^2}$ adalah

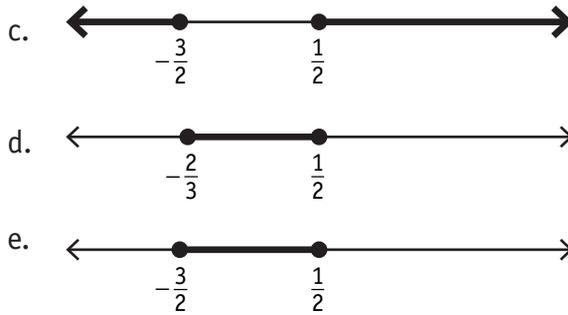
- a. $-\sqrt{10} \leq x < \sqrt{10}$
- b. $x < -3 \text{ atau } x > 1$
- c. $2 \leq x \leq \sqrt{10}$
- d. $1 < x \leq \sqrt{10}$
- e. $-3 < x \leq \sqrt{10}$

14. Jika himpunan penyelesaian dinyatakan dengan bagian tebal pada garis bilangan maka himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ adalah

- a. 
- b. 
- c. 
- d. 
- e. 

15. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $6x^2 + x - 2 > 0$ dinyatakan dengan bagian tebal pada garis bilangan

- a. 
- b. 



Soal Uraian

16. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x + 2 > \sqrt{10 - x^2}$
17. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\left| \frac{x + 3}{x - 4} \right| < 2$
18. Tentukan harga-harga x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{x - 3}{x^2 - 8x + 7} > 0$
19. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{2x + 7}{x - 1} \leq 1$
20. Tentukan himpunan penyelesaian $(x + 5)x \leq 2(x^2 + 2)$