

## Още една гледна точка към измерителите за структурни изменения

### 1. Общи бележки

В (Гатев, Косева, Спасов, 1991, с. 319-338) са описани три различни познавателни проблема, свързани с анализа на структури:

- измерване на структурни изменения;
- измерване на различия между пространствени и други статични структури;
- измерване на неравномерността на структурите.

Най-общо, първият познавателен проблем се отнася до измерване на изменението на една и съща структура през даден период, т.е. изменение в динамика. Вторият познавателен проблем се отнася до сравняването на две равноразмерни структури в един и същи момент, т.е. сравняване в статика. Третият познавателен проблем се отнася до сравняването на една структура с равномерната структура, използвана като еталон, т.е. това е частен случай на вторият познавателен проблем, при използване на еталонна структура.

Въпреки разликата между тези три познавателни проблеми, при всеки от тях са предложени измерители единствено за *големината* съответно на изменението, различието или неравномерността, които по същество са варианти на измерителя на структурни различия, т.е. подходът от анализа в статика се използва след незначително модифициране и при другите два познавателни проблема.

В (Христов, 1993; Христов, 1999; Христов, 2001; Христов, юбилеен брой; Янкова, 2001а; Янкова, 2001б) познавателните проблеми не са изрично разграничени, но отново едни и същи измерители се предлагат за изследване и на структурните различия, и на структурните изменения.

В (Христов, 1999; Янкова, 2001б) знакът за равенство между анализа в статика и анализа в динамика е поставен още в заглавията на статиите, като в (Янкова, 2001б, с. 13) е направено уточнението, че "При изследване на статистическите структури понятията структурни промени, структурни различия, структурни изменения и структурна динамика най-често се използват като равностойни. Поради това би могло да се направи следното уточнение: при статичен анализ да се говори за структурни различия, а при анализ в динамиката - за структурни изменения или промени". По-нататък се говори за "промяна на

структурната динамика" (Янкова, 2001б, с. 24-27), но от изложението става ясно, че се има предвид динамиката на измерителите на структурните различия, а не динамиката на самата структура.

Също така в (Янкова, 2001а, с. 25-26) се говори за "промяна в посоката на неравномерност" и "насоченост на структурната динамика", но от изложението става ясно, че се има предвид факторното влияние на въпросната промяна на *посоката* върху "общото структурно различие". Тези факторни влияния, но наречени съответно влияние на "промяната на посоката на неравномерността" и влияние на "промяната в степента на неравномерността" са посочени и в (Христов, 1993, с. 10-12). Тъй или иначе, отново не се измерва *посоката* на промяната, а само ефектите, които тя поражда.

Разгледаните литературни източници показват, че различните автори предлагат към различните познавателни проблеми да се прилагат едни и същи измерители като в зависимост от това какво се измерва, в единия случай се говори за измерители за структурни изменения, във втория - за измерители на структурни различия, а в третия - за измерители на структурна неравномерност.

Използването на измерителите за различие при анализа на неравномерността на структурите е оправдано, тъй като и в двата случая се сравняват статични структури. В същото време, между анализа в статика и анализа в динамика има принципна разлика, което прави недостатъчно използването в динамика на измерителите за различие. Разликата е в това, че при анализа в статика двете структури са равнопоставени, докато при анализа в динамика винаги едната структура е начална, а другата е крайна. Това означава, че началната структура е съществувала в един определен момент от времето, след което се е изменила и е достигнала крайната в друг следващ момент от времето, а не обратното. В такъв смисъл, при изменението всяка от двете структури има точно определено място, определено от хронологията на промяната, докато при различието няма значение коя структура е първа и коя втора. Това води до необходимостта при изследване на структурните изменения да се измерва **не само големината**, но и *посоката* на изменението, което от своя страна оправдава използването на векторната алгебра за целите на анализа.

## 2. Предлаган подход за анализ в динамика

Всяка структура с относителни дялове  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  може да се разглежда като точка в  $m$ -мерна правоъгълна координатна система с координати  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ , където  $m$  е броят на значенията на структурообразувания признак. Тъй като относителните дялове на структурата отговарят на условията, зададени със системата:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = 1 \\ p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases},$$

то всяка точка се намира във вътрешността на правилен многоъгълник с върхове  $A_i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и страни с дължина  $\sqrt{2}$ .

Нека началната структура има относителни дялове  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$ , а крайната –  $(p''_1, p''_2, \dots, p''_m)$ .

Основният въпрос е "Как?" се е изменила структурата. Този въпрос се разделя на други два въпроса "С колко?" и "Накъде?". За да можем да отговорим на тях, обаче, най-напред трябва да сме наясно за изходната позиция, от която започва изменението, т.е. трябва да отговорим и на въпроса "Откъде?". А за да отговорим на всички тези въпроси, трябва да разполагаме с някакви постоянни ориентири.

Тук ще предложа един подход, при който за ориентири се използват върховете  $A_i$  на многоъгълника. В този случай можем да изчислим разстоянията от точката  $B'(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$ , представяща началната структура, до всеки от върховете  $A_k$ :

$$(2) \quad \begin{aligned} B'A_k &= \sqrt{(p'_1 - 0)^2 + (p'_2 - 0)^2 + \dots + (p'_k - 1)^2 + \dots + (p'_m - 0)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (p'_i)^2 - 2p'_k + 1} \end{aligned}$$

Изчислявайки разстоянията  $B'A_k$  разбираме къде е разположена точката  $B'$  спрямо избраните ориентири<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> По същия начин можем да определим къде се намира точката  $B''(p''_1, p''_2, \dots, p''_m)$ , представяща

крайната структура, спрямо върховете на многоъгълника -  $B''A_k = \sqrt{\sum_{i=1}^m (p''_i)^2 - 2p''_k + 1}$

Сега вече можем да търсим отговор на въпросите "С колко?" и "Накъде?" се е изменила структурата.

Отговорът на въпроса "С колко?" всъщност е отговор на въпроса за разстоянието между две точки в правоъгълната координатна система (евклидово разстояние):

$$(3) \quad B'B'' = \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}$$

Дали това разстояние е голямо или малко? Отговор на този въпрос се дава като полученото разстояние се сравни с максимално възможното разстояние. В литературата (Христов, 1993, с. 9; Христов, 1999, с. 8; Христов, 2001, с. 59-60; Христов, юбилеен брой, с. 25; Янкова, 2001а, с. 28) е посочено, че максимално възможното разстояние е  $\sqrt{2}$  и ако отнесем полученото разстояние  $B'B''$  към теоретичното максимално възможно разстояние ( $\sqrt{2}$ ) ще получим нормираното евклидово разстояние:

$$(4) \quad \frac{B'B''}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}{2}},$$

Използването на нормираното евклидово разстояние за измерване на структурното изменение е пример за механично пренасяне на измерители от анализа в статика към анализа в динамика. Както вече беше казано по-горе, при анализа в статика двете структури са **равнопоставени**. Следователно максималното възможно разстояние между две произволни точки действително е разстоянието между два върха на многоъгълника. При анализа в динамика обаче, двете структури **не са равнопоставени**. Следователно максималното възможно разстояние не е между две произволни точки, а е между една произволна точка и началната точка  $B'$ , т.е. максимално възможното разстояние е разстоянието от началната точка до най-отдалечения връх –  $\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)$ . Ако отнесем полученото разстояние  $B'B''$  към реалното максимално възможно разстояние ( $\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)$ ) ще получим:

$$(5) \quad \frac{B'B''}{\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}}{\max(B'A_1, B'A_2, \dots, B'A_m)}$$

Този измерител показва *големината* на промяната в относително изражение спрямо максимално възможната промяна.

Сега да се опитаме да дадем отговор на въпроса "*Накъде?*".

При изследване на *посоката* на промяната, равнината, определена от върховете  $A_i$ , вече не може да бъде полезна. Това е така, защото вектора на промяната  $\overrightarrow{B'B''}$  всъщност е разлика от двата вектора  $\overrightarrow{OB''}$  и  $\overrightarrow{OB'}$ :

$$(6) \quad \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{OB''} - \overrightarrow{OB'} = (p_1'' - p_1', p_2'' - p_2', \dots, p_m'' - p_m'),$$

която е трети вектор  $\overrightarrow{OC}$  с координати  $(p_1'' - p_1', p_2'' - p_2', \dots, p_m'' - p_m')$ .

Очевидно вектора  $\overrightarrow{OC}$  не лежи в равнината, определена от върховете  $A_i$ . Следователно, въпросът е в коя равнина лежи този вектор.

Тъй като точките  $A_i$  са върхове на правилен многоъгълник, то този многоъгълник може да се впише в окръжност. Центърът ( $D$ ) на тази окръжност е равноотдалечен от всичките му върхове, следователно неговите координати удовлетворяват условието:

$$(7) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m p_i^2 - 2p_k + 1} = \text{const}, k = 1, 2, \dots, m$$

откъдето:

$$(8) \quad p_i = \frac{1}{m}, i = 1, 2, \dots, m$$

Следователно описаната около многоъгълника окръжност има център

$$D\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right).$$

Можем да направим трансляция по вектор  $\overrightarrow{DO} = \left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}\right)$ , която

изобразява точката  $D\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$  в центъра на координатната система

$O(0, 0, \dots, 0)^2$ . При тази трансляция, върхът  $A_i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$  на изходния

<sup>2</sup> Може да се докаже, че векторът  $\overrightarrow{DO}$  е перпендикулярен на равнината, определена от върховете  $A_i$ .

многоъгълник се изобразява във върха  $E_i \left( -\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \dots, 1 - \frac{1}{m}, \dots, -\frac{1}{m} \right)$  на еднакъв на него многоъгълник.

Предимствата на равнината, определена от върховете  $E_i$  са, че:

първо, съдържа координатното начало, като то същевременно е и център на описаната около многоъгълника  $E_1 E_2 \dots E_m$  окръжност,

второ, успоредна е на равнината, определена от върховете  $A_i$  (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 85-86), и

трето, всеки вектор от равнината, определена от върховете  $A_i$ , се изобразява в равен на него вектор в равнината, определена от върховете  $E_i$ , откъдето следва, че

четвърто, всички вектори, необходими за изследване на промяната лежат в равнината, определена от върховете  $E_i$ .

При трансляцията точката  $B'(p'_1, p'_2, \dots, p'_m)$  се изобразява в точката  $F' \left( p'_1 - \frac{1}{m}, p'_2 - \frac{1}{m}, \dots, p'_m - \frac{1}{m} \right)$ , точката  $B''(p''_1, p''_2, \dots, p''_m)$  се изобразява в точката  $F'' \left( p''_1 - \frac{1}{m}, p''_2 - \frac{1}{m}, \dots, p''_m - \frac{1}{m} \right)$ , откъдето векторът  $\overrightarrow{B'B''}$ , който показва *посоката* на промяната, ще се изобрази в равния на него вектор  $\overrightarrow{F'F''}$ , лежащ в равнината, определена от върховете  $E_i$ .

От  $\overrightarrow{F'F''} = \overrightarrow{B'B''} = (p''_1 - p'_1, p''_2 - p'_2, \dots, p''_m - p'_m)$  следва, че векторите  $\overrightarrow{B'B''}$  и  $\overrightarrow{F'F''}$  са равни на вектора  $\overrightarrow{OC}(p''_1 - p'_1, p''_2 - p'_2, \dots, p''_m - p'_m)$ . Но векторът  $\overrightarrow{F'F''}$  лежи в равнината, определена от върховете  $E_i$ , следователно и векторът  $\overrightarrow{OC}$  ще лежи в тази равнина. В такъв случай *посоката* на промяната спрямо съответния връх на многоъгълника може да се изследва чрез ъгъла  $COE_k$  между вектора на промяната и вектора на радиуса от центъра към върха  $E_k$ . Този ъгъл се определя чрез косинуса си, който се намира по формулата (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 75):

$$\begin{aligned}
 \cos COE_k &= \\
 (9) \quad &= \frac{(p_1'' - p_1')\left(-\frac{1}{m}\right) + (p_2'' - p_2')\left(-\frac{1}{m}\right) + \dots + (p_k'' - p_k')\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + (p_m'' - p_m')\left(-\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + \left(-\frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{m}\right)^2}} = \\
 &= \frac{(p_k'' - p_k')\sqrt{m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2} \sqrt{m-1}}
 \end{aligned}$$

От друга страна, описаната около правилния многоъгълник с върхове  $E_i$  окръжност има център  $O(0,0,\dots,0)$ , радиус:

$$(10) \quad OE_k = \sqrt{\left(-\frac{1}{m} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{m} - 0\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{m} - 0\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{m} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$$

и централен ъгъл  $E_kOE_j$  с косинус (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 75):

$$\begin{aligned}
 \cos E_kOE_j &= \\
 (11) \quad &= \frac{\left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right) + \left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{m}\right)}{\sqrt{\frac{m-1}{m}} \sqrt{\frac{m-1}{m}}} = \\
 &= -\frac{1}{m-1}
 \end{aligned}$$

Това означава, че структурата се променя в *посока* на този връх  $E_k$ , за който ъгъл  $COE_k$  е по-малък от половината от централния ъгъл, т.е.:

$$(12) \quad \cos COE_k > \cos \frac{E_kOE_j}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos E_kOE_j}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{m-1}}{2}} = \sqrt{\frac{m-2}{2(m-1)}}$$

Щом като промяната в равнината, определена от върховете  $E_i$ , е по *посока* на връх  $E_k$ , то промяната в равнината, определена от върховете  $A_i$ , ще бъде по *посока* на връх  $A_k$ .

Освен промяна по *посока* на даден връх  $A_k$  можем да изследваме промяната по *посока* на равнина, несъдържаща върха  $A_l$ , в подпространство с размерност  $m-1$ . Тази равнина се дефинира чрез системата (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 83 и 86):

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = 1 \\ p_l = 0 \end{cases},$$

която е еквивалентна на:

$$(14) \quad \sum_{i=1}^m p_i - p_l = 1$$

Нека пресечната точка на правата  $B'B''$  с тази равнина е  $G$ . Това означава, че (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 92):

$$(15) \quad \overrightarrow{B'G} = t \overrightarrow{B'B''} = (t(p_1'' - p_1'), t(p_2'' - p_2'), \dots, t(p_l'' - p_l'))$$

и освен това, точката  $G$  е проекция на точката  $B'$  при трансляция по вектора  $\overrightarrow{B'G}$ . Следователно точката  $G$  има координати (Киркоров, Бонев, Петков, 1974, с. 89):

$$(16) \quad p_i = p_i' + t(p_i'' - p_i')$$

Но точката  $G$  принадлежи на равнината, дефинирана с (14), следователно нейните координати  $p_i$  удовлетворяват уравнение (14), откъдето се получава:

$$(17) \quad t = \frac{p_l'}{-(p_l'' - p_l')}$$

След заместването на този резултат в (16) се получава:

$$(18) \quad p_i = \frac{p_i' p_l'' - p_i'' p_l'}{p_l'' - p_l'}$$

Сега вече можем да идентифицираме върха  $A_l$ .

Ясно е, че щом промяната е по *посока* на равнината, дефинирана с (14), трябва векторите  $\overrightarrow{B'G}$  и  $\overrightarrow{B'B''}$  да са еднопосочни, т.е.:

$$(19) \quad t = \frac{p_l'}{-(p_l'' - p_l')} > 0$$

От друга страна координатите на точка  $G$ , дефинирани с (18), трябва да удовлетворяват условията (1). Тъй като обаче, те удовлетворяват условията (13), то те удовлетворяват и първото условие в (1). Следователно, остава само да удовлетворят и второто условие в (1), т.е.:

$$(20) \quad p_i = \frac{p_i' p_l'' - p_i'' p_l'}{p_l'' - p_l'} \geq 0$$

Условията (19) и (20) се разглеждат в система, чието решение е:

$$(21) \quad \frac{p_i''}{p_i'} = \min\left(\frac{p_i''}{p_i'}\right) (i=1,2,\dots,m)$$

Практическата полза от този резултат е, че след като идентифицираме върха  $A_i$ , от (17) определяме  $t$ , а от (15) получаваме, че максимално възможната промяна в дадената посока е:

$$(22) \quad B'G = t \cdot B'B'' = \frac{p_i'}{-(p_i'' - p_i')} \sqrt{\sum_{i=1}^m (p_i'' - p_i')^2}$$

Като отнесем разстоянието  $B'B''$  към максимално възможната промяна в дадената посока ( $B'G$ ), получаваме:

$$(23) \quad \frac{B'B''}{B'G} = \frac{1}{t} = \frac{-(p_i'' - p_i')}{p_i'} = 1 - \frac{p_i''}{p_i'}$$

Този измерител, също както и измерителя, дефиниран с (5), показва големината на промяната в относително изражение, спрямо максимално възможната промяна в дадената посока.

### 3. Илюстрация на подхода с емпирични данни (анализ на динамиката на основната възрастова структура на населението)

Нека разгледаме основната възрастова структура на мъжкото население на България по данни от преброяванията на населението към 04.12.1992 година и 01.03.2001 година:

Таблица 1

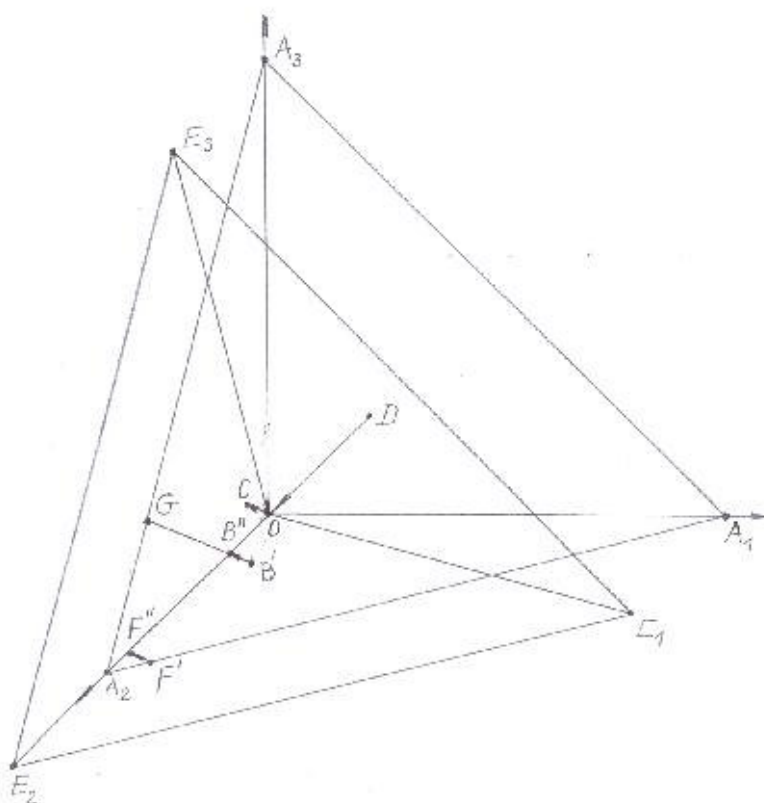
Основна възрастова структура на мъжкото население на България по данни от преброяванията на населението към 04.12.1992 година и 01.03.2001 година

Възрастови интервали <sup>3</sup>	Относителни дялове към:		$p'' - p'$	$\frac{p''}{p'}$
	04.12.1992 година ( $p'$ )	01.03.2001 година ( $p''$ )		
0-14	0,198	0,162	-0,037	0,816
15-64	0,674	0,693	0,018	1,027
65+	0,128	0,146	0,018	1,142
Общо	1,000	1,000	0,000	

**Източник:** НСИ, Преброяване на населението, жилищния фонд и земеделските стопанства през 2001, том 1, Население, книга 1, Демографски и социални характеристики на населението, С., 2004, с. 66-67

<sup>3</sup> Според класификацията на ООН (Христов, юбилеен брой, с. 28; Янкова, 2001а, с. 26).

Нека върхът  $A_1(1,0,0)$  представя структурата, в която всички мъже са във възрастовия интервал 0-14 навършени години, върхът  $A_2(0,1,0)$  представя структурата, в която всички мъже са във възрастовия интервал 15-64 навършени години, и върхът  $A_3(0,0,1)$  представя структурата, в която всички мъже са във възрастовия интервал над 65 навършени години (фигура 1).



Фигура 1. Графично представяне на основната възрастова структура на мъжкото население

Разстоянията от началната структура до върховете на многоъгълника са съответно (формула (2)):

$$B'A_1 = \sqrt{0,198^2 + 0,674^2 + 0,128^2 - 2 \cdot 0,198 + 1} = 1,055$$

$$B'A_2 = \sqrt{0,198^2 + 0,674^2 + 0,128^2 - 2 \cdot 0,674 + 1} = 0,402$$

$$B'A_3 = \sqrt{0,198^2 + 0,674^2 + 0,128^2 - 2 \cdot 0,128 + 1} = 1,120$$

Тези резултати показват, че началната структура на мъжкото население е най-отдалечена от върха  $A_3$  и най-близка до върха  $A_2$ .

Големината на настъпилата промяна е (формула (3)):

$$B'B'' = \sqrt{(0,162 - 0,198)^2 + (0,693 - 0,674)^2 + (0,146 - 0,128)^2} = 0,045$$

Това разстояние, отнесено към реалното максимално възможно разстояние (формула (5)) и към максимално възможното разстояние в дадената посока (формула (23)), дава съответно:

$$\frac{0,045}{\max(1,055; 0,402; 1,120)} = \frac{0,045}{1,120} = 0,040$$

$$1 - \min(0,816; 1,027; 1,142) = 1 - 0,816 = 0,184$$

Тези резултати показват, че настъпилата промяна е 4,0% от реалната максимално възможна промяна и 18,4% от максимално възможната промяна в дадената посока.

А самата посока определяме чрез косинусите на ъглите между вектора на промяната и вектора на радиуса от центъра на описаната окръжност към съответния връх (формула (9)):

$$\cos COE_1 = \frac{(0,162 - 0,198)\sqrt{3}}{0,045\sqrt{2}} = -1,000; COE_1 = 179^\circ 45' 20''$$

$$\cos COE_2 = \frac{(0,693 - 0,674)\sqrt{3}}{0,045\sqrt{2}} = 0,504; COE_2 = 59^\circ 45' 20''$$

$$\cos COE_3 = \frac{(0,146 - 0,128)\sqrt{3}}{0,045\sqrt{2}} = 0,496; COE_3 = 60^\circ 14' 40''$$

Тъй като косинуса на половината от централния ъгъл е (формула (12)):

$$\cos \frac{E_k OE_j}{2} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2} = 0,5,$$

то промяната е по посока на върха  $E_2$  (респ.  $A_2$ ), макар че посоката на промяната е почти по средата между върховете  $E_2$  и  $E_3$  (респ.  $A_2$  и  $A_3$ ). Видно е също така, че възрастовата структура на мъжкото население се отдалечава от върха  $A_1$ .

Нека сега да разгледаме основната възрастова структура на женското население на България. Изходните данни, заедно с направените изчисления са показани в таблица 2.

Таблица 2

Основна възрастова структура на женското население на България по данни от преброяванията на населението към 04.12.1992 година и 01.03.2001 година

Възrastови интервали	Относителни дялове към:		$p'' - p'$	$\frac{p''}{p'}$	Разстояния от началната структура до върховете	Косинуси на ъглите между вектора на промяната и векторите на радиусите	Ъгли между вектора на промяната и векторите на радиусите
	04.12.1992 година ( $p'$ )	01.03.2001 година ( $p''$ )					
0-14	0,181	0,146	-0,036	0,804	1,064	-0,925	157°44'9"
15-64	0,661	0,666	0,005	1,008	0,416	0,135	82°15'51"
65+	0,158	0,188	0,030	1,193	1,086	0,791	37°44'9"
Общо	1,000	1,000	0,000				

**Източник:** НСИ, Преброяване на населението, жилищния фонд и земеделските стопанства през 2001, том 1, Население, книга 1, Демографски и социални характеристики на населението, С., 2004, с. 66-67

Резултатите в таблица 2 показват, че началната структура на женското население е най-отдалечена от върха  $A_3$  и най-близка до върха  $A_2$ .

*Големината* на настъпилата промяна е (формула (3)):

$$V'B'' = \sqrt{(0,146 - 0,181)^2 + (0,666 - 0,661)^2 + (0,188 - 0,158)^2} = 0,047$$

Това разстояние, отнесено към реалното максимално възможно разстояние (формула (5)) и към максимално възможното разстояние в дадената *посока* (формула (23)), дава съответно:

$$\frac{0,047}{\max(1,064; 0,416; 1,086)} = \frac{0,047}{1,086} = 0,043$$

$$1 - \min(0,804; 1,008; 1,193) = 1 - 0,804 = 0,196$$

Тези резултати показват, че настъпилата промяна е 4,3% от реалната максимално възможна промяна и 19,6% от максимално възможната промяна в дадената *посока*.

А самата *посока* определяме чрез косинусите на ъглите между вектора на промяната и вектора на радиуса от центъра на описаната окръжност към съответния връх. Тъй като косинуса на половината от централния ъгъл отново е 0,5, то промяната е по *посока* на върха  $E_3$  (респ.  $A_3$ ). Видно е също така, че възрастовата структура на женското население се отдалечава от върха  $A_1$ .

Сравняването на резултатите, получени за мъжкото и за женското население, показва интересна особеност:

Ако измерваме **само големината** на промяната, ще установим, че измененията на възрастовата структура на мъжете и на жените са приблизително еднакви. Ако обаче, изследваме и *посоката* на промяната, ще установим, че:

първо, началната възрастова структура на жените е по-близо до върха, представлящ възрастовия интервал над 65 навършени години, отколкото началната възрастова структура на мъжете, и

второ, промяната при жените е по *посока* на върха, представлящ възрастовия интервал над 65 навършени години, а при мъжете е почти по средата между върховете, представлящи възрастовите интервали 15-64 навършени години и над 65 навършени години.

**Литература:**

- Гатев, К., Д. Косева, А. Спасов** (1991), *Обща теория на статистиката*, Наука и изкуство, С.
- Киркорев, И., К. Бонев, Е. Петков** (1974), *Висша математика*, Наука и изкуство, С.
- Къналиев, Т.** (1992), Относно понятието статистическа структура и измерителите на структура в статика, сп. *Статистика*, бр. 5
- Къналиев, Т.** (2003), Има ли подходящ измерител на структури и на структурни изменения в съвкупности?, сп. *Статистика*, бр. 2
- Сугарева, М.** (2001), Върху методите за количествено оценяване на разстояния между статистически разпределения (с критичен коментар на някои съвременни приложения в демографията), сп. *Статистика*, бр. 6
- Христов, Е.** (1993), Измерители за структурни промени и на техните ефекти в демографския анализ, сп. *Население*, бр. 3
- Христов, Е.** (1999), Измерители за обобщени структурни различия (промени), сп. *Статистика*, бр. 2
- Христов, Е.** (2001), Обобщаващи измерители за основни видове структурни различия в икономическите и социалните изследвания, сп. *Статистика*, бр. 6
- Христов, Е.,** Влияния на промените на повъзрастовата смъртност и възрастовата структура на населението върху изменението на брутната смъртност (методологични решения и емпиричен анализ), сп. *Население*, Юбилеен брой “10 години Население”
- Янкова, Н.** (2001а), Изследване развитието на възрастовата структура на населението в България за периода 1920-1999 г., сп. *Статистика*, бр. 5
- Янкова, Н.** (2001б), Сравнителен анализ на обобщаващи измерители за структурни изменения (различия), сп. *Статистика*, бр. 2