6

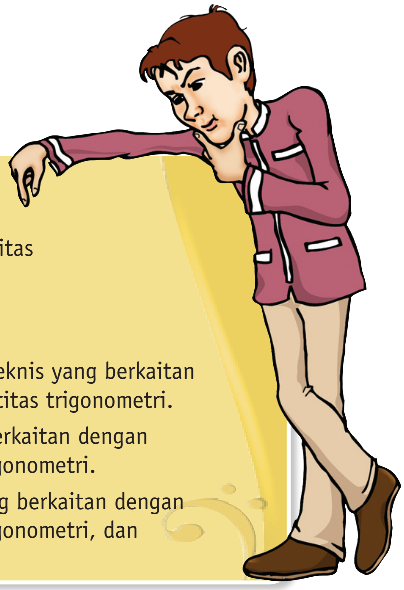
TRIGONOMETRI

Dan dari mana saja engkau keluar (untuk mengerjakan sembahyang), maka hadapkanlah mukamu ke arah Masjidil Haram (Ka'bah), dan sesungguhnya perintah berkiblat ke Ka'bah itu adalah benar dari Tuhanmu. Dan (ingatlah), Allah tidak sekali-kali lalai akan segala apa yang kamu lakukan (QS. Al-Baqarah: 149).

Sumber: www.islamicity.com

Dalam ajaran Islam, menghadap ke arah kiblat (Masjidil Haram/Ka'bah) adalah suatu tuntunan syari'at di dalam melaksanakan ibadah tertentu, ia merupakan sesuatu yang wajib dilakukan ketika mengerjakan ibadah sholat dan mengebumikan jenazah orang Islam dan ia juga adalah suatu perkara yang sunah dilakukan ketika azan, berdo'a, berdzikir, membaca Al-Qur'an, menyembelih binatang dan sebagainya.

Tahukah kamu, apa GPS itu? GPS singkatan dari *Global Positioning System*, yaitu suatu sistem yang menginformasikan tentang data lintang dan bujur suatu tempat. Ka'bah berada pada 21^{o} 25′ LU dan 39^{o} 50′ BT. Bagaimana dengan tempat tinggalmu? Kamu bisa mencarinya di map encarta atau lihat peta daerahmu yang ada informasi tentang lintang dan bujur itu.



Standar Kompetensi

Menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

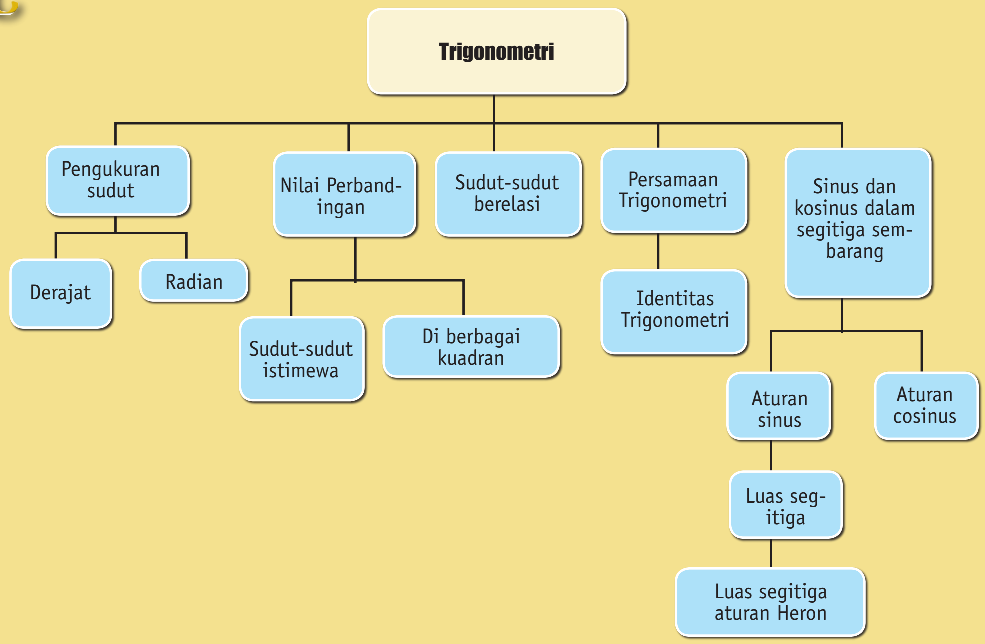
1. Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan teknis yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.
2. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.
3. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri, dan penafsirannya.

Indikator

Setelah mempelajari pokok bahasan dalam bab ini, kamu diharapkan mampu:

1. Menentukan nilai perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku.
2. Menentukan nilai perbandingan trigonometri dari sudut khusus.
3. Menentukan nilai perbandingan trigonometri dari sudut di semua kuadran.
4. Menggambar grafik fungsi trigonometri sederhana.
5. Menyelesaikan persamaan trigonometri sederhana.
6. Membuktikan identitas trigonometri sederhana.
7. Menyelesaikan perhitungan soal menggunakan aturan sinus dan aturan kosinus.
8. Menghitung luas segitiga yang komponennya diketahui.
9. Mengidentifikasi masalah yang berhubungan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.
10. Membuat model matematika yang berhubungan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.
11. Menentukan penyelesaian model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.
12. Menafsirkan hasil penyesaian masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.

Peta Konsep



Kata Kunci

Derajat	Radian	Kuadran
Sinus	Cosinus	Tangen
Cotangen	Secan	Cosecan
Persamaan trigonometri	Sudut-sudut istimewa	
Identitas trigonometri	Fungsi trigonometri	

Kehidupan selalu melahirkan sesuatu yang baru, keinginan, hasrat, dan kehendak bagi perubahan

(Muhammad Iqbal)

SEBELUM mengkaji materi Trigonometri, marilah kita baca dan kaji bersama Al-Qur'an Surah Al-Baqarah : 149 berikut ini.

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۖ وَإِنَّهُۥ لَلۡحَقُّ
مِن رَّبِّكَۗ وَمَا ٱللَّهُ بِغَٰفِلٍ عَمَّا تَعۡمَلُونَ ١٤٩

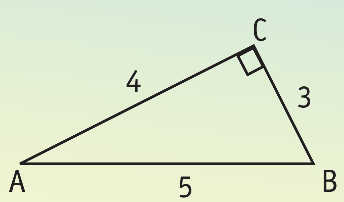
Artinya:

> Dan dari mana saja engkau keluar (untuk mengerjakan sembahyang), maka hadapkanlah mukamu ke arah Masjidil Haram (Ka'bah), dan sesungguhnya perintah berkiblat ke Ka'bah itu adalah benar dari Tuhanmu. Dan (ingatlah), Allah tidak sekali-kali lalai akan segala apa yang kamu lakukan.

Kuis Apersepsi

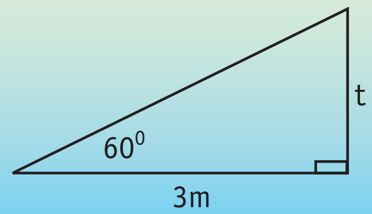
Sudah siapkah kamu menjelajahi dunia " Trigonometri" ini? Untuk mengukur apakah kamu termasuk orang yang sudah siap atau tidak, kamu bisa menguji diri sendiri lewat kuis apersepsi ini.

1. Temukan nilai sin A, cos B dan tg A pada segitiga siku-siku berikut ini!



2. Hitunglah nilai dari:
   a. Sin 30°
   b. Cos 60°
   c. Sin 120°
   d. Cos 120°
   e. Sin 210°
   f. Tg 315°
3. Jika diketahui cos $\alpha = \frac{4}{5}$ maka temukan nilai:
   a. Sin α
   b. Tg α

4. Jika diketahui sin $\alpha = 0,5$ maka temukan nilai dari:
   a. Cos α b. Tg α
5. Hitunglah nilai tinggi t pada segitiga berikut ini:



A. Sejarah Trigonometri

Tahukah kamu apa *"trigonometri"* itu? Istilah trigonometri berasal dari bahasa Yunani yang dibentuk dari kata *"tri"* yang berarti tiga, *"gonon"* bermakna sudut dan *"metria"* yang berarti pengukuran. Jadi, ilmu trigonometri adalah cabang matematika yang mempelajari dan menyelidiki hubungan antara garis-garis dan sudut-sudut dalam segitiga.

Sumber: www.pre-renaissance.com

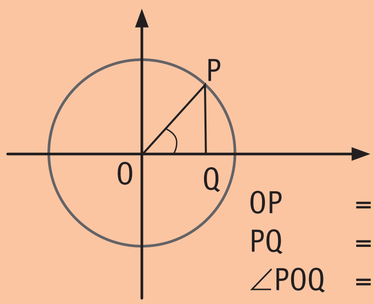
Muhammad bin Jabir al-Harrani al-Battani (858-929 M) tengah menggunakan astrolobes (alat astronomi)

Seorang ahli astronomi bernama Hipparchus yang berasal dari Nicocea, Yunani yang hidup pada tahun 160 -120 SM, dipandang sebagai peletak dasar lahirnya ilmu trigonometri. Hipparchus merupakan orang pertama yang menyusun trigonometri secara sistematik, meskipun perkataan trigonometri itu sendiri belum ada pada waktu itu. Ia mulai mencoba menyelidiki dan membuktikan dalil dan rumus-rumus yang yang diperoleh dari orang Mesir kemudian mengembangkannya. Pekerjaan itu dilanjutkan oleh Claudius Ptolemy (2 abad SM), juga seorang astronomi bangsa Yunani.

Selepas kejatuhan Iskandariyah, sains Yunani hanya digunakan di selatan Itali dan Byzantine. Kemudian sains Yunani dihidupkan kembali dan dikembangkan oleh orang Islam. Pada abad ke-9 dan 11 M ketika Eropa masih dalam jaman kegelapan, sains dan kebudayaan Islam mencapai puncak kejayaannya. Kajian trigonometri dilakukan secara serius oleh orang-orang Islam pada abad 12 dan 13.

Trigonometri orang Islam semula menyandarkan pada apa yang telah dikaji oleh Claudius Ptolemy. Namun akhirnya, matematikawan Islam bernama *Muhammad bin Jabir al-Harrani al-Battani* (244–317 H/ 858–929 M) berkebangsaan Irak mulai mengembangkan trigonometri. Al-Battanilah orang pertama memasukkan *sinus (jaib)* dan *cosinus* dalam matematika.

Misalkan ada sebuah garis lurus (= jari-jari) yang berputar berlawanan arah jarum jam. Sebuah garis dilukiskan dari ujung jari-jari di depan sudut yang besarnya sejauh perputarannya. Garis tersebut oleh *Claudius Ptolemy* disebut sebagai "setengah perentas". Panjang garis setengah perentas memiliki keterkaitan yang erat dengan besar sudut putarnya.



OP = Jari-jari
PQ = setengah perentas
$\angle POQ$ = besar sudut putar

Setengah parentas dalam bahasa Arab dikenal dengan *jiba* dan orang Eropa keliru melafalkannya menjadi *jaib*. Ahli matematika Eropa sudah terbiasa dengan kata *jaib* yang artinya "bukaan sejenis pakaian pada paras leher dan dada". Oleh karena sudah terbiasa dengan kata itu, ketika orang Eropa menerjemahkannya dalam Bahasa Latin mereka memilih kata *sinus* yang berarti *dada* atau *lipat*.

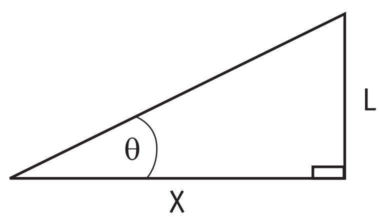
Al-Battani yang nama lengkapnya *Mohammad ibn Jabir ibn Sinan Abu Abdullah al-Battani* adalah seorang astronom dan matematikawan Islam yang lahir di Battan, Mesopotamia pada tahun 850 M dan meninggal di Damsyik 929 M. Karya-karya Al-Battani yaitu *De Scienta* (Sains) dan *De Numeris Stellarum et Motibus* (Nomor bintang-bintang dan pergerakannya).

Al-Battani yang oleh orang Latin dipanggil sebagai Albateganius melengkapi fungsi-fungsi trigonometri dengan fungsi *umbra* dan *umbra versa* (atau *cotangen* dan *tangen* sekarang ini). Al-Battani bukan saja mampu menyusun tabel sinus, cosinus, tangen dan cotangen dari 0° sampai 90° dengan ketepatan yang baik, juga memperkenalkan operasi-operasi aljabar pada identitas trigonometri.

Al-Battanilah orang yang pertama kali memasukkan istilah sinus, cosinus dalam matematika sebagai pengganti atas hypotenuse yang banyak digunakan oleh orang Yunani

Al-Battani yang juga mendapat gelar sebagai *"Ptolemy Baghdad"* mampu menyusun hubungan antara ketinggian *(altitude)* matahari, tinggi menara L dan bayangannya x dengan formula sebagai berikut:

$$x = \frac{L\sin(90-\theta)}{\sin\theta} = L\cot\theta$$



Seorang matematikawan Jerman dari Heidelberg Bartholomaus Pitiscus (1561–1613) merupakan penulis buku pertama yang menggunakan istilah *trigonometri* (1595). Mulai saat itu istilah trigonometri dipergunakan orang sampai sekarang ini.

Perlu Diketahui

Abu Abd Allah Muhammad ibn Jabir ibn Sinan al-Raqqi al-arrani al–abi al-Battani (244 – 317 H/ 858 – 929 M) lahir di Harran dekat Urfa Mesopotamia (sekarang ini di Turki). *Albatenius* adalah nama populernya dalam bahasa Latin.

Al-Battani menghasilkan beberapa hubungan trigonometri, yaitu:

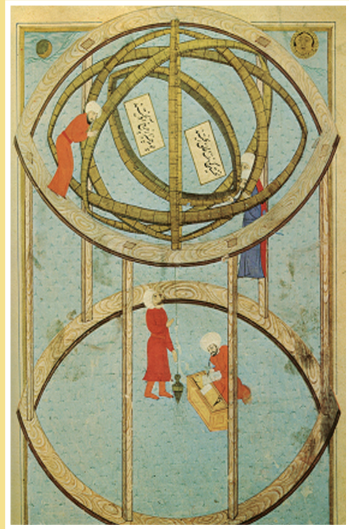
$$\text{tg a} = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\sec a = \sqrt{1 + \text{tg}^2 a}$$

Dalam bidang astronomi Al-Battani menghitung perkiraan equinoxes sebesar 54,5″ pertahun dan 1° dalam waktu 66 tahun dan inklinasi dari sumbu di bumi (equator) sebesar 23°35′. Prestasi gemilangnya adalah menentukan bahwa tahun syamsiah adalah 365 hari, 5 jam, 46 menit dan 24 detik.

Pergulatannya dengan bidang astronomi dimulai sejak berusia 20 tahun, hingga akhir hayatnya. *La Lande* seorang ahli astronomi Perancis menyatakan bahwa al-Battani termasuk salah seorang dari dua puluh orang besar ahli astronomi dalam sejarah manusia. Sementara, George Saarton mengatakan bahwa al-Battani ilmuwan besar astronomi di Barat dan Timur.

Aktivitas al-Battani terfokus pada al-zayj *(al-zij)* yaitu penyusunan kalender astronomi, yang ia buat pada tahun 287 H/900 M secara cermat dan akurat. Pengamatannya yang sangat cermat mengenai gerhana matahari, menjadi landasan yang pasti bagi pengamatan sejenis hingga tahun 1749 M (Cukup lama bukan?). Al-Battani telah berhasil menentukan derajat kemiringan lingkaran gerhana yaitu 23°35′. Hasil perhitungan seperti itu sangat menakjubkan dan mengagumkan, karena pada saat itu belum ada seorang penelitipun yang menggunakan alat



Sumber: Encarta Encyclopedia

Para astronom bekerja dengan globe armillary untuk menyelidiki pergerakan bumi dan besar sudut inklinasinya. Luar biasa pergerakkan bumii, ia bagi waktunya untuk mendapatkan sinar matahari di belahan bumi selatan dan belahan bumi utara sama adilnya dalam tiap tahunnya. Mengapa demikian? Karena bumi di jalankan oleh Yang Maha Adil. Apa yang bakal terjadi jika pergerakkan bumi dikontrol oleh negara tertentu?

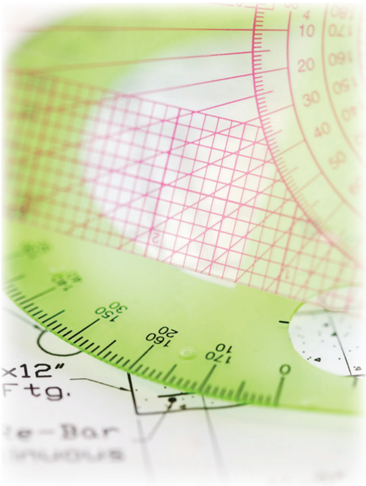
astronomi canggih seperti sekarang ini. Seribu tahun setelah al-Battani wafat --- di Qasr al-Jiss Irak 929 M --- *La Lande* menghitung kemiringan tersebut dan hasilnya $23^{\circ}35'41''$ dengan tambahan beberapa detik saja.

Dalam bidang ilmu pasti, al-Battani adalah orang pertama yang memasukkan *sinus* dan *cosinus* dalam matematika. Dia menggunakan sinus dan cosinus sebagai pengganti atas *hypotenuse* yang banyak digunakan oleh orang Yunani. Lalu ia menyempurnakan dengan bayangan semu *(cotangen)* dan bayangan inti atau *shadows (tangen)* atas inspirasi gagasan al-Marwazi.

B. Pengukuran Sudut

ADA dua macam satuan sudut yang dipergunakan orang untuk mengukur sudut, yaitu *derajat* dan *radian*.

Sudut dalam derajat



Mula-mula kita membagi sebuah lingkaran menjadi 360 buah sudut pusat yang sama besarnya. Sebuah sudut pusat itulah yang kita pergunakan sebagai satuan untuk mengukur besarnya suatu sudut, dinamakan satu derajat dan diberi lambang 1°. Sudut yang besarnya 1° masih dapat dibagi menjadi 60 bagian yang sama besar. Satu bagiannya itu disebut satu menit dan diberi lambang $1'$. Demikian pula sudut yang besarnya $1'$ masih dapat dibagi lagi menjadi 60 bagian yang sama besar. Satu bagiannya itu dinamakan satu detik dan diberi lambang $1''$.

$$1^{\circ} = 60' = 3600''$$

Contoh 6.1

Nyatakan sudut $127^\circ 24'$ dalam satuan derajat!

Peyelesaian:

a) Ubah dalam bentuk penjumlahan

$127^\circ 24' = 127^\circ + 24'$

b) Ubah satuan menit ke derajat (bagi dengan 60)

$$\begin{aligned} 127^\circ 24' &= 127^\circ + 24' \\ &= 127^\circ + (24 : 60)^\circ \\ &= 127^\circ + 0{,}4^\circ \\ &= 127{,}4^\circ \end{aligned}$$

Jadi, $127^\circ 24' = 127{,}4^\circ$

Contoh 6.2

Nyatakan ukuran sudut $12{,}857^\circ$ itu dalam derajat menit dan detik!

Penyelesaian:

a) Temukan hasil bagi dan pisahkan bentuk desimalnya.

$12{,}857^\circ = 12^\circ + 0{,}857^\circ$

b) Ubahlah $0{,}857^\circ$ ke dalam satuan menit (kalikan dengan 60) dan pisahkan bentuk desimalnya.

$$\begin{aligned} 0{,}857 \times 60' &= 51{,}42' \\ &= 51' + 0{,}42' \end{aligned}$$

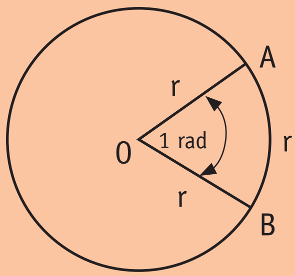
c) Ubahlah $0{,}42'$ ke dalam satuan detik.

$$\begin{aligned} 0{,}42 \times 60'' &= 25{,}2'' \\ &= 25'' + 0{,}2'' \end{aligned}$$

d) Jadi, $12{,}857^\circ = 12^\circ 51' 25''$

Sudut dalam radian

Satu radian adalah besarnya sudut pusat dalam suatu lingkaran yang menghadap busur lingkaran sepanjang jari-jari itu.



Sudut satu radian cukup ditulis dengan 1 rad
r = jari-jari lingkaran

Contoh 6.3

Berapa radian besar sudut β yang menghadap busur yang yang panjangnya 18 cm dan jari-jari lingkarannya 12 cm?

Penyelesaian:

a) Rumus:

$$\angle\beta = \frac{\text{panjang busur}}{\text{jari} - \text{jari}}\,\text{rad}$$

b) Panjang busur = 18 cm dan r = 12 cm, maka:

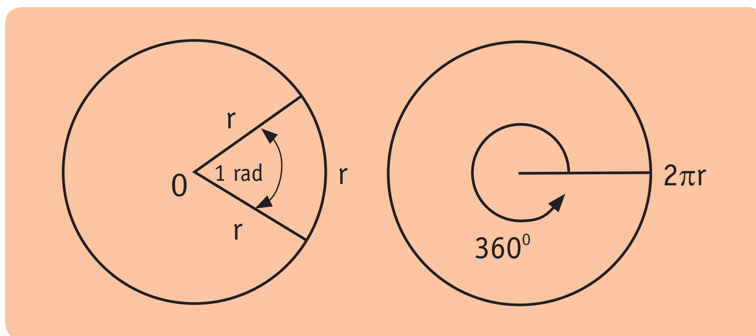
$$\angle\beta = \frac{18\,\text{cm}}{12\,\text{cm}}\,\text{rad} = 1{,}5\,\text{rad}$$

Jadi, besar sudut β tersebut adalah 1,5 radian

Di antara sebab yang mengeruhkan kedamaian adalah bergaul dengan oarang-orang dungu
(*Dr. 'Aidh al-Qarni*)

C. Hubungan antara Derajat dan Radian

Sudut 1 rad menghadap busur lingkaran sepanjang r (jari-jari lingkaran itu). Adapun sudut 360° menghadap busur lingkaran sepanjang 2π r (keliling lingkaran itu).



Dapat dibuat perbandingan sebagai berikut.

$$\frac{1 \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{r}{2\pi r}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{r}{2\pi r} \times 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ rad} = 57{,}296^\circ$$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

Jadi $1 \text{ rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

$$1 \text{ rad} = 57{,}296^\circ$$

Sekarang sudut 1° sama dengan berapa radian?

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$$

$$1^\circ = 0{,}01745 \text{ rad}$$

Jadi $1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ}$ rad

$1^\circ = 0{,}01745$ rad

CATATAN:

Sudut a π rad, cukup ditulis aπ

Sudut 2π rad, cukup ditulis 2π

Sudut 0,5 rad, cukup ditulis 0,5

Contoh 6.4

Nyatakan sudut-sudut berikut dalam radian!

i) 30°

ii) 135°

iii) $25^\circ 30'$

Penyelesaian:

a) Gunakan rumus $1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ}$ rad atau

$1^\circ = 0{,}01745$ rad

b) Berdasarkan rumus tersebut diperoleh.

i) $30^\circ = 30^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ}$ rad $= \dfrac{1}{6}\pi$ rad atau

$30^\circ = 30^\circ \times 0{,}01745$ rad $= 0{,}5253$ rad

ii) $135^\circ = 135^\circ \times \dfrac{\pi}{180^\circ}$ rad $= \dfrac{3}{4}\pi$ rad atau

$135^\circ = 135^\circ \times 0{,}01745$ rad $= 2{,}3558$ rad

iii) $25^\circ 30' = 25{,}5^\circ = 25{,}5^\circ \times 0{,}01745$ rad $= 0{,}444975$ rad

Contoh 6.5

Nyatakan sudut-sudut berikut dalam derajat!

i) $\frac{1}{3}\pi$ ii) $\frac{5}{9}\pi$ iii) $\frac{2}{5}$rad

Penyelesaian:

a) Gunakan rumus

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ atau}$$

$$1 \text{ rad} = 57{,}296^\circ$$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$$

b) Berdasarkan rumus tersebut diperoleh.

i) $\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$

ii) $\frac{5}{9}\pi = \frac{5}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 100^\circ$

iii) $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 57{,}296^\circ = 22{,}9184^\circ$

Dapatkah kamu mengubah hasil perhitungan (iii) ini dalam bentuk derajat menit dan detik?

Latihan 6.A

Ukuran Sudut

1. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut ini!

a) $\frac{1}{3}$ $(32^\circ\, 18')$ c) $\frac{1}{6}$ $(83^\circ 18')$

b) $\frac{1}{5}$ $(24^\circ 15')$ d) $\frac{1}{4}$ $(74^\circ 28' 20'')$

Petunjuk:
Ubahlah sudut dalam bentuk desimal terlebih dahulu kemudian kalikan dengan pecahan tersebut.

2. Nyatakan sudut-sudut berikut ini dalam derajat, menit, dan detik!
   a) $30{,}5^\circ$ b) $42{,}3^\circ$
   c) $65{,}12^\circ$ d) $75{,}45^\circ$

3. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam ukuran radian!
   a) 15° b) 30°
   c) 150° d) 225°
   e) 210° f) 330°

4. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam ukuran derajat!
   a) $\frac{5\pi}{6}$ rad b) $\frac{2\pi}{9}$ rad
   c) $\frac{7\pi}{3}$ rad d) $\frac{3}{10}\pi$ rad
   e) $\frac{3}{5}\pi$ rad f) $\frac{3}{2}\pi$ rad

5. Sebuah roda sepeda motor berputar dengan laju 36 rpm (putaran per menit). Nyatakan laju sudut roda sepeda motor tersebut dalam satuan:
   a) putaran/detik
   b) radian/menit
   c) radian/detik

Sumber: www.worldsport.com

6. Titik O merupakan pusat lingkaran dan busur AB mempunyai panjang 0,3 kali keliling lingkaran. Nyatakan besar sudut pusat AOB dalam ukuran radian.

Orang tidak akan pernah menemukan pulau-pulau baru tanpa bersedia meninggalkan pantai untuk jangka waktu yang sangat panjang

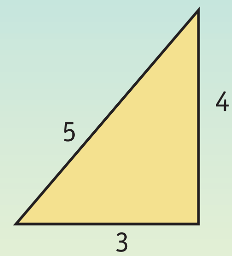
(*Andre Gide*)

Curhat Matematika...


Sumber: Dok. Penerbit

Hai namaku Nabila. Tahukah kamu apa “triple Pythagoras“ itu? Benar, jika dua buah sisi yang siku-siku dinyatakan sebagai a dan b, dan hipotenusanya sebagai c maka teorema Phytagoras dapat dinyatakan sebagai $a^2 + b^2 = c^2$. Triple Pythagoras adalah himpunan dari ketiga buah sisi tersebut [a . b, c], misalnya 3, 4, 5.

Menurut pengalamanku, dengan menghafal triple-triple Pythagoras, akan sangat membantuku dalam menemukan nilai perbandingan-perbandingan atau ”nisbah-nisbah” trigonometri, seperti nilai nisbah sin, cos dan tan pada segitiga siku-siku tertentu.



$3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$

Misalnya ada sebuah triple Pythagoras [7,24, 25]. Seandainya saya diminta untuk menemukan nilai cos A dan tan A jika diketahui sin A = 7/25 maka dengan mudah aku bisa menemukan bahwa nilai cos A = 24/25 dan tan A = 7/24 tanpa melukiskan segitiganya terlebih dahulu. Tahukah kamu, mengapa bisa demikian? Contoh lain, misalnya diketahui sebuah triple Pythagoras [5, 12, 13] dan nilai cos B = 5/13, dapatkah kamu menemukan nilai perbandingan untuk sin B dan tan B? Jelaskan, mengapa?

Nah... sekarang, tahukah kamu bagaimana caranya memproduksi triple-triple Phytagoras itu? Berikut adalah kaidah yang sangat luar biasa, yang bisa kita gunakan untuk “memproduksi“ hal itu.

$$[(2n + 1), 2n(n + 1), (2n^2 + 2n + 1)]$$

Caranya mudah, tentukan sebuah bilangan sebagai pengganti nilai n. Katakanlah 3 atau n = 3. Substitusikan n = 3 pada kaidah di atas,

$2n + 1= 2.3 + 1= 6 + 1 = 7,$
$2n(n + 1) = 2.3(3 + 1) = 6.4 = 24,$
$2n^2 + 2n + 1 = 2.9 + 2.3 + 1 = 25$

n	$2n + 1$	$2n\ (n + 1)$	$(2n^2 + 2n + 1)$	Triple Phytagoras
1	$2 + 1 = 3$	$2\ (2) = 4$	$2 + 2 + 1 = 5$	3, 4, 5
2	$4 + 1 = 5$	$4\ (3) = 12$	$8 + 4 + 1 = 13$	5, 12, 13
3	$6 + 1 = 7$	$6\ (4) = 24$	$18 + 2 + 1 = 5$	7, 24, 25
4	$8 + 1 = 9$	$8\ (5) = 40$	$32 + 8 + 1 = 41$	9, 40, 41

Dapatkah kamu temukan cara lain untuk memproduksi triple Pythagoras? Ya, cara lain yang bisa kita lalui untuk memproduksi triple Pythagoras adalah dengan, pertama-tama, tentukan dua bilangan terlebih dahulu misalnya bilangan pertama x dan bilangan kedua y, dimana bilangan pertama harus lebih besar dari bilangan kedua. Lalu gunakan kaidah ini:

$$[(x^2 + y^2),\ (x^2 - y^2),\ 2x\ y]$$

Dapatkah kamu temukan sebuah tripel Pythagoras dengan cara ini? Adakah cara lain untuk bisa menemukan triple Pythagoras?

D. Perbandingan Trigonometri

Sumber: Encarta Encyclopedia

Pythagoras, ahli matematika abad ke 6 SM. Bekerja memahami hubungan matematika yang terjadi di alam ini

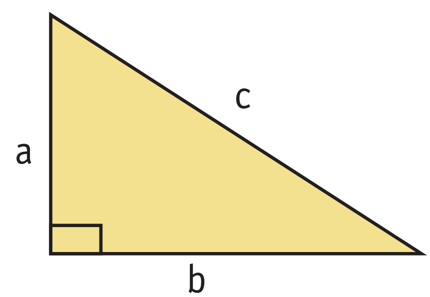
Pada pelajaran terdahulu, kita sudah tahu bahwa pada unsur-unsur segitiga siku-siku berlaku: Teorema Pythagoras dan terdapatnya relasi trigonometri antara sisi-sisi dan sudut-sudutnya. Pada bagian ini kita akan menyegarkan ingatan kembali akan hal tersebut.

Teorema Phytagoras

Misalkan a, b, dan c adalah sisi-sisi pada segitiga siku-siku dan c adalah sisi miringnya (hipotenusanya). Maka menurut Pythagoras

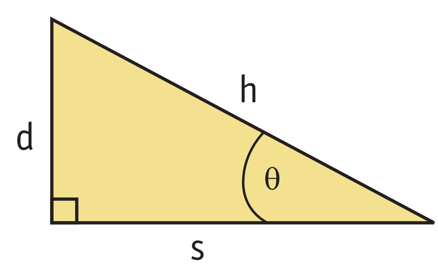
berlaku hubungan:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Perbandingan trigonometri

Relasi trigonometri antara sisi-sisi dan sudut-sudut dalam segitiga siku-siku adalah sebagai berikut:



d = sisi di depan sudut θ
s = sisi di samping sudut θ
h = *hipotenusa* atau sisi miring

Kemudian relasi trigonometri didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d}{h}, \sin\theta \text{ dibaca sinus } \theta$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{hipotenusa}} = \frac{s}{h}, \cos\theta \text{ dibaca cosinus } \theta$$

$$\text{Tg}\,\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{d}{s}, \tan\theta \text{ dibaca tangen } \theta$$

$$\text{Cosec}\,\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{sisi depan}} = \frac{h}{d}, \text{cosec } \theta \text{ dibaca cosecan } \theta$$

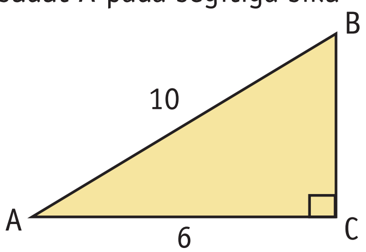
$$\text{Sec}\,\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{sisi samping}} = \frac{h}{s}, \sec\theta \text{ dibaca secan } \theta$$

$$\text{Cotg}\,\theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi depan}} = \frac{s}{d}, \text{cotg } \theta \text{ dibaca cotangen } \theta$$

Dari relasi trigonometri tersebut di atas terlihat bahwa *cosec, sec* dan *cotg* berturut-turut adalah kebalikan dari *sin, cos* dan *tg*.

Contoh 6.6

Tentukan perbandingan trigonometri untuk sudut A pada segitiga siku-siku dengan panjang AB = 10 dan AC = 6.



Penyelesaian:

a) Sketlah terlebih dahulu segitiga siku-siku tersebut.

b) Gunakan teorema Pythagoras untuk menemukan sisi segitiga yang lainnya.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

Diketahui AB = 10 dan AC = 6 maka

$10^2 = 6^2 + BC^2$

$BC^2 = 100 - 36$

$BC = 8$

c) Perbandingan-perbandingan trigonometri

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} \qquad \text{Cosec}\,A = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{8}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} \qquad \text{Secan}\,A = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{6}$$

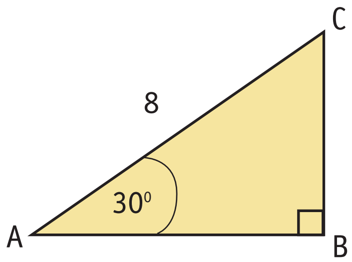
$$\text{Tg}\,A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} \qquad \text{Cotg}\,A = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8}$$

Contoh 6.7

Diketahui segitiga ABC siku-siku di B. Jika panjang AC adalah 8 cm dan $\angle A = 30^o$, hitunglah panjang AB dan BC.

Penyelesaian:

a) Sketlah bangun segitiga tersebut



b) Menghitung panjang AB dan BC

$\cos 30^o = \dfrac{AB}{AC}$

$AB = AC \cos 30^o$

$AB = 8 \cos 30^o$

$AB = 8 \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

$AB = 4\sqrt{3}$

$\sin 30^o = \dfrac{BC}{AC}$

$BC = AC \sin 30^o$

$BC = 8 \cdot \dfrac{1}{2}$

$BC = 5$

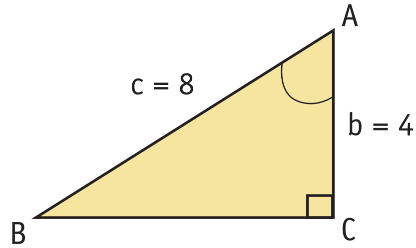
Jadi panjang sisi AB = $4\sqrt{3}$ cm dan BC = 5 cm.

Contoh 6.8

Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi b = 4 cm dan c = 8 cm.

Penyelesaian:

a) Sketlah bangun segitiga tersebut.



b) Menemukan relasi trigonometri antara ∠A, sisi b dan sisi c, yaitu:

$\text{Cos } \angle A = \frac{b}{c}$

$\text{Cos } \angle A = \frac{4}{8}$

$\text{Cos } \angle A = \frac{1}{2}$

$\angle A = 60^o$

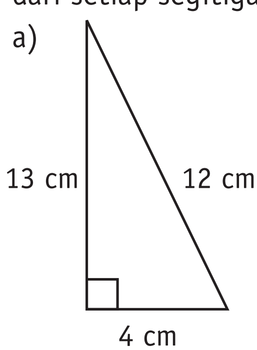
Jadi, besarnya ∠A adalah 60^o

Latihan 6.B

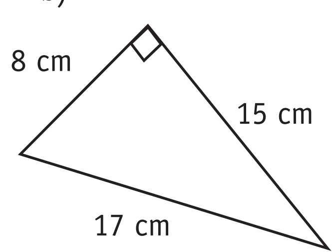
Perbandingan Trigonometri

1. Hitunglah nilai sin α, cos α, tg α, cosec α, secan α, dan cotg α dari setiap segitiga berikut.

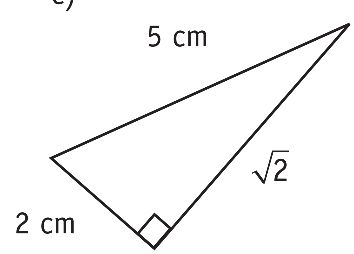
a)



b)



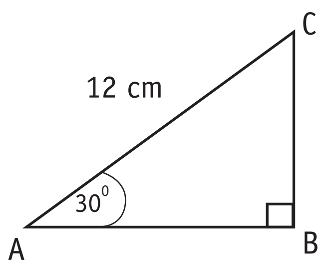
c)



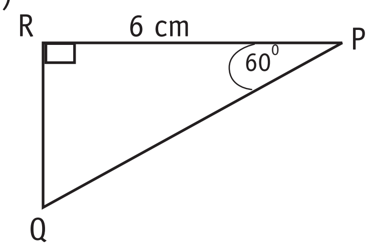
2. Hitunglah nilai sin A, cos A, dan tg A pada $\triangle ABC$ siku-siku di C, jika diketahui panjang sisi-sisi:
   a) $a = 8$ cm dan $b = 6$ cm
   b) $a = 5$ cm dan $b = 7$ cm

3. Jika β adalah sudut lancip dan $\sin \beta = \frac{2}{5}$, tentukan:
   a) $\cos \beta$
   b) $\text{tg } \beta$

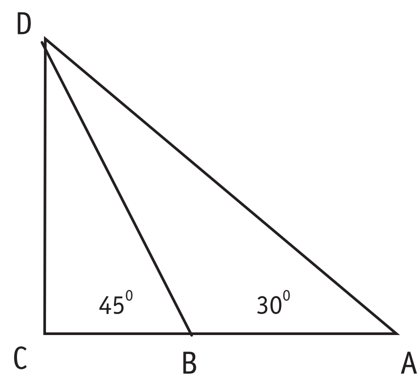
4. Hitunglah panjang sisi yang belum diketahui.
   a)



   b)



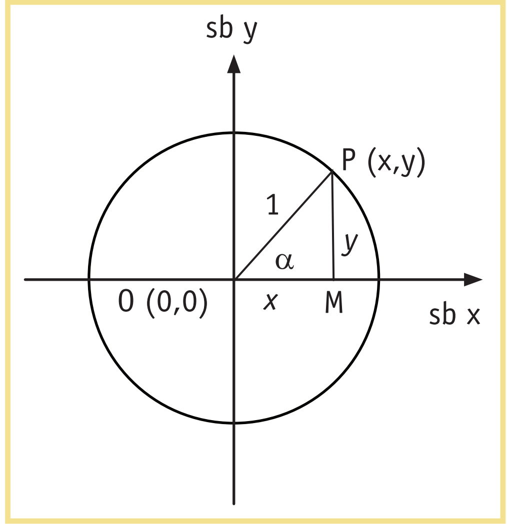
5. Pada gambar berikut ini, AB = 15 cm.
   Hitunglah panjang BC, CD, dan AD.



E. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut Istimewa

Nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk beberapa sudut istimewa dapat kita cari dengan menggunakan definisi perbandingan trigonometri pada lingkaran yang berjari-jari 1 atau $x^2 + y^2 = 1$.

Perhatikan suatu lingkaran yang memiliki jari-jari 1 satuan panjang dan bertitik pusat di titik O(0,0).



Misalkan P(x,y) adalah sembarang titik yang terletak pada lingkaran di kuadaran I. Oleh karena itu, sudut α yang terbentuk adalah sudut lancip. Dari titik P tariklah garis tegak lurus sumbu x dan memotong di M, maka jelas bahwa panjang garis OM = x dan panjang garis PM = y. OP adalah jari-jari lingkaran maka OP = 1

$$\text{Sin } \alpha = \frac{y}{1} = y$$

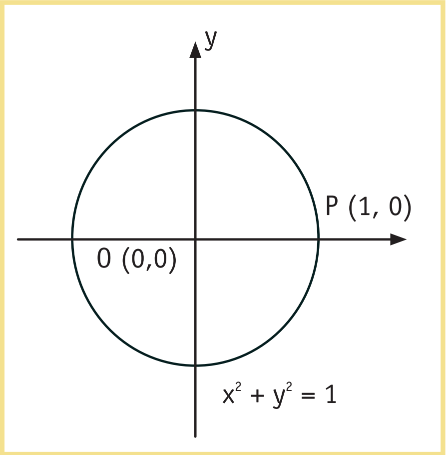
$$\text{Cos } \alpha = \frac{X}{1} = x$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{y}{x}, \ \text{ jika } x \neq 0$$

Jadi, koordinat P(x, y) pada lingkaran dengan jari-jari 1 dapat ditulis sebagai P (cos α, sin α)

1. Untuk $\alpha = 0^o$

Jika $\alpha = 0^o$, maka titik P terletak pada sumbu x. Oleh karena itu, koordinat P(1,0) dapat dituliskan sebagai P(cos 0^o, sin 0^o). Sehingga diperoleh



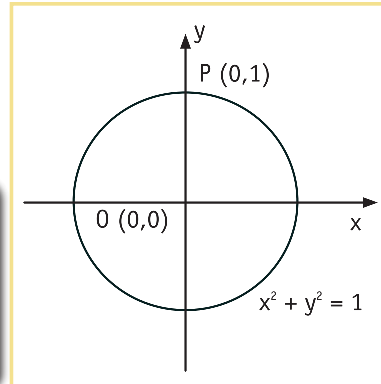
Cos 0^o = 1 dan

Sin 0^o = 0

$$\text{Tg } 0^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

2. Untuk $\alpha = 90^o$

Jika $\alpha = 90^o$, maka titik P terletak pada sumbu y. Oleh karena itu, koordinat P(0,1) dapat dituliskan sebagai P(cos 90^o, sin 90^o). Jadi,



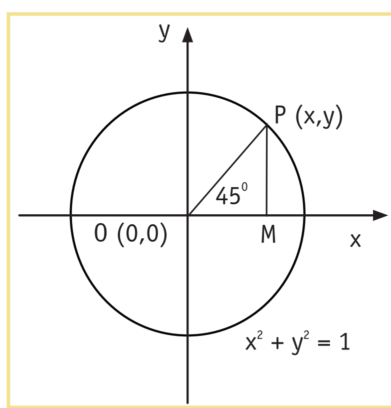
> Cos $90^o = 0$ dan
>
> Sin $90^o = 1$
>
> Tg $0^o = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (tidak terdefinisikan)

Investigasi

DALAM kelompok belajarmu, diskusikan bagaimana caranya menemukan nilai perbandingan trigonometri dari sudut istimewa 180^o, 270^o, dan 360^o. Presentasikan hasil kerjamu di depan teman sekelasmu.

3. Untuk $\alpha = 45^o$

Jika $\alpha = 45^o$ maka segitiga OPM adalah segitiga sama kaki dengan OM = PM sehingga x =v y. Substitusikan



$x = y \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$

$$y^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Oleh karena x = y maka nilai $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jadi pada sudut $\alpha = 45^o$ titik P adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Sementara itu, pada sudut $\alpha = 45^o$ dan jari-jari lingkaran 1 maka titik P dapat dinyatakan sebagai ($\cos 45^o$, $\sin 45^o$).
Dari hal ini dapat dipereoleh:

$\text{Cos } 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan

$\text{Sin } 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

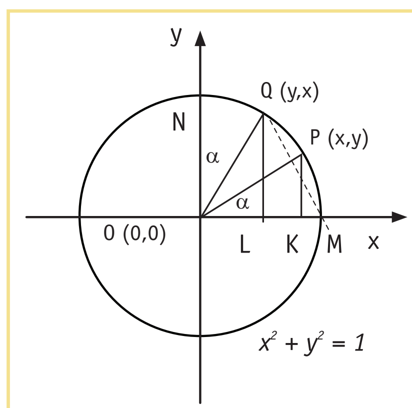
$$\text{Tg } 45^o = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$$

BERFIKIR KREATIF
Pada sudut 45° nilai cos dan sin-nya sama. Pada sudut berapa lagi cos dan sin memiliki nilai yang sama?

4. Untuk α = 30°

Jika $\alpha = 30^o$ maka sudut OPM = 60°. Q(y, x) adalah hasil pencerminan P(x, y) terhadap garis y = x.

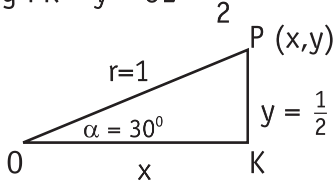
Sudut QOM = 60° (*bisakah kamu menjelaskan dari mana 60° didapat?*) karena segitiga OQM adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 satuan panjang.



QL adalah garis bagi pada segitiga sama sisi OQM maka panjang OL = $\frac{1}{2}$ OM = $\frac{1}{2}$ jari-jari lingkaran = $\frac{1}{2} \,.\, 1 = \frac{1}{2}$

Segitiga OPK sama dan sebangun dengan segitiga OQL

Panjang PK = y = OL = $\frac{1}{2}$



OP = 1 (jari-jari lingkaran)

Temukan nilai x denggan menggunakan teorema Pythagoras.

$OP^2 = OK^2 + PK^2$ $\quad x^2 = \frac{3}{4}$

$1^2 = x^2 + (\frac{1}{2})^2$ $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = 1 - \frac{1}{4}$ $\quad x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Titik P (x,y) = $P(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ dan titik P pun dapat dituliskan sebagai

P(cos 30°, sin 30°). Jadi,

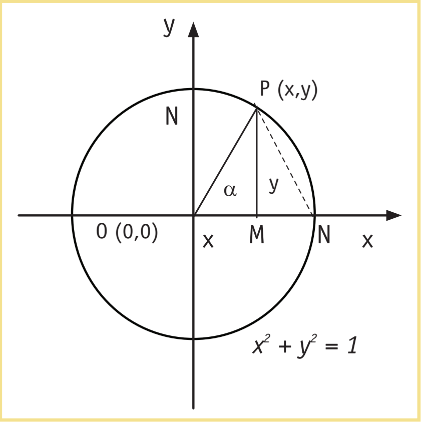
$\text{Cos } 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\text{Sin } 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{Tg } 30^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

5. Untuk α = 60°

Jika α = 60° maka segitiga OPN adalah segitiga sama sisi dan PN adalah garis bagi.



Panjang OM = x = $\frac{1}{2}$ = ON = $\frac{1}{2}$ jari-jari = $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Dengan menggunakan teorema Pythagoras temukan nilai y.

$PM^2 = OP^2 - OM^2$ $\quad y = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$y^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$ $\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$y^2 = \frac{3}{4}$

Jadi, titik P(x, y) dalam segitiga itu sama dengan P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Titik P pun dapat dituliskan sebagai P(cos 60°, sin 60°). Jadi,

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sin } 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Tg } 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Selanjutnya nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut istimewa dapat kita sajikan dalam tabel berikut ini.

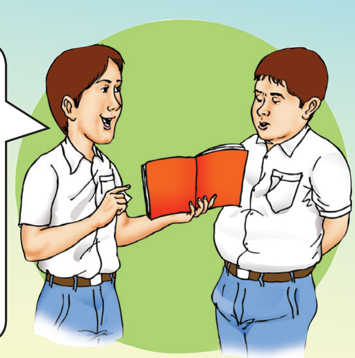
α	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Sudut Istimewa

Bagaimana menghafal nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut Istimewa?

Aku menghafalkanya dengan keteraturan nilai-nilai dalam tabel berikut ini

α	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
Cos α	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$



"Aku lihat banyak sekali orang yang membersihkan wajahnya dengan air wudlu, tapi sedikit sekali orang yang mau membersihkan hatinya" (*Anonim*)

Contoh 6.9

Hitunglah nilai dari:

a) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ$ b) $\text{Tg } \frac{1}{4}\pi - \cos \frac{1}{3}\pi$

Penyelesaian:

a) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$

b) $$\begin{aligned} \text{tg}\frac{1}{4}\pi - \cos\frac{1}{3}\pi &= \text{tg}\frac{1}{4}(180^\circ) - \cos\frac{1}{3}(180^\circ) \\ &= \text{tg } 45^\circ - \cos 60^\circ \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problem Solving

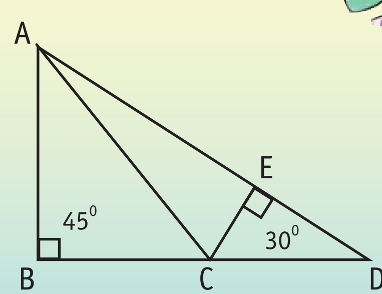
Perhatikan gambar berikut!

a) Carilah CD, CE, dan CAD

b) Setelah itu perlihatkanlah bahwa: $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

c) Kemudian perlihatkanlah pula bahwa $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

d) Hitunglah nilai tangen 15°



Latihan 6.C

Sudut-sudut Istimewa

1. Hitunglah nilai dari:
   a) $\sin 30^o + \cos 60^o + \text{tg } 45^o$
   b) $\sin 60^o + \cos 45^o + \text{tg } 60^o$
   c) $\cos 30^o + \cos 45^o + \cos 0^o$
   d) $\sin 90^o - \sin 45^o - \sin 30^o$
   e) $\sin 30^o \cos 45 + \sin 60^o$
   f) $\cos 30^o \text{ ctg } 30^o \text{ tg } 45^o$
   g) $2 \cos 45^o + \sec 45^o$
   h) $2 \cos 45^o + \sec 45^o$

2. Hitunglah nilai dari:
   a) $\sin \frac{1}{4}\pi \cos \frac{1}{6}\pi - \cos \frac{1}{4}\pi \sin \frac{1}{6}\pi$
   b) $\cos \frac{1}{3}\pi \cos \frac{1}{4}\pi - \sin \frac{1}{3}\pi \frac{1}{4}\pi$
   c) $2 \sin \frac{1}{3}\pi \sin \frac{1}{4}\pi$
   d) $\dfrac{\text{tg } \frac{1}{3}\pi + \text{tg } \frac{1}{4}\pi}{1 - \text{tg } \frac{1}{3}\pi \cdot \text{tg } \frac{1}{4}\pi}$

3. Perlihatkan bahwa:
   a) $\sin 30^o \cos 60^o + \sin 60^o \cos 30^o = \sin 90^o$
   b) $\dfrac{2 \text{ tg } 30^o}{1 - \text{tg}^2 30^o}$
   c) $2 \cos^2 30^o - 1 = 1 - 2 \sin^2 30^o = \cos 6^{0o}$
   d) $\dfrac{\sin 60^o}{1 + \cos 60^o} = \text{tg } 30^o$
   e) $\dfrac{1 - \cos 60^o}{\sin 60^o} = \text{tg } 30^o$

4. Tunjukkan bahwa:
   a) $\sin \frac{1}{6}\pi \cos \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{3}\pi$
   b) $1 - \cos \frac{1}{3}\pi = 2 \sin^2 \frac{1}{6}\pi$

5. Segitiga ABC siku-siku di A. Jika BC = 5 cm dan $\angle$ B = 60^o, hitunglah panjang AC dan BC.

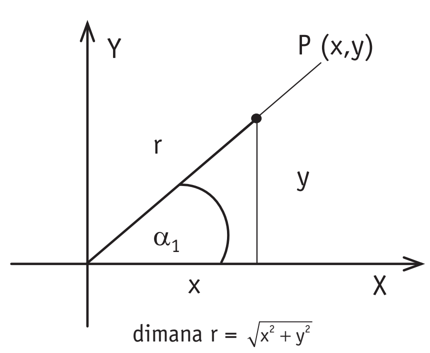
F. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut di Berbagai Kuadran

Mari kita lakukan penjelajahan berikut ini. Perhatikan bahwa garis OA adalah garis yang dapat berputar terhadap titik asal O dalam bidang kartesius. Akibatnya $\angle$ XOA dapat bernilai antara 0^o sampai 360^o. Misal $\angle XOA = \alpha$ maka besar sudut α ini diukur dari sumbu x_+. Sudut α bernilai *positif* jika arah putar garis OA *berlawanan arah jarum jam* (counter clockwise). Sudut α bernilai *negatif* jika arah putar garis OA *searah jarum jam*.

Sudut α dapat terletak pada kuadran I, kuadran II, kuadran III maupun kuadran IV.

1. α_1 di kuadran I

PADA kuadran I dibatasi oleh "*dinding-dinding*" sumbu x positif dan sumbu y *positif* juga sehingga titik yang ada di dalam kuadran ini secara umum dapat dituliskan sebagai P(+x, +y) atau P(x, y).



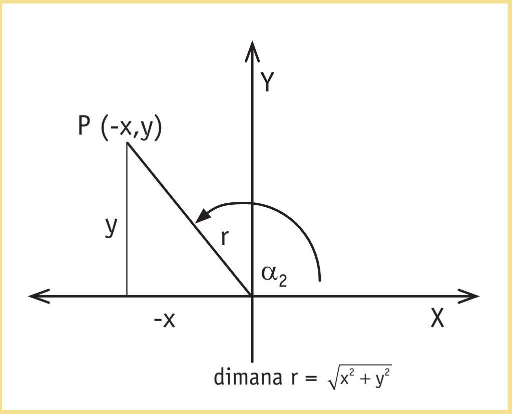
Nilai perbandingan trigonometri yang ada di kuadran I ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Sin } \alpha_1 = \frac{\text{depan}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \qquad \text{Cosec } \alpha_1 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{depan}} = \frac{r}{y}$$

$$\text{Cos } \alpha_1 = \frac{\text{samping}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \qquad \text{Sec } \alpha_1 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{samping}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{Tg } \alpha_1 = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{y}{x} \qquad \text{Cotg } \alpha_1 = \frac{\text{samping}}{\text{depan}} = \frac{x}{y}$$

2. α_2 di kuadran II



PADA kuadran II dibatasi oleh "*dinding-dinding*" sumbu x *negatif* dan sumbu y *positif* sehingga titik yang ada di dalam kuadran ini secara umum dapat dituliskan sebagai

P(–x, +y) atau P(–x, y) saja.

Nilai perbandingan trigonometri yang ada di kuadran II ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

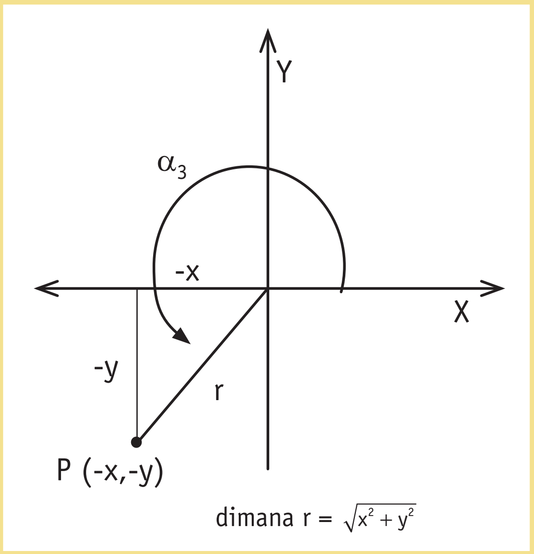
$$\text{Sin } \alpha_2 = \frac{\text{depan}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \qquad \text{Cosec } \alpha_2 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{depan}} = \frac{r}{y}$$

$$\text{Cos } \alpha_2 = \frac{\text{samping}}{\text{hipotenusa}} = \frac{-x}{r} \qquad \text{Sec } \alpha_2 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{samping}} = \frac{r}{-x}$$

$$\text{Tg } \alpha_2 = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{y}{-x} \qquad \text{Cotg } \alpha_2 = \frac{\text{samping}}{\text{depan}} = \frac{-x}{y}$$

3. α_3 di kuadran III

PADA kuadran III dibatasi oleh "*dinding-dinding*" sumbu x *negatif* dan sumbu y *negatif* juga, sehingga titik yang ada di dalam kuadran ini secara umum dapat dituliskan sebagai P(–x, –y) atau P(x, y) saja.



Nilai perbandingan trigonometri yang ada di kuadran III ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Sin } \alpha_3 = \frac{\text{depan}}{\text{hipotenusa}} = \frac{-y}{r}$$

$$\text{Cos } \alpha_3 = \frac{\text{samping}}{\text{hipotenusa}} = \frac{-x}{r}$$

$$\text{Tg } \alpha_3 = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{-x}$$

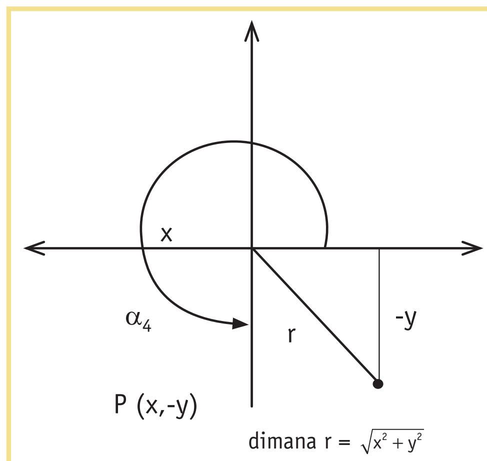
$$\text{Cosec } \alpha_3 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{depan}} = \frac{r}{-y}$$

$$\text{Sec } \alpha_3 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{samping}} = \frac{r}{-x}$$

$$\text{Cotg } \alpha_3 = \frac{\text{samping}}{\text{depan}} = \frac{-x}{-y} =$$

4. α_4 di kuadran IV

PADA kuadran IV dibatasi oleh "*dinding-dinding*" sumbu x *positif* dan sumbu y *negatif*, sehingga titik yang ada di dalam kuadran ini secara umum dapat dituliskan sebagai P(−x, −y) atau P(x, y) saja.



Nilai perbandingan trigonometri yang ada di kuadran IV ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Sin } \alpha_4 = \frac{\text{depan}}{\text{hipotenusa}} = \frac{-y}{r}$$

$$\text{Cos } \alpha_4 = \frac{\text{samping}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Tg } \alpha_4 = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{-y}{x}$$

$$\text{Cosec } \alpha_4 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{depan}} = \frac{r}{-y}$$

$$\text{Sec } \alpha_4 = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{samping}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{Cotg } \alpha_4 = \frac{\text{samping}}{\text{depan}} = \frac{x}{-y}$$

Pikiran Anda adalah "senjata ampuh" yang mampu mengubah masa depan Anda

(*Sugana*)

Contoh 6.10

Titik P mempunyai koordinat (3, 4). Hitunglah:

i) Hitunglah r atau OP

ii) Jika $\angle$ XOP = α, hitunglah sin α, cos α, dan tg α

Penyelesaian:

a) Menghitung r dengan rumus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

b) Menghitung sin α, cos α, dan tg α

$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$

Contoh 6.11

Titik P mempunyai koordinat (–6, 8). Hitunglah:

a) Hitunglah r atau OP

b) Jika $\angle$ XOP = β, hitunglah sin β, cos β, dan tg β

Penyelesaian:

a) Menghitung r dengan rumus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

b) Menghitung sin β, cos β, dan tg β

$\sin \beta = \frac{y}{r} = \frac{8}{10}$ $\quad$ $\cos \beta = \frac{x}{r} = -\frac{6}{10}$ $\quad$ $\text{tg } \beta = \frac{y}{x} = -\frac{8}{6}$

Investigasi

Bagaimana cara menentukan positif atau negatifnya nilai perbandingan trigonometri di kuadran 1, 2, 3 dan 4?

Latihan 6.D

Nilai Perbandingan Trigonometri pada Kuardan

1. Titik A(5, 12). Jika α adalah $\angle$ XOA
   i) Gambarlah letak titik A pada bidang koordinat kartesius
   ii) Hitunglah nilai sin α, cos α, dan tg α

2. Titik B(–8, –15). Jika β adalah $\angle$ XOB
   i) Gambarlah letak titik B pada bidang koordinat kartesius
   ii) Hitunglah nilai sin β, cos β, dan tg β

3. Titik C(12, –9). Jika θ adalah $\angle$ XOC
   i) Gambarlah letak titik C pada bidang koordinat kartesius
   ii) Hitunglah nilai sin θ, cos θ, dan tg θ

4. Di antara perbandingan trigonometri berikut mana yang bertanda positif dan mana yang bertanda negatif?
   a) sin 4° b) sin 312° c) cos 105°
   d) cos 305° e) tg 165° f) tg 215°
   g) sin 170° h) cos 340° i) tg 197°

5. Diketahui cos $\alpha = -\frac{4}{5}$ dan tg α positif. Tentukan:
   a) sin α b) tg α
   c) sec α d) cosec α
   e) cotg α

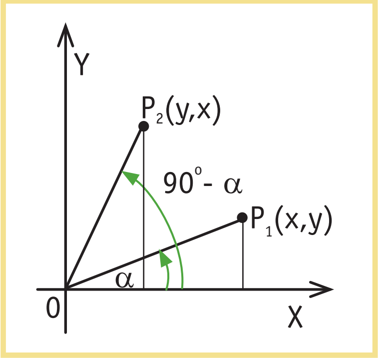
G. Rumus Perbandingan Sudut Berelasi

Setelah kita mengkaji nilai perbandingan trigonometri pada sudut lancip (kuadran I) dan sudut tumpul (kuadran II, III dan IV). Sekarang, kita akan menyatakan hubungan (*relasi*) nilai perbandingan trigonometri pada *komplemen sudut lancip* dan *sudut tumpul* ke dalam nilai perbandingan trigonometri *sudut tumpul*.

a. Hubungan perbandingan trigonometri untuk α dan $(90^\circ - \alpha)$

$OP_1 = OP_2 = r$ merupakan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$,
$\angle P_1 OX = \angle P_2 OY = \angle$ sehingga $\angle P_2 OX = (90^\circ - \alpha)$.
Perputaran seperti ini sama dengan pencerminan terhadap garis $y = x$.

Sehingga koordinat $P_2(y, x)$ merupakan kebalikan dari koordinat $P_1(x, y)$. Dengan memperhatikan koordinat $P_2(y, x)$ diperoleh:



$$\cos (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$
$$\sin (90^\circ - \alpha) = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$
$$\text{tg } (90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y} = \text{cotg } \alpha$$
$$\sec (90^\circ - \alpha) = \frac{r}{y} = \text{cosec } \alpha$$
$$\text{cosec } (90^\circ - \alpha) = \frac{r}{x} = \sec \alpha$$
$$\text{cotg } (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x} = \text{tg } \alpha$$

Dua buah sudut yang jumlahnya 90° disebut *komplementer*. Sudut α adalah komplemen sudut $(90^\circ - \alpha)$, demikian pula sebaliknya sudut $(90^\circ - \alpha)$ adalah komplemen dari sudut α. Cosinuse sebenarnya singkatan dari complement dan sinuse dalam bahasa Indonesia menjadi cosinus. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa:

Nilai perbandingan trigonometri suatu sudut sama dengan nilai perbandingan trigonometri *komplemennya*.

$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\qquad$ $\text{cosec } (90^\circ - \alpha) = \sec \alpha$

$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\qquad$ $\sec (90^\circ - \alpha) = \text{cosec } \alpha$

$\text{tg } (90^\circ - \alpha) = \text{cotg } \alpha$ $\qquad$ $\text{cotg } (90^\circ - \alpha) = \text{tg } \alpha$

Contoh 6.12

Carilah nilai yang setara dengan:

a) $\sin 60^\circ$ b) $\cos 35^\circ$ c) $\text{tg } 75^\circ$

Penyelesaian:

a) $\sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$

Jadi $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$

b) $\text{M}\cos 35^\circ = \sin (90^\circ - 35^\circ) = \sin 55^\circ$

Jadi $\cos 35^\circ = \sin 55^\circ$

c) $\text{tg } 75^\circ = \text{cotg } (90^\circ - 75^\circ) = \text{cotg } 15^\circ$

Jadi $\text{tg } 75^\circ = \text{cotg } 15^\circ$

Contoh 6.13

Carilah α jika $\sin 5\alpha = \cos \alpha$

Penyelesaian:

a) Mencari komplemen dari $\sin 5\alpha$

$\sin 5\alpha = \cos (90^\circ - 5\alpha)$

b) Dari bentuk $\sin 5\alpha = \cos \alpha$ dan $\sin 5\alpha = \cos (90^\circ - 5\alpha)$ diperoleh:

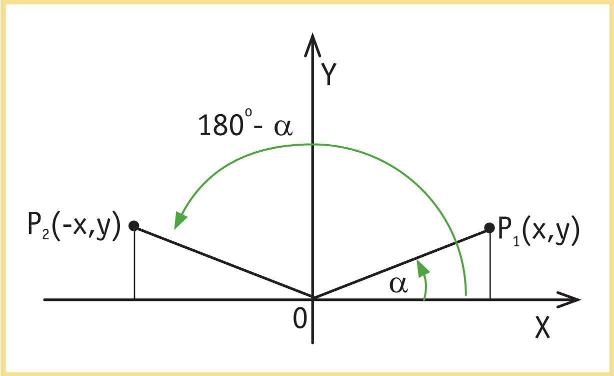
$\cos (90^\circ - 5\alpha) = \cos \alpha$

$90^\circ - 5\alpha = \alpha$

$6\alpha = 90^\circ$

$\angle = 15^\circ$

b. Hubungan perbandingan trigonometri untuk α dan $(180^\circ - \alpha)$



Perhatikan gambar di atas. Perputaran titik $P_1(x, y)$ yang bersudut sejauh $(180^\circ - \alpha)$ dapat dipahami sebagai titik $P_1(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu Y dan menghasilkan titik $P_2(-x, y)$. Panjang OP_1 dan OP_2 sama dengan r yang merupakan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Dengan memperhatikan koordinat $P_2(-x, y)$ diperoleh:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\text{tg}\,\alpha$$

$$\sec(180^\circ - \alpha) = \frac{r}{-x} = -\sec\alpha$$

$$\text{cosec}(180^\circ - \alpha) = \frac{r}{y} = \text{cosec}\,\alpha$$

$$\text{cotg}(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{y} = -\text{cotg}\,\alpha$$

Dapat disimpulkan:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\text{cosec}(180^\circ - \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$
$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$	$\text{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

Contoh 6.14

Tentukan nilai dari:

a) $\sin 135^\circ$ b) $\cos 120^\circ$ c) $\text{tg } 150^\circ$

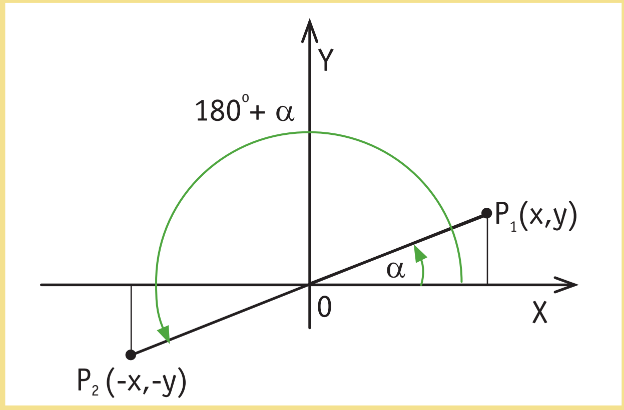
Penyelesaian:

a) $\sin 135^\circ = \sin (180 - 45)^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\cos 120^\circ = \cos (180 - 60)^\circ = -\cos\ 60^\circ = -\frac{1}{2}$

c) $\text{tg } 150^\circ = \text{tg } (180 - 30)^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

c. Hubungan perbandingan trigonometri untuk α dan (180o + α)



Perhatikan gambar di atas. Perputaran titik $P_1(x, y)$ yang bersudut α sejauh $(180^\circ + \alpha)$ dapat dipahami sebagai titik $P_1(x, y)$ dicerminkan terhadap titik O dan menghasilkan titik $P_2(-x, -y)$. Panjang OP_1 dan OP_2 sama dengan r yang merupakan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Dengan memperhatikan koordinat $P_2(-x, -y)$ diperoleh:

$$\sin (180^\circ + \alpha) = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ + \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$$

$$\text{tg } (180^\circ + \alpha) = \frac{-y}{-x} = \text{tg } \alpha$$

$$\sec (180^\circ + \alpha) = \frac{r}{-x} = -\sec \alpha$$

$$\text{cosec } (180^\circ + \alpha) = \frac{r}{-y} = -\text{cosec } \alpha$$

$$\text{cotg } (180^\circ + \alpha) = \frac{-x}{-y} = \text{cotg } \alpha$$

Dapat disimpulkan:

$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sec (180^\circ + \alpha) = -\sec \alpha$
$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\text{cosec } (180^\circ + \alpha) = -\text{cosec } \alpha$
$\text{tg } (180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$	$\text{cotg } (180^\circ + \alpha) = \text{cotg } \alpha$

Contoh 6.15

Tentukan nilai dari:

a) $\cos 225^\circ$ b) $\sin 240^\circ$ c) $\text{tg } 210^\circ$

d) $\sin (-120^\circ)$ e) $\text{tg } (-150^\circ)$

Penyelesaian:

a) $\cos 225^\circ = \cos (180 + 45)^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\sin 240^\circ = \sin (180 + 60)^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $\text{tg } 210^\circ = \text{tg } (180 + 30)^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

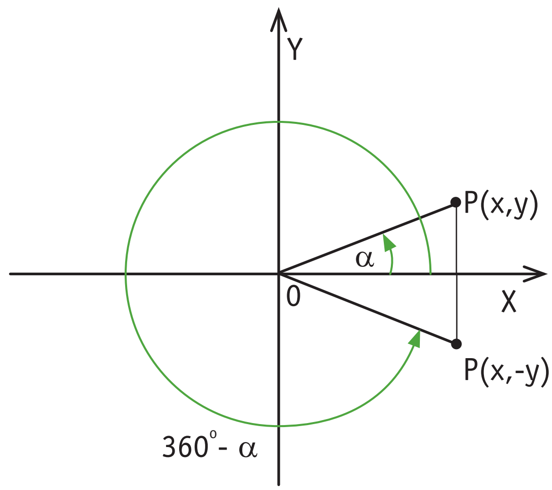
d) Sudut -120° artinya berputar sejauh 120° searah jarum jam. Berarti di kuadran III. Sinus di kuadran III bernilai negatif (Mengapa?).

Sin $(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin (180 - 60)^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e) Sudut -150° artinya berputar sejauh 150° searah jarum jam. Berarti di kuadran III. Tg di kuadran III bernilai negatif (Mengapa?)

Tg $(-150^\circ) = -\text{tg } 150^\circ = -\text{tg } (180 - 30)^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d. Hubungan perbandingan trigonometri untuk α dan $(360^o - \alpha)$



Perhatikan gambar di atas. Perputaran titik $P_1(x, y)$ yang bersudut α sejauh $(360^o - \alpha)$ dapat dipahami sebagai titik $P_1(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu X dan menghasilkan titik $P_2(x, -y)$. Panjang OP_1 dan OP_2 sama dengan r yang merupakan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Dengan memperhatikan koordinat $P_2(x, -y)$ diperoleh:

$$\sin (360^o - \alpha) = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos (360^o - \alpha) = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\text{tg } (360^o - \alpha) = \frac{-y}{x} = -\text{tg } \alpha$$

$$\sec (360^o - \alpha) = \frac{r}{x} = \sec \alpha$$

$$\text{cosec } (360^o - \alpha) = \frac{r}{y} = -\text{cosec } \alpha$$

$$\text{cotg } (360^o - \alpha) = \frac{x}{y} = -\text{cotg } \alpha$$

Dapat disimpulkan:

$\sin (360^o - \alpha) = -\sin \alpha$	$\sec (360^o - \alpha) = \sec \alpha$
$\cos (360^o - \alpha) = \cos \alpha$	$\text{cosec } (360^o - \alpha) = -\text{cosec } \alpha$
$\text{tg } (360^o - \alpha) = -\text{tg } \alpha$	$\text{cotg } (360^o - \alpha) = -\text{cotg } \alpha$

Contoh 6.16

Tentukan nilai dari:

a) $\cos 300^\circ$ b) $\sin 330^\circ$ c) $\text{tg } 315^\circ$

Penyelesaian:

a) $\cos 300^\circ = \cos (360 - 60)^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\sin 330^\circ = \sin (360 - 30)^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

c) $\text{tg } 315^\circ = \text{tg } (360 - 45)^\circ = -\text{tg } 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

e. Hubungan perbandingan trigonometri untuk suatu sudut

Jika k suatu bilangan bulat dan α sudut lancip maka titik Q pada lingkaran sehingga terbentuk $\angle$ QOX = k.360° + α akan berimpit dengan titik P yang membentuk $\angle$ POX = α. Oleh karena itu perbandingan trigonometri untuk sudut k.360° + α sama dengan perbandingan trigonometri untuk sudut α.

$$\begin{aligned}
\sin (k.360^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\
\cos (k.360^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\
\text{tg } (k.360^\circ + \alpha) &= \text{tg } \alpha \\
\sec (k.360^\circ + \alpha) &= \sec \alpha \\
\text{cosec } (k.360^\circ + \alpha) &= \text{cosec } \alpha \\
\text{cotg } (k.360^\circ + \alpha) &= \text{cotg } \alpha
\end{aligned}$$

Selanjutnya, jika k suatu bilangan bulat dan α sudut lancip maka titik Q pada lingkaran sehingga terbentuk $\angle$ QOX = k.360° – $\angle$ akan berimpit dengan titik P yang membentuk $\angle$ POX = –α. Oleh karena itu perbandingan trigonometri untuk sudut k.360° – $\angle$ sama dengan perbandingan trigonometri untuk sudut –α.

$$\begin{aligned}
\sin (k.360^\circ - \alpha) &= \sin (-\alpha) &&= -\sin \alpha \\
\cos (k.360^\circ + \alpha) &= \cos (-\alpha) &&= \cos \alpha \\
\text{tg } (k.360^\circ + \alpha) &= \text{tg } (-\alpha) &&= -\text{tg } \alpha \\
\sec (k.360^\circ + \alpha) &= \sec (-\alpha) &&= \sec \alpha \\
\text{cosec } (k.360^\circ + \alpha) &= \text{cosec } (-\alpha) &&= -\text{cosec } \alpha \\
\text{cotg } (k.360^\circ + \alpha) &= \text{cotg } (-\alpha) &&= -\text{ctg } \alpha
\end{aligned}$$

Contoh 6.17

Carilah nilai cos 855°

Penyelesaian:

a) Ubahlah sudut 855° ke dalam bentuk k.360° + α atau k.360° + α
855° = 2.360° + 135°

b) cos 855° = cos (2.360° + 135°)
= cos 135° ; sudut 135° di kuadran II
= cos (180 – 45)°
= –cos 45° ; nilai cos di kuadran II negatif
$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) Jadi cos 855° = $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Latihan 6.E

Sudut-sudut Istimewa

1. Nyatakan perbandingan trigonometri berikut dalam sudut lancip!
   a) sin 97°
   b) cos 101°
   c) tg 136°
   d) sin 130°
   e) cos 310°
   f) tg 325°
2. Tentukan nilai dari perbandingan trigonometri berikut!
   a) sin 120°
   b) sin 210°
   c) cos 240°
   d) cos 225°
   e) tg 240°
   f) tg 300°
   g) cos 315°
   h) sin 330°
   i) tg 660°
   j) cos 840°
   k) cos 930°
   l) tg 405°

TIPS

INI adalah “TIPS” untuk menemukan relasi nilai perbandingan trigonometri dengan cepat. Simaklah contoh-contoh ini, kamu akan menemukan “keteraturan” yang tersembunyi di dalamnya.

Contoh 1:

90° bukan kelipatan 180° oleh karenanya nisbah trigonometri berubah.

cos ⟶ sin

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

(90° + α) adalah di kuadran II. Cos di kuadran II bernilai negatif. Tandailah “–“

Contoh 2:

180° kelipatan 180° oleh karenanya nisbah trigonometri tetap.

sin ⟶ sin

$$\cos(180^\circ - \alpha) = +\sin\alpha$$

(180° – α) adalah di kuadran II. Sin di kuadran II bernilai positif. Tandailah “+“

Catatan:

a) 90°, 270° bukan kelipatan 180° sehingga nisbah trigonometri berubah

sin ⟶	cos	sec ⟶	cosec
cos ⟶	sin	cosec ⟶	sec
tg ⟶	cotg	cotg ⟶	tg

b) Untuk kelipatan 180° seperti 180°, 360°, 720°, ... nisbah trigonometri tidak mengalami perubahan

3. Tentukan nilai dari perbandingan trigonometri berikut:
   a) $\sin(-150^\circ)$
   b) $\cos(-120^\circ)$
   c) $\tan(-135^\circ)$
   d) $\sin(-120^\circ)$
   e) $\cos(-300^\circ)$
   f) $\text{tg}(-405^\circ)$
   g) $\sin(-930^\circ)$
   h) $\cos(-855^\circ)$

4. Tentukan nilai dari perbandingan trigonometri berikut:
   a) $\cos \frac{7}{4}\pi$
   b) $\text{tg}\ \frac{5}{3}\pi$
   c) $\sin \frac{5}{4}\pi$
   d) $\cos \frac{4}{3}\pi$
   e) $\sin(-\frac{1}{3}\pi)$
   f) $\cos(-\frac{5}{6}\pi)$

5. Buktikan bahwa:
   a) $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
   b) $\sin(90^\circ + \alpha) = +\cos\alpha$
   c) $\text{tg}(270^\circ - \alpha) = +\text{cotg}\ \alpha$
   d) $\sec(270^\circ + \alpha) = +\text{cosec}\ \alpha$
   e) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
   f) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
   g) $\sec(360^\circ - \alpha) = +\sec\alpha$
   h) $\text{cotg}(360^\circ - \alpha) = +\text{cotg}\ \alpha$

6. Sederhanakan bentuk berikut:
   a) $\cos(180 + \alpha)^\circ + \sin(270 - \alpha)^\circ + \sin(90 - \alpha)^\circ$
   b) $\sin 210^\circ + \cos 300^\circ + \text{tg}\ 315^\circ$
   c) $\sin 240^\circ \times \cos 330^\circ - \sin(-210^\circ)$
   d) $\dfrac{\cos(90 - \alpha)^\circ}{\cos(90 + \alpha)^\circ}$
   e) $\dfrac{\sin(180 - \alpha)^\circ}{\sin(180 + \alpha)^\circ}$
   f) $\dfrac{\text{tg}(180 - \alpha)^\circ}{\text{ctg}(90 - \alpha)^\circ}$

7. Perlihatkan:
   a) $\text{tg}\ \alpha + \text{ctg}(90^\circ + \alpha) + \text{tg}(180^\circ - \alpha) = \text{tg}(360^\circ - \alpha)$
   b) $\sin(180^\circ + \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) + \sin\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = 0$
   c) $\text{tg}(270^\circ + \alpha) - \sin(180^\circ + \alpha) + \sin(360^\circ - \alpha) = \text{tg}(90^\circ + \alpha)$
   d) $\sin 240o \cos 300o = \frac{1}{2} \sin 300^\circ$
   e) $\sin 120^\circ \cos 240^\circ - \sin 480^\circ \cos 120^\circ = 0$

8. Carilah α jika:
   a) $\sin \alpha = \cos 3\alpha$
   b) $\sin 4\alpha = \cos 3\alpha$
   c) $\text{ctg } \alpha = \text{tg } 2\alpha$
   d) $\sec \alpha = \text{cosec } 5\alpha$
9. Jika A, B, dan C adalah sudut-sudut dalam segitiga, tunjukkan bahwa:
   a) $\text{coa } (A + B) = -\cos C$
   b) $\cos \frac{1}{2}(B + C) = \sin \frac{1}{2} A$
10. Diketahui tg 25° = p, nyatakan perhitungan berikut dalam p
   a) $\dfrac{\text{tg } 155^\circ - \text{tg } 115^\circ}{1 + \text{tg } 155^\circ . \text{ tg } 115^\circ}$
   b) $\dfrac{\text{tg } 205^\circ - \text{tg } 115^\circ}{\text{tg } 205^\circ - \text{tg } 335^\circ}$

"Hal yang paling penting untuk mencapai kesuksesan adalah memulai pada saat itu, juga dimanapun kita berada
(***Pambayun Miji Lestari***)

H. Persamaan Trigonometri

Pda bagian ini mari kita mengkaji persamaan trigonometri. Bentuk seperti:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{tg } x = -1$$

Merupakan sejumlah contoh persamaan trigonometri. Seperti halnya dalam persamaan bentuk aljabar, penyelesaian persamaan trigonometri adalah menemukan nilai x sehingga jika nilai tersebut disubstitusikan menghasilkan pernyataan yang benar.

Untuk memahami cara menyelesaikan persamaan trigonometri, mari kita perhatikan sejumlah contoh berikut.

Contoh 6.18

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin x = \frac{1}{2}$ untuk $0^o \leq x \leq 360^o$

Penyelesaian:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ (sinus bernilai positif di kuadran I dan II)

b) Nyatakan dalam bentuk $\sin x = \sin \alpha$. Dengan α adalah sudut lancipnya.

$\sin x = \sin 30^o$

Jadi $x = 30^o$ (Misal $\alpha = 30^o$)

c) Untuk kuadran I ($x = \alpha$)

$x = 30^o$

d) Untuk kuadran II ($x = 180^o - \alpha$)

$x = 180^o - \alpha$

$x = 180^o - 30^o$

$x = 150^o$

e) Jadi, himpunan penyelesaian dari $\sin x = \frac{1}{2}$ adalah HP = $\{30^o, 150^o\}$

Contoh 6.19

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Penyelesaian:

a) $\cos 2x = \frac{1}{2}$ (cosinus bernilai *negatif* di kuadran II dan III)

b) Nyatakan dalam bentuk $\cos x = \cos \alpha$. Dimana α adalah sudut lancipnya.

$\cos 2x = \cos 60^o$

Jadi $x = 30^o$ (Misal $\alpha = 30^o$)

c) Untuk kuadran II ($x = 180^o - \alpha$)

$x = 180^o - 30^o$

$x = 150^o$

d) Untuk kuadran III ($x = 180^\circ + \alpha$)

$x = 180^\circ + \alpha$

$x = 180^\circ + 30^\circ$

$x_{III} = 210^\circ$

e) Jadi himpunan penyelesaian $\cos 2x = \frac{1}{2}$ adalah HP = $\{150^\circ, 210^\circ\}$

Latihan 6.F

Sudut-sudut Istimewa

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

   a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   b) $3 \tan x - \sqrt{3} = 0$
   c) $\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$
   d) $\cos 2x = \frac{1}{2}$
   e) $\tan 2x = \text{tg}\,(x - 30^\circ)$
   f) $\sin 2x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

   a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c) $\text{tg}\, x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
   b) $\sin 2x - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

Taukah Kamu...?

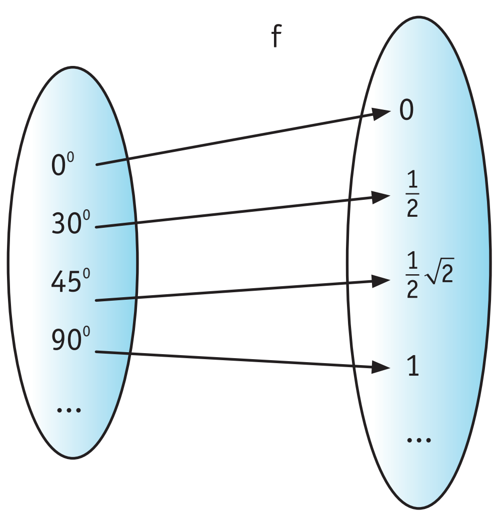
Orang-orang Eropa belajar di sekolah-sekolah dan universitas-universitas Arab dan mempelajari buku-buku Arab dari bahasa aslinya atau yang sudah diterjemahkan dalam bahasa Latin. Ketika bangsa-bangsa Eropa telah kuat mereka menyerang kerajaan-kerajaan Islam dengan kekuatan militer dan berhasil mencuri jutaan jilid buku, kemudian mereka merubah apa yang mereka dapatkan sebagai ilmu dan pemikiran mereka. Setelah itu, ketika bangsa Eropa sudah mencapai puncak kejayaannya dan menciptakan sesuatu yang baru dalam peradabannya. Mereka mengklaim bahwa bangsa Arab dan kaum Muslimin sekedar "tukang pos" yang mengantarkan karya peradabanYunani ke Eropa. (*Muhammad Gharib Jaudah*)

I. Fungsi Trigonometri dan Grafiknya

Fungsi Trigonometri

PERBANDINGAN trigonometri dari setiap sudut tertentu terdapat *tepat satu nilai* dari sinus, cosinus dan tangen dari sudut tersebut, sehingga perbandingan trigonometri merupakan suatu pemetaan atau fungsi.

Misalkan $f : x \rightarrow \sin x$ (dibaca: " f merelasikan x ke sin x) atau dapat ditulis $f(x) = \sin x$. Secara riil bentuk $f(x) = \sin x$ bisa kita artikan sebagai upaya merelasikan besar sudut tertentu ke dalam nilai perbandingan trigonometri sinusnya. Oleh karena setiap besaran sudut yang kita ambil ternyata hanya memiliki sebuah bayangan maka bentuk $f(x) = \sin x$ merupakan *pemetaan* atau *fungsi*. Perhatikan ilustrasi berikut.



Demikian $f : x \rightarrow \cos x$ (dibaca: " f merelasikan x ke cos x) atau dapat ditulis $f(x) = \cos x$ serta $f : x \rightarrow \operatorname{tg} x$ (dibaca: " f merelasikan x ke tg x) atau dapat ditulis $f(x) = \operatorname{tg} x$. Dapatkah kamu memberikan contoh bentuk relasi dari $f : x \rightarrow \cos x$ dan $f : x \rightarrow \operatorname{tg} x$?

Contoh 6.20

Tentukan nilai f(x) = cos x untuk nilai x sama dengan 30°, 120° dan 300°

Penyelesaian:

a) x = 30o maka f(x) = cos x

$$f(30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

b) x = 120° maka f(x) = cos x

$$f(120^\circ) = \cos 120^\circ$$

$$f(120^\circ) = \cos (180^\circ - 60^\circ)$$

$$f(120^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$f(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

c) x = 300° maka f(x) = cos x

$$f(300^\circ) = \cos 300^\circ$$

$$f(300^\circ) = \cos (360^\circ - 60^\circ)$$

$$f(300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

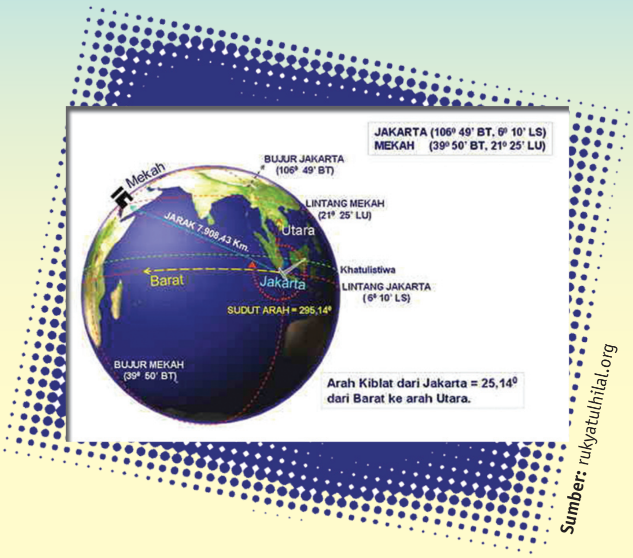
Taukah Kamu...?

Seorang sejarawan, George Sarton, yang dikutip dalam bukunya yang berjudul "Timur Tengah dalam Literatur Amerika" mengatakan bahwa kaum muslimin bisa kembali kepada kejayaan mereka di masa lalu dan memimpin dunia dalam bidang politik dan keilmuwan, sebagaimana yang mereka rasakan pada masa lalu, apabila mereka kembali kepada pemahaman hakekat kehidupan dalam Islam dan mempelajari dan mengembangkan ilmu-ilmu yang dianjurkan dalam Islam.

(*Muhammad Gharib Jaudah*)

Khazanah

Dapatkah kamu menentukan arah kiblat?



Sumber: rukyatulhilal.org

Dalam ajaran Islam, menghadap ke arah kiblat (Masjidil Haram/ Ka'bah) adalah suatu tuntunan syari'at di dalam melaksanakan ibadat tertentu, hal itu merupakan sesuatu yang wajib dilakukan ketika mengerjakan ibadah sholat dan mengebumikan jenazah orang Islam dan ia juga adalah suatu perkara yang sunat dilakukan ketika azan, berdo'a, berdzikir, membaca Al-Qur'an, menyembelih binatang dan sebagainya.

Tahukah kamu, apa GPS itu? GPS singkatan dari global positioning system, yaitu suatu sistem yang menginformasikan tentang data lintang dan bujur suatu tempat. Ka'bah berada pada 21° 25′ LU dan 39° 50′ BT. Bagaimana dengan tempat tinggalmu? Kamu bisa mencarinya di map encarta atau lihat peta daerahmu yang ada informasi tentang lintang dan bujur itu.

Jika diketahui bujur dan lintang suatu daerah, maka arah kiblat daerah itu dapat dicari dengan rumus trigonometri sebagai berikut:

$$\text{Cotan } B = \frac{\text{Cotan } b \sin a}{\text{Sin } C} - \text{Cos } a \text{ Cotan } C$$

dimana:

a = 90^o – f tp

b = 90^o – f mk

C = λ tp – λ mk

f tp = Data lintang tempat yang ingin dicari arah kiblatnya
(Jika lintangnya LS maka sudutnya jadikan bernilai negatif)

λ tp = Data bujur tempat yang ingin dicari arah kiblatnya
(Jika bujur bara BB maka sudutnya jadikan bernilai negatif)

f mk = Data lintang kota Mekah (= 21^o 25′ LU)

λ mk = Data bujur kota Mekah (= 39^o 50′ BT)

Nilai B^o yang kamu peroleh, dapat digunakan untuk menunjukkan arah kiblat yang dicari, yaitu sebesar: (i) B^o U – B (berlawanan arah jarum jam) atau (ii) (90^o – B^o) B - U atau (iii) Azimut kiblat {270^o + (90^o – B^o) B - U} UTSB. Gunakanlah alat kompas untuk menentukan arah utaranya. Dapatkah kamu menemukan arah kiblat untuk masjid atau mushola di wilayahmu? Silahkah mencobanya.

(*Sumber: Situs Sriyatin Shadiq Al Falaky*)

Orang-orang yang jenius seringkali tidak menarik hati dan kaku dalam pergaulan, seperti meteor yang bersinar-sinar kalu jatuh ke tanah pun tidak lebih dari batu

(*Longfellw*)

Grafik Fungsi Trigonometri

UNTUK menggambarkan grafik fungsi trigonometri kita dapat menggunakan tabel atau *scientific* calculator untuk menemukan nilai fungsi sudut-sudut tertentu. F(x) dalam koordinat kartesius diwakili y.

Tabel Sudut dan Nilai Fungsi Trigonometri

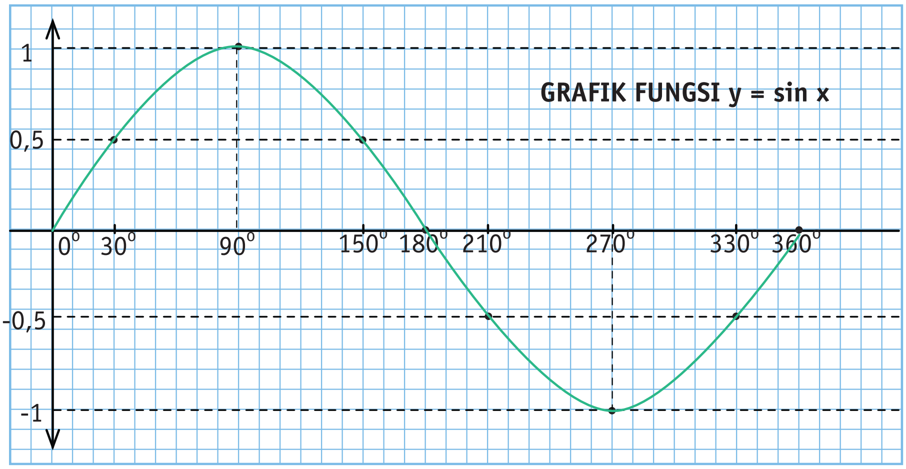
x	y = sin x	y = cos x	y = tg x	y = cotg x	y = sec x	y = cosec x
0°	0	1,00	0	$\pm\infty$	1,00	$\pm\infty$
30°	0,50	0,87	0,58	1,73	1,15	2,00
45°	0,71	0,71	1,00	1,00	1,41	1,41
60°	0,87	0,50	1,73	0,58	2,00	1,15
90°	1,00	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1,00
120°	0,87	- 0,50	- 1,73	- 0,58	- 2,00	1,15
135°	0,71	0,71	1,00	1,00	1,41	1,41
150°	0,50	- 0,87	- 0,58	- 1,73	- 1,15	2,00
180°	0	- 1,00	0	$\pm\infty$	- 1,00	$\pm\infty$
210°	- 0,50	- 0,87	0,58	1,73	-1,15	-2,00
225°	- 0,71	- 0,71	1,00	1,00	-1,41	-1,41
240°	- 0,87	- 0,50	1,73	0,58	- 2,00	- 1,15
270°	-1,00	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	-1,00
300°	- 0,87	0,50	-1,73	-0,58	2,00	- 1,15
315°	- 0,71	0,71	-1,00	-1,00	1,41	-1,41
330°	- 0,50	0,87	- 0,58	- 1,73	1,15	-2,00
360°	0	1,00	0	$\pm\infty$	1,00	$\pm\infty$

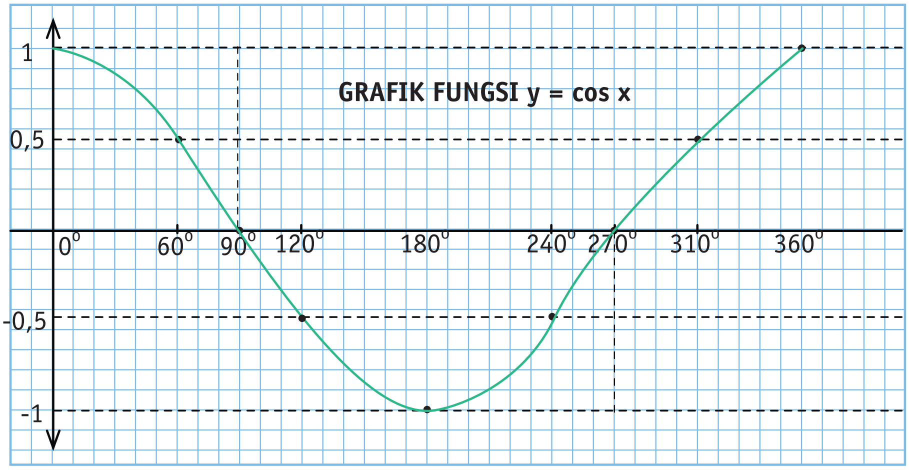
Melukis Grafik Fungsi y = sin x

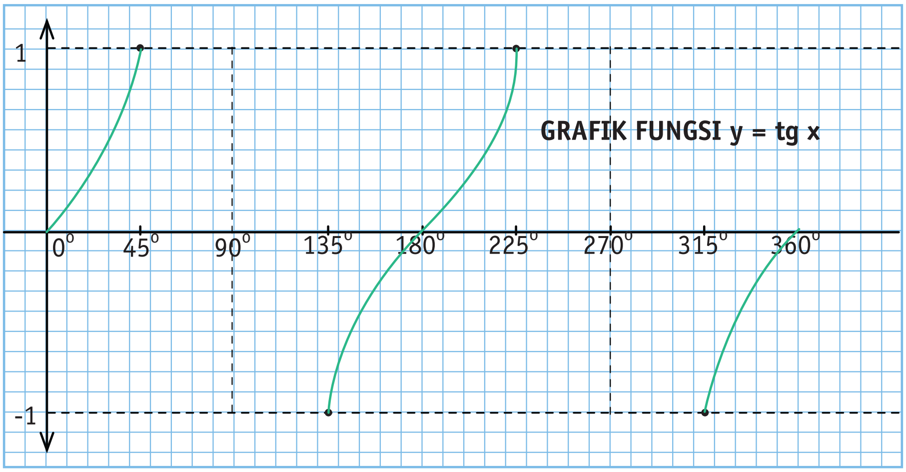
MISALNYA dari tabel di atas kita ambil kolom (x) dan kolom (y = sin x) untuk kita pasangakan. Dan terciptalah beberapa titik (x,y) sebagai pasangan terurut misalnya (0^o , 0), (30^o, 0,5) dan seterusnya. Gunakan kertas berpetak atau *millimeter block* untuk melukiskan titik-titik tersebut dalam sebuah sistem koordinat cartesius. Kemudian, hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva mulus, terciptalah grafik fungsi y = sin x.

Cara ini juga bisa digunakan untuk melukiskan grafik y = cos x, y = tg x, y = cotg x, y = sec x dan y = cosec x.

Berikut adalah tabel y = sin x, y = cos x dan y = tg x.







Latihan 6.G

Sudut-sudut Istimewa

1. Jika f : x $\rightarrow$ sin x, tentukan nilai fungsi f untuk
   a) x = 0°
   b) x = 45°
   c) x = 120°
   d) x = 150°
2. Jika f : x $\rightarrow$ cos x, tentukan nilai fungsi f untuk
   a) x = 0°
   b) x = 45°
   c) x = 150°
   d) x = 220°
   e) x = 120°
   f) x = –240°
3. Gambarlah grafik fungsi berikut jika $0° \leq x \leq 360°$
   a) f : x $\rightarrow$ cosec x
   b) f : x $\rightarrow$ cotg x
4. Gambarlah sketsa grafik fungsi y = sin x berikut jika $0° \leq x \leq 180°$
5. Gambarlah sketsa grafik fungsi y = cos x pada interval $0° \leq x \leq 360°$ kemudian tentukan:
   a) pada interval mana y = cos x bernilai positif
   b) pada interval mana y = cos x bernilai negatif
   c) nilai maksimum y = cos x
   d) nilai minimum y = cos x

J. Identitas Trigonometri

Apa sih perbedaan antara persamaan trigonometri dan identitas trigonometri?

Investigasi

Oke mari kita cek

$x = 90^o$ substitusikan ke (1):

$\sin^2 90^o + \cos^2 90^o = 1$
Ruas kiri= $\sin^2 90^o + \cos^2 90^o$
Ruas kiri= $(1)^2 + 0$

Ruas kiri = 1
Ruas kiri = ruas kanan (benar)

Sekarang lakukan terhadap $\sin x = \frac{1}{2}$
$x = 90^o$ substitusikan ke (2):

Ruas kiri = sin x
Ruas kiri = $\sin 90^o$
Ruas kiri = 1
Ruas kiri $\neq$ ruas kanan

Jadi sin x = bukanlah identitas trigonometri sebab tidak berlaku untuk sembarang sudut. Adapun, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ berlaku untuk sembarang nilai x maka persamaan itu juga *identitas trigonometri*.

Terkadang kita tidak menyadari mana yang merupakan persamaan trigonometri dan mana yang identitas trigonometri? Sebab sepintas lalu memang terlihat antara identitas trigonometri dan persamaan trigonometri mempunyai bentuk yang sama, karena keduanya mengandung tanda "=". Sebenarnya ada perbedaan yang sangat mendasar antara identitas trigonometri dengan persamaan trigonometri itu.

Dalam persamaan trigonometri, hanya *berlaku untuk satu* atau *beberapa sudut* bagi x yang belum diketahui. Misalnya $\sin x = \frac{1}{2}$ adalah sebuah persamaan trigonometri, karena:

untuk $x = 30^o$, $\sin 30^o = \frac{1}{2}$ dan
untuk $x = 150^o$, $\sin 150^o = \frac{1}{2}$

Adapun, untuk sudut-sudut lainnya t*idak akan memenuh*i persamaan trigonometri sin x = $\frac{1}{2}$, misalnya:

untuk x = 40^o, sin $40^o \neq \frac{1}{2}$

untuk x = 50^o, sin $50^o \neq \frac{1}{2}$

untuk x = 60^o, sin $60^o \neq \frac{1}{2}$

Sudut 30^o dan 150^o disebut penyelesaian persamaan trigonometri tersebut.

Jadi dalam persamaan trigonometri, persoalan yang dihadapi biasanya adalah mencari penyelesaian persamaan trigonometri itu.

Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri tidak lain adalah persamaan trigonometri yang berlaku untuk "semua sudut" bagi sudut x yang tidak diketahui. Misalnya:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

adalah sebuah identitas trigonometri, karena x dapat diganti dengan sembarang sudut, misalnyanya saja:

untuk x = 10^o, maka $\sin^2 10^o + \cos^2 10^o = 1$

untuk x = 17^o, maka $\sin^2 17^o + \cos^2 17^o = 1$

untuk x = 31^o, maka $\sin^2 31^o + \cos^2 31^o = 1$

untuk x = 59^o, maka $\sin^2 59^o + \cos^2 59^o = 1$

Jadi dalam identitas trigonometri, persoalan yang kita hadapi biasanya adalah *membuktikan kebenaran identitas itu sendiri*. Umumnya dalam identitas trigonometri tidak digunakan sudut x, melainkan sudut θ, A, B dan sebagainya. Jadi tidak lazim kita

tuliskan identitas trigonometri $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
melainkan $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ atau $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

> Jadi dalam identitas trigonometri, persoalan yang dihadapi biasanya adalah *membuktikan kebenaran identitas itu* sendiri secara aljabar

Relasi Antara Fungsi-fungsi Trigonometri

Dalam bagian terdahulu sudah dijelaskan bahwa ada enam macam nilai perbandingan trigonometri sudut θ, yaitu $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\text{tg } \theta$, $\text{ctg } \theta$, $\sec \theta$ dan $\csc \theta$. Di antara mereka dapat dibagi menjadi tiga relasi, yaitu:

1) relasi kebalikan (reciprocal relation)
2) relasi pembagian (quotient relation),
3) Relasi kuadrat (quadratic relation).

1. Relasi Kebalikan (Reciprocal Relation)

Contoh 6.21

Buktikan: $\sec \theta = \dfrac{1}{\cos \theta}$

Penyelesaian:

a) Menurut definisi $\cos \theta = \dfrac{x}{r}$ dan $\sec \theta = \dfrac{r}{x}$

b) $\sec \theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}}$ (pembilang dan penyebut dibagi r)

$\sec \theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\frac{x}{r}} = \dfrac{1}{\cos \theta}$ (terbukti)

Contoh 6.22

Buktikan: $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

Penyelesaian:

a) Menurut definisi $\sin\theta = \frac{y}{r}$ dan $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$

b) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}}$ (pembilang dan penyebut dibagi r)

$\sec\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\sin\theta}$ (**terbukti**)

Contoh 6.23

Buktikan: $\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$

Penyelesaian:

a) Menurut definisi $\operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$ dan $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$

b) $\operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}$ (pembilang dan penyebut dibagi x)

$\operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}}$ (**terbukti**)

Kesuksesan dimulai dari keberanian untuk bermimpi - *be brave to dream*
(*Tung Desem Waringin*)

2. Relasi Pembagian (*quotient relation*)

Contoh 6.24

Buktikan: $tg\ \theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Penyelesaian:

a) Menurut definisi $tg\ \theta = \dfrac{y}{x}, \sin\theta = \dfrac{y}{r}$ dan $\cos\ \theta = \dfrac{x}{r}$

b) $tg\ \theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$ (pembilang dan penyebut dibagi r)

$\sec\ \theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{\sin}{\cos}$ (**terbukti**)

Contoh 6.25

Buktikan: $cotg\ \theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Penyelesaian:

a) Menurut definisi $cotg\ \theta = \dfrac{x}{y}, \sin\theta = \dfrac{y}{r}$ dan $\cos\ \theta = \dfrac{x}{r}$

b) $cotg\ \theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}$ (pembilang dan penyebut dibagi r)

$cotg\ \theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{\cos}{\sin}$ (**terbukti**)

Contoh 6.26

Buktikan: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Penyelesaian:

a) Segitiga OPQ adalah segitiga siku-siku di Q, sehingga berlaku:

$OQ^2 + PQ^2 + OP^2$

$x^2 + y^2 = r^2$

b) Bagilah $x^2 + y^2 = r^2$ dengan r^2 diperoleh:

$$\frac{x^2}{r^2} \quad \frac{y^2}{r^2} \quad \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 \quad \left(\frac{y}{r}\right)^2 \quad 1 \quad ;\text{dimana } \sin\theta = \frac{y}{r} \ \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

Contoh 6.27

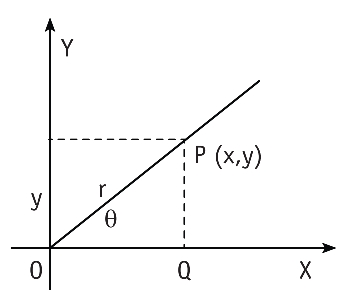
Buktikan: $1 + \mathrm{tg}^2\,\theta = \sec^2\theta$

Penyelesaian:

a) Segitiga OPQ adalah segitiga siku-siku di Q sehingga berlaku

$OQ^2 + PQ^2 + OP^2$

$x^2 + y^2 = r^2$



b) Bagilah $x^2 + y^2 = r^2$ dengan x^2 diperoleh:

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{x}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \quad ;\text{dimana } \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \text{ dan } \sec\theta = \frac{r}{x}$$

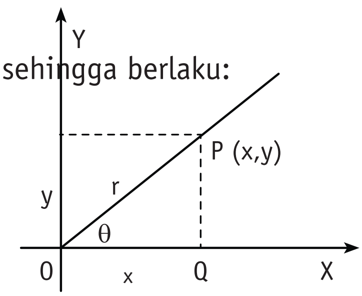
$1 + (\mathrm{tg}\,\theta)^2 = (\sec\theta)^2$

$1 + \mathrm{tg}^2\,\theta = \sec^2\theta$ (**terbukti**)

Contoh 6.28

Buktikan: $1 + \text{cotg}^2\ \theta = \text{cosec}^2\ \theta$

Penyelesaian:



a) Segitiga OPQ adalah segitiga siku-siku di Q sehingga berlaku:

$OQ^2 + PQ^2 + OP^2$

$x^2 + y^2 = r^2$

b) Bagilah $x^2 + y^2 = r^2$ dengan y^2 diperoleh:

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{x}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \quad ;\text{dimana } \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \text{ dan } \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$\text{cotg}^2\ \theta + 1 = \text{cosec}^2\ \theta$ atau $1 + \text{cotg}^2\ \theta = \text{cosec}^2\ \theta$ (**terbukti**)

Untuk diingat

BEBERAPA RELASI POKOK IDENTITAS TRIGONOMETRI

1) $\sec\ \theta = \dfrac{1}{\cos}$

2) $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{1}{\sin}$

3) $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{1}{\text{tg}}$

4) $\text{tg}\ \theta = \dfrac{\sin}{\cos}$

5) $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{\cos}{\sin}$

6) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

7) $1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2\theta$

8) $1 + \text{cotg}^2\ \theta = \text{cosec}^2\ \theta$

Contoh 6.29

Buktikan: cos A + sin A . tg A = sec A

Penyelesaian:

Ambil ruas kiri dan buktikan sama dengan ruas kanan

Ruas kiri cos A + sin A . tg A

$$= \cos A + \sin A . \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \cos A + \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A}$$

$$= \sec A$$

$$= \text{ruas kanan}$$

Contoh 6.30

Sederhanakan: sec θ - sec θ $\sin^2 \theta$

Penyelesaian:

$$\sec \theta - \sec \theta \sin^2 \theta = \sec \theta\ (1 - \sin^2 \theta)$$

$$= \sec \theta \cos^2 \theta$$

$$= \frac{1}{\cos} . \cos^2$$

$$= \cos \theta$$

Latihan 6.H

Identitas Geometri

Buktikanlah identitas berikut ini:

1. $(\sec A - \cos A)^2 = tg^2 A\,(1 - \cos^2 A)$
2. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$
3. $\sin^2 B + \sin^2 B.\, ctg^2 B = 1$
4. $(\cos\beta + \sin\beta)(\cos\beta - \sin\beta) + 2\sin^2\beta = 1$
5. $\sin A\,.\,cotg\, A + \cos A\,.\,tg\, A = \cos A + \sin A$
6. $2\,\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$
7. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\theta}$
8. $tg\,\alpha - cotg\,\alpha = \dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin\alpha.\cos\alpha}$
9. $1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \sin\alpha$
10. $\dfrac{1}{1-\sin\alpha} + \dfrac{1}{1+\sin\alpha} = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$

Kalau seseorang menyalahkan orang-orang lain ketika ia mengalami kegagalan, sebaiknya ia juga mengatakan bahwa orang lainlah yang berjasa kalau ia sukses

(***Howard W. Newton***)

K. Rumus Sinus dan Cosinus dalam Suatu Segitiga

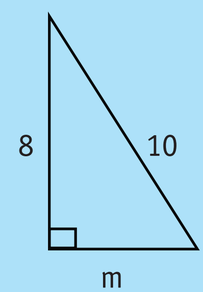
Kehadiran dua aturan yaitu "aturan sinus" dan "aturan cosinus" sungguh luar biasa karena mampu mengatasi ketidakberdayaan "aturan Pythagoras". Mengapa? Karena teorema Pythagoras hanya bisa bekerja pada segitiga siku-siku, sedangkan aturan sinus dan cosinus bisa bekerja baik pada segitiga siku-siku maupun non siku-siku dalam menemukan besar sudut maupun panjang sisinya. Perhatikan ilustrasi berikut.

Perkara 1:

Berapakah panjang sisi m?

Dalam perkara ini teorema Pythogaras

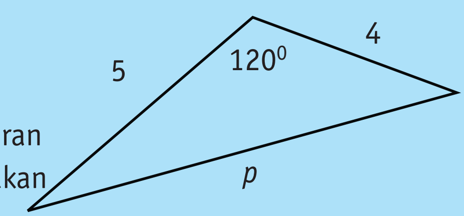
bisa bekerja menemukan jawabannya



Perkara 2:

Berapakah panjang sisi p?

Segitiga ini tidak siku-siku sehingga aturan Pythagoras "*tak berdaya*" untuk menemukan berapa panjang p. Oleh karena itu perlu diciptakan aturan baru.



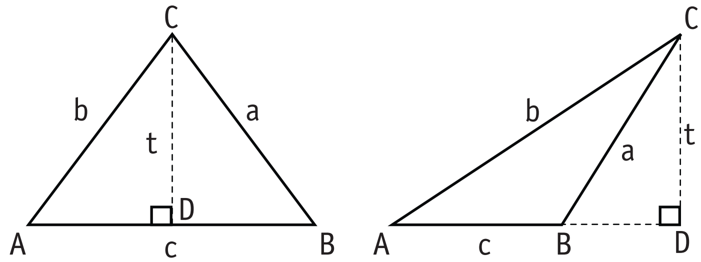
Permasalahan yang terdapat dalam segitiga yang tidak siku-siku akan bisa terselesaikan jika pada segitiga itu diketahui tiga buah unsurnya *yang tidak bergantungan,* maksudnya *tidak ketiga-tiganya sudut*. Ada beberapa aturan tertentu yang menghubungkan unsur-unsur yang tidak bergantungan dalam sebuah segitiga, yaitu *aturan sinus* dan *aturan cosinus*. Jika suatu segitiga telah diketahui tiga buah unsurnya yang tidak bergantungan maka ketiga unsur lainnya dapat dihitung.

Aturan Sinus

Dalam segitiga ABC, sisi-sisinya sebanding dengan sinus sudut seberangnya.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bukti:



Gambar (a) Gambar (b)

Dari titik C ditarik garis tinggi t.

Perhatikan segitiga siku-siku CAD Gambar (a) diperoleh relasi

$$\sin A = \frac{t}{b} \text{ atau } t = b \sin A \quad \text{.......................... i)}$$

Perhatikan segitiga siku-siku CBD diperoleh relasi

$$\sin B = \frac{t}{a} \text{ atau } t = a \sin B \quad \text{......................... ii)}$$

Substitusikan (i) ke (ii) diperoleh:

$$a \sin B = b \sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Dengan jalan yang sama dapat dibuktikan:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Jadi $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Dari aturan sinus itu dapat pula diturunkan relasi-relasi:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \text{ dan } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

Contoh 6.31

Pada ΔABC, panjang sisi b = 4,2 cm, besar $\angle A = 62^\circ$ dan $\angle B = 46^\circ$. Hitunglah panjang sisi a.

Penyelesaian:

(a) Ada *panjang sisi* dan *sudut* yang saling berhadapan diketahui,

yaitu sisi b dan $\angle B$. Gunakan rumus aturan sinus.

b) Menghitung panjang a.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$a = b.\frac{\sin A}{\sin B}$$

$$a = 4{,}2 \ . \ \frac{\sin 62^\circ}{\sin 46^\circ}$$

$$a = 4{,}2 \ . \ \frac{0{,}88}{0{,}72}$$

$$a = 5{,}13$$

c) Jadi panjang sisi a adalah 5,13 cm

Contoh 6.32

Pada ΔPQR, panjang sisi p = 5,8 cm, sisi q = 6,7 cm dan $\angle Q = 48^\circ$.
Hitunglah besar sudut P.

Penyelesaian:

a) Ada *panjang sisi* dan *sudut* yang saling berhadapan diketahui datanya, yaitu sisi q dan $\angle Q$. Gunakan rumus aturan sinus.

b) Menghitung besar $\angle P$.

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin P}{\sin Q}$$

$$\sin P = \frac{p}{q} . \text{Sin } Q$$

$$\sin P = \frac{5{,}8}{6{,}7} . \text{Sin } 48^\circ$$

$$\sin P = \frac{5{,}8}{6{,}7} . 0{,}74$$

$$\sin P = 0{,}64$$

$$\angle P = 39{,}8^\circ$$

c) Jadi besar $\angle P = 39{,}8^\circ$

Kesederhanaan adalah dasar segala moral dan kebajikan utama manusia. Tanpa kesederhanaan, manusia tidak ada bedanya dengan binatang

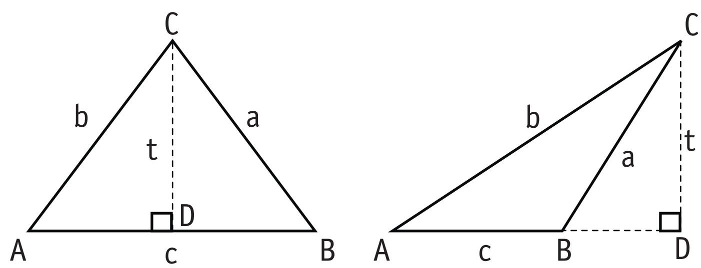
(***Napolen B***)

Aturan Cosinus

Dalam segitiga ABC, kuadrat salah satu sisi sama dengan jumlah kuadrat dua sisi lainnya dikurangi dua kali perkalian dua sisi itu dengan cosinus sudut apitnya.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Bukti:



Kita tarik garis tinggi CD. Misal panjang CD = t

Perhatikan segitiga siku-siku BCD diperoleh

$t = a \sin B$ .... i)
$DB = a \cos B$ .... ii)

Di sisi lain

$AD = AB - DB$
$AD = c - DB$ .... iii)

Substitusikan (ii) ke (iii) diperoleh:

$AD = c - a \cos B$ .... iv)

Perhatikan segitiga siku-siku ACD diperoleh

$b^2 = t^2 + AD^2$ .... v)

Substitusikan (i) dan (iv) ke (v) diperoleh:

$b^2 = t^2 + AD^2$

$b^2 = (a \sin B)^2 + (c - a \cos B)^2$

$b^2 = a^2 \sin^2 B + c^2 - 2ac \cos B + a^2 \cos^2 B$

$b^2 = a^2 \sin^2 + a^2 \cos^2 B + c^2 - 2ac \cos B$

$b^2 = a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ac \cos B$

;dimana $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

Petunjuk Pembuktian Aturan Cosinus pada Segitiga Sebelah Kanan:

Dalam segitiga siku-siku BCD pada gambar di sebelah kanan didapat

$t = a \sin \angle CBD = a \sin (180^o - B) = a \sin B$

$BD = a \cos \angle CBD = a \cos (180^o - B) = - a\cos B$

$AD = AB - BD = c - a\cos B$

Perhitungan selanjutnya sama dengan di atas

Dengan jalan yang sama dapat dibuktikan bahwa:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, dan
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Dari aturan cosinus tersebut dapat dikembangkan rumus-rumus seperti:

$$\text{Cos}\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{Cos}\, B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{Cos}\, C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Contoh 6.33

Pada ΔABC, panjang sisi a = 5 cm, b = 8 cm dan $\angle C = 60^\circ$. Hitunglah:

i) panjang sisi c ii) besar $\angle B$ iii) Besar $\angle A$

Penyelesaian:

a) Tidak diketahui ada *panjang sisi* dan *sudut* yang saling berhadapan. Gunakan rumus aturan cosinus.

b) Menghitung panjang c.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8. \cos 60$
$c^2 = 25 + 64 - 80.\ 0,5$
$c^2 = 49$

$c = 7$

c) Menghitung besar $\angle B$ (syarat ketiga sisi *harus* sudah diketahui)

$$\text{Cos B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{Cos B} = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2.5.7}$$

$$\text{Cos B} = \frac{25 + 49 - 64}{70}$$

$$\text{Cos B} = \frac{25 + 49 - 64}{70}$$

$$\text{Cos B} = \frac{1}{7}$$

$\angle B = 81,8^\circ$

d) Menghitung besar $\angle A$. Gunakan sifat jumlah sudut dalam segitiga.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
$\angle A + 81,8^\circ + 60^\circ = 180^\circ$
$\angle A + 141,8^\circ = 180^\circ$

$\angle A = 180^\circ - 141,8^\circ$

$\angle A = 38,2^\circ$

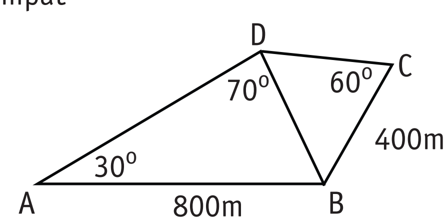
Latihan 6.1

Aturan Sinus dan Cosinus

1. Dalam tiap Δ ABC berikut diketahui tiga buah unsur. Hitung sisi yang diminta:
   a) $\angle A = 30^o$, $\angle B = 45^o$ dan panjang sisi b = 10 cm. Hitunglah sisi a.
   b) $\angle A = 45^o$, $\angle B = 120^o$ dan panjang sisi a = 8 cm. Hitunglah sisi c.
   c) $\angle B = 30^o$, $\angle C = 120^o$ dan panjang sisi c = 6 cm. Hitunglah sisi a dan b.
   d) $\angle B = 70^o$, $\angle C = 67^o$ dan panjang sisi b = 12 cm. Hitunglah sisi a dan c.

2. Dalam tiap Δ ABC berikut diketahui tiga buah unsur. Hitung sisi yang diminta:
   a) a = 10, b = 15 dan $\angle B = 62^o$. Hitung $\angle A$
   b) a = 20, b = 10 dan $\angle A = 50^o$. Hitung $\angle C$
   c) b = 10, c = 12 dan $\angle C = 141^o$. Hitung $\angle A$ dan $\angle B$
   d) b = 10, c = 4 dan $\angle B = 64^o$. Hitung $\angle A$ dan $\angle C$

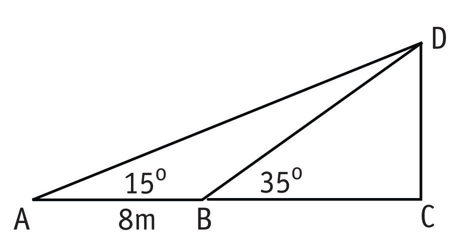
3. Sebidang tanah berbentuk segiempat seperti gambar di samping ini.
   Hitunglah:
   a) panjang AD
   b) panjang BD
   c) panjang CD



4. Perhatikan gambar di samping ini!

   Titik D merupakan titik puncak suatu menara. Dari titik A puncak D mempunyai sudut elevasi 15^o dan dari titk B puncak D mempunyai sudut elevasi 35^o. Jarak AB = 8 m.

   Carilah panjang AD dan BD, kemudian hitung tinggi menara.



5. Dalam tiap segitiga ABC berikut, hitunglah panjang sisi yang diminta jika diketahui:
   a) panjang a = 8 cm, b = 9 cm dan $\angle C = 60^\circ$. Hitunglah panjang sisi c
   b) panjang b = 5 cm, c = 10 cm dan $\angle A = 120^\circ$. Hitunglah panjang sisi a
   c) panjang a = 6 cm, b = 9 cm dan $\angle B = 30^\circ$. Hitunglah panjang sisi b

6. Pada setiap Δ ABC berikut, diketahui panjang ketiga sisinya. Hitung besar sudut yang diminta.
   a) a = 10 cm, b = 16 cm dan c = 14 cm. Hitung $\angle C$
   b) a = 14 cm, b = 10 cm dan c = 6 cm. Hitung $\angle A$

Proyek matematika

Sumber: Dok. Penerbit

Buatlah klinometer sendiri (lihat foto di samping). Dengan alat itu dan aturan perbandingan sudut dalam trigonometri, lakukan ekplorasi untuk menghitung berapa tinggi tiang bendera yang ada di halaman madrasahmu?

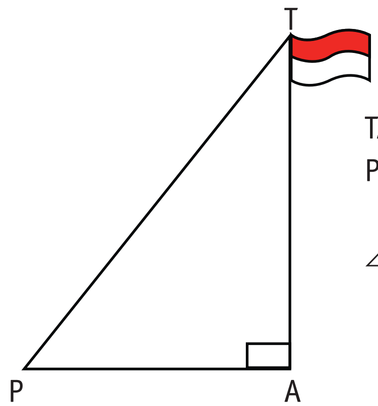
Alat dan bahan:

1. Klinometer yang dibuat dari busur derajat, potongan pralon, benang dan bandul
2. Meteran gulung
3. Penggaris

4. Kertas dan alat tulis
5. Tabel trigonometri (atau scientific calculator)

Prosedur ekplorasi:

a. Bekerjalah dalam kelompok kerja yang terdiri dari 4 orang
b. Bertiaraplah dan bidiklah sudut elevasi dari tanah terhadap ujung tiang bendera
c. Tuliskan berapa besar sudut elevasi yang terbentuk
d. Ukur jarak kepalamu terhadap kaki tiang bendera
e. Lukislah hasil eksplorasi dalam kertas kerja, kemudian hitunglah tinggi tiang bendera



TA = Tinggi tiang bendera
PA = Jarak pengamat ke tiang bendera
$\angle$ TPA = Sudut elevasi hasil pengamatan

f. Lampirkan hasil kerja kelompokmu dalam portofolio

L. Luas Segitiga

Luas segitiga ABC sama dengan setengah perkalian dua sisi dengan sinus sudut apitnya.

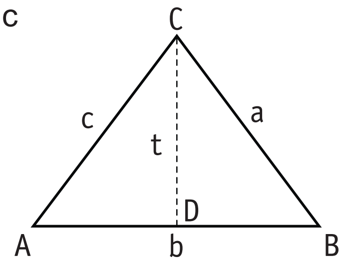
$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2}\, ac \sin B$$

$$\text{Luas segitiga ABC} = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

Bukti:

Dalam segitiga siku-siku ABD, diperoleh $\sin A = \frac{t}{c}$



$t = c \sin A$ .... i)

Luas segitiga ABC adalah:

$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} bt$ .... ii)

Substitusikan (i) ke (ii) diperoleh luas segitiga sebagai berikut:

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan:

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} ac \sin A$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} ab \sin A$$

RUMUS HERON

Jika dalam segituga ABC sisi-sisinya a, b, dan c, sedangkan

$s = \frac{a+b+c}{2}$, maka buktikan rumus Heron bahwa:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}$$

Bukti:

Luas Δ ABC dapat dinyatakan:

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \, bc \, \sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \, bc \, \sqrt{(1 - \cos A)(1 + \cos A)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \, bc \, \sqrt{(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \, bc \, \sqrt{(\frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc})(\frac{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc})}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \, bc \, \sqrt{(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc})(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc})}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \, bc \sqrt{(\frac{(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))((b^2 + 2bc + c^2) - a^2)}{(2bc)^2})}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{2} \frac{bc}{2bc} \, \sqrt{(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2))((b^2 + 2bc + c^2) - a^2)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a - (b - c))(a + (b - c))((b + c) - a)((b + c) + a)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \, \sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)(a + b + c)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2a)(2s)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{2(s - a)2(s - b)2(s - c)2(s)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{16(s - a)(s - b)(s - c)(s)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \frac{1}{4} . 4 \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s)}$$

$$L \, \Delta \, ABC = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s)} \quad \text{(terbukti)}$$

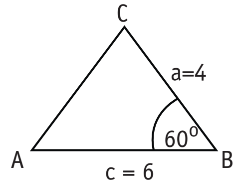
Contoh 6.34

Diketahui ΔABC dengan panjang sisi a = 4 cm, c = 6 cm dan $\angle ABC = 60^\circ$.

Hitunglah luas ΔABC:

Penyelesaian:

a) Sketlah:



b) Karena a dan c adalah dua sisi yang mengapit sudut B maka:

$$L\ \Delta ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$L\ \Delta ABC = \frac{1}{2} 4.6.\sin 60^\circ$$

$$L\ \Delta ABC = 12.\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$L\ \Delta ABC = 6\sqrt{3}$$

c) Jadi luas ΔABC adalah $6\sqrt{3}$ cm^2

Taukah Kamu...?

Meriam adalah termasuk yang paling terakhir ditemukan oleh bangsa Arab. Meriam ditemukan oleh orang Maroko pada saat terjadi kekacauan dalam peradaban bangsa Arab, sementara Eropa sedang menuju kebangkitan dan memanfaatkan potensi ilmu pengetahuan. Karena itu, penemuan ini menjadi musibah bagi bangsa Arab, karena Eropa berhasil mengembangkannya dan mempergunakannya untuk menghantam benteng-benteng pertahanan Arab di Andalusia dan mengambil kembali Portugal dan Spanyol dari kekuasaan kaum Muslimin. Mereka juga menggunakan meriam di kapal perang yang membuat Inggris, Portugal dan Belanda menguasai lautan dunia. Sedangkan orang Arab tidak mampu mengembangkannya karena telah "disibukkan" oleh perang saudara.

Contoh 6.35

Hitunglah luas daerah ΔABC, jika panjang ketiga sisi diketahui a = 7 cm, b = 4 cm, dan c = 5 cm.

Penyelesaian:

a) Karena yang diketahui ketiga sisinya, maka luas segitiga dapat dihitung menggunakan rumus:

$$L\ \Delta\ ABC = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s)}$$

b) Menghitung nilai s

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{7+4+5}{2} = 8$$

c) $L\ \Delta ABC = \sqrt{(8-7)(8-4)(8-5)(8)}$

$$= \sqrt{1.4.3.8} = \sqrt{1.4.3.4.2} = 4\sqrt{6}$$

d) Jadi luas ΔABC adalah $4\sqrt{6}\ cm^2$

Engkau takkan bisa mencukupi kebutuhan manusia dengan harta kekayaanmu, tetapi bisa engkau cukupi dengan senyum yang manis dan tingkah laku yang baik

(Al hadist)

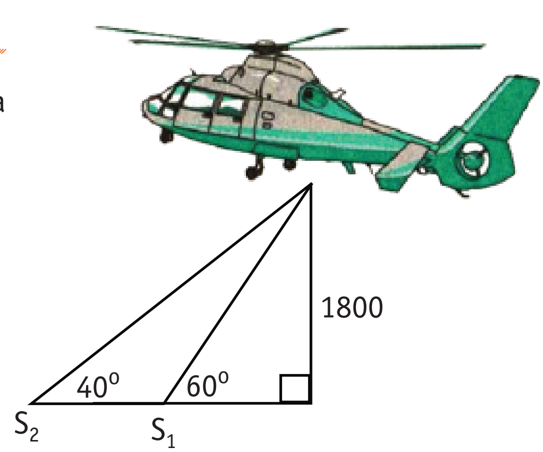
Latihan 6.J

Luas Segitiga

1. Hitung luas segitiga ABC, jika panjang sisi a = 4 cm, c = 6 cm dan $\angle ABC = 30^\circ$
2. Hitung luas jajaran genjang ABCD dengan panjang AB = 10 cm. AD = 8 cm dan $\angle$ BAD = 45°
3. Luas Δ KLM sama dengan 27 cm2. Jika panjang KL = $4\sqrt{3}$ cm dan LM = 9 cm. Hitung besar $\angle$ KLM.
4. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi-sisinya 10 cm, 14 cm dan 20 cm. Hitunglah luas segitiga tersebut.
5. Sebuah lempeng logam berbentuk segitiga dengan panjang 114 mm, 72 mm dan 87 mm. Tentukan luas segitiga tersebut dengan menggunakan rumus Heron.
6. Sebuah segitiga memiliki sudut terbesarnya 115°. Sisi terpanjangnya 62 cm dan sisi lainnya 35 cm. Tentukan luas segitiga.
7. Diketahui dua buah sisi segitiga adalah 25 cm dan 30 cm. Sudut antar dua sisi tersebut adalah 30°. Tentukan:
   a. Luas segitiga tersebut
   b. Panjang sisi ketiganya
   c. Luas segitiga dengan menggunakan rumus Heron

Soal-soal Kontekstual

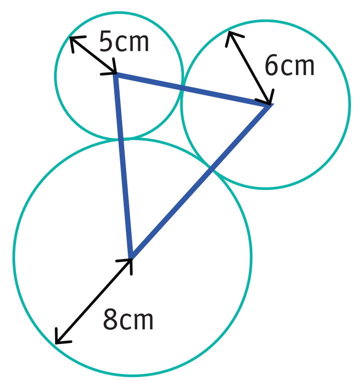
1. Sebuah helikopter yang berada pada ketinggian 1800 meter dilihat oleh pengamat 1 dengan sudut elevasi 40° dan dilihat oleh pengamat 2 dengan sudut elevasi 60°. Berapakah jarak antara pengamat 1 dan pengamat 2?



2. Burung terbang pada ketinggian 5° meter di atas tanah dilihat dari pintu depan rumah dengan sudut elevasi 5°. Dua menit berikutnya sudut burung teramati pada sudut elevasi 4°.

   a. Jika burung tersebut terbang lurus pada ketinggian yang sama, temukan jarak horisontal burung tersebut: (i) dari pintu depan rumah pada saat tengah hari; (ii) dari pintu depan rumah pada saat pukul12.02
   b. Tentukan jarak yang ditempuh oleh burung tersebut selam 2 menit.
   c. Nyatakan kecepatan terbang burung tersebut dalam km/jam

3. Perhatikan 3 buah lingkaran yang saling bersentuhan gambar di samping. Ketika lingkaran tersebut masing-masing berjari-jari 5 cm, 6 cm, dan 8 cm. Jika ketiga pusat lingkaran tersebut dihubungkan maka terbentuk segitiga. Hitunglah sudut terbesar dalam segitiga tersebut!

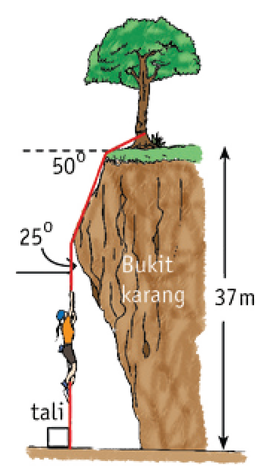


4. 

Sumber: Maths Quest

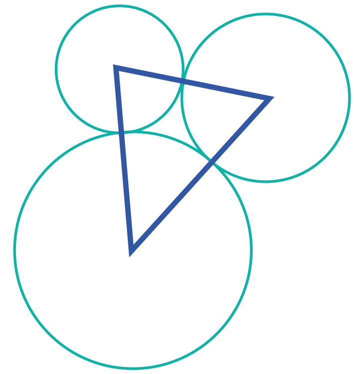
Sebuah perbukitan karang tingginya 37 m. Kemiringan bukit bagian luar adalah 50° dari horisontal, kemudian kemiringan punggung bukit adalah 25° dari vertikal. Anita dari puncak bukit itu ingin menuruninya.

Dia memiliki tali pendakian sepanjang 45 m. Dia telah menggunakan sepanjang 2 meter mulai diikatkan pada pohon sampai tepat di tepi perbukitannya. Akankah panjang sisa tali pendakian Anita cukup untuk dapat mencapai tanah?

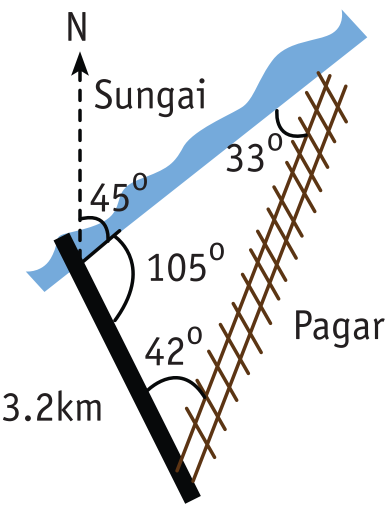


Sumber: Maths Quest

5. Tiga buah lingkaran yang masing-masing berjari-jari cm, 3 cm dan 4 cm diletakkan sehingga mereka saling menyentuh satu sama yang lain. Sebuah segitiga dibentuk dari menghubungkan ketiga titik pusat lingkaran. Hitunglah:
   a. besar ketiga sudut dalam segitiga tersebut
   b. luas segitiga tersebut
   c. luas daerah terarsir



6. Seorang petani memiliki tanah datar berbentuk segitiga, salah satu sisinya dibatasi oleh sungai yang mengalir ke arah Timur Laut. Sisi yang keduanya dibatasi oleh jalan yang memotong sungai pada jembatan. Sudut yang terbentuk antara sungai dan jalan sebesar 105°, sisi yang ketiganya dibatasi oleh pagar yang panjang.



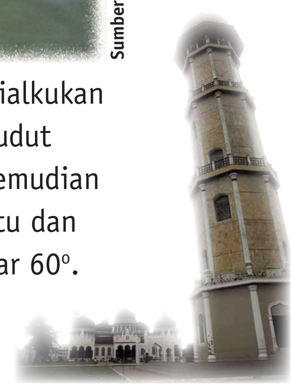
   Temukan:
   a. panjang sungai (teliti sampai 3 tempat desimal)
   b. luas tanah petani (teliti sampai 3 tempat desimal)
   c. Petani berencana membagi tanahnya menjadi dua bagian dengan luas yang sama, dengan cara membuat pagar dari dari jembatan sampai ke sebuah titik pada pagar. Temukan berapa panjang pagar yang akan digunakan untuk memtanah tersebut? (teliti sampai 3)

Sumber: Maths Quest

7. Permukaan kolam ikan seperti terlihat pada gambar di samping. Berapa ikan mas yang dapat dipelihara jika seekor ikan mas idealnya memerluka luas permukaan air sekitar 0,3 m^2

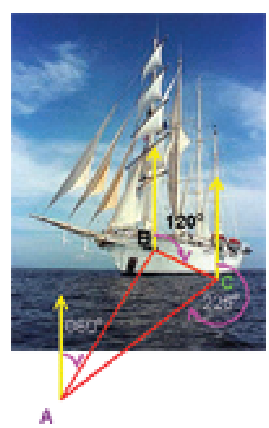
Sumber: www.countryvacations.info

8. Untuk menghitung tinggi menara suatu masjid. Dialkukan dengan cara beriku. Pertama, Ahmad mengukur sudut elevasi ke puncak menara masjid, sebesar 52^o. Kemudian dia berjalan 20 meter mendekati menara masjid itu dan mengukur sudut elevasi ke puncak menara, sebesar 60^o. Tinggi Pak Ahmad 160 cm. Berapa tinggi menara masjid tersebut?



Sumber: www.serambinews.com

9. Sebuah kapal berangkat dari pelabuhan A menuju pelabuhan B sejauh 25 km dengan jurusan 060^o. Kemudian dari pelabuhan B kapal bergerak menuju pelabuhan C dengan jurusan 120^o. Setelah tiba dipelabuhan C kapal kembali ke pelabuhan A dengan jurusan 225^o. Berapakah jarak yang ditempuh kapal dari pelabuhan C ke pelabuhan A?



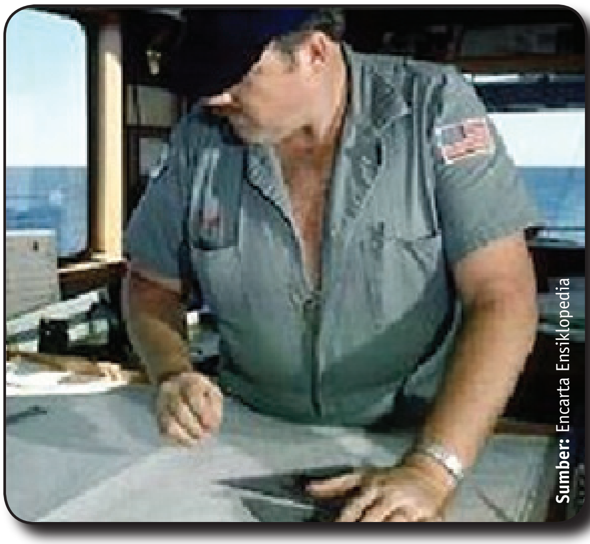
Sumber: astaexec.files.wordpress.com

10. Sebuah kebakaran hutan melahap habis padang rumput seperti ditunjukkan pada diagram berikut. Berapa hektar area yang terbakar?

Sumber: Maths Quest

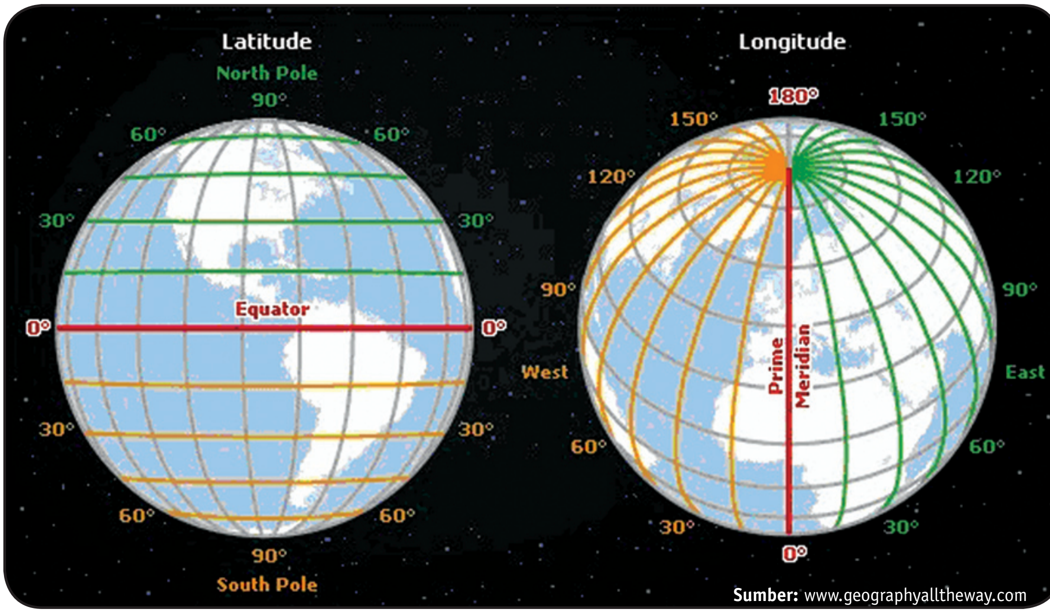
M. Matematika dalam Dunia Kerja

Trigonometri Dalam Navigasi



NAVIGASI, berasal dari kata Latin navis yang artinya ”perahu atau kapal” dan agire yang berarti ”mengarahkan”. Jadi navigasi berarti seni atau ilmu pengetahuan untuk menjalankan kapal dan kendaraan air lainnya dari satu tempat ke tempat lainnya dengan selamat dan efisien.

Untuk menjalankan kapal tersebut diperlukan peta dan gambar yang didesain sedemikian sehingga arah utara menempati bagian atas, arah selatan menempati bagian bawah, arah timur menempati bagian kanan dan arah barat menempati bagian kiri. Peta dan gambar juga menunjukkan garis lintang dan garis bujur (latitude and longitude), sebuah sistem koordinat geometri akan memberikan cara sederhana untuk mengidentifikasi lokasi tertentu. Seorang navigator menyatakan posisi utaranya atau selatannya dengan menggunakan garis lintang (latitude) paralel --- yaitu sebuah garis yang memotong peta, chart, atau globe dari kiri ke kanan. Koordinat latitude mengindikasikan jarak dari equator (garis katulistiwa), garis yang mengelilingi tengah globe, yang membagi globe menjadi belahan bumi utara dan belahan bumi selatan. Seorang navigator menyatakan posisi baratnya atau timurnya dengan menggunakan garis bujur (meridian longitude), garis-garis yang bergerak dari atas ke bawah (dari utara ke selatan) pada peta, chart, atau globe. Koordinat longitude mengindikasikan jarak dari garis bujur utama (prime meridian longitude), melalui kota Greenwich, Inggris, dekat London.



Sumber: www.geographyalltheway.com

Navigator sering menyatakan jarak dalam notasi derajat (biasanya disimbolkan dengan °). Garis equator adalah 0°. Kutub utara terletak pada 90° LU. Sedangkan, Kutub selatan terletak pada 90° LS. Dengan kesepakatan internasional, garis bujur utama (prime meredian) terletak pada 0°.

Setiap 1° baik pada garis lintang maupun garis bujur dibagi ke dalam 60 menit (60′), dan lebih lanjut setiap menitnya dibagi ke dalam 60 detik (60″). Para navigator mengukur jarak 1′ sama dengan 1.852 m atau 6.076 ft.

Di muka bumi ini, letak suatu tempat ditentukan garis lintang dan garis bujur. Sebagai contoh Houston, Texas terletak pada 29° 46′ LU dan 95° 22′ BB. Nairobi, Kenya terletak pada 1° 17′ LS dan 36° 49′ BT.

Pertanyaan:

Pada tanggal 14 April 1912 kapal Titanic menabrak gunung es di lautan atlantik utara pada posisi 41° 33′LU dan 50° 01′ BB. Dapatkah kamu menentukan letak tenggelamnya kapal Titanik pada sebuah globe?

Rangkuman

1. Hubungan derajat, menit dan detik yaitu:

   1° = 60′ = 3600″

2. Hubungan derajat dan radian adalah:

   180° = p rad

3. Koordinat P(x,y) pada lingkaran dengan jari-jari 1 dapat ditulis

   sebagai P(cos a, sin a)

4. Nilai-nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa

α	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tg α 0	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

5. Hubungan trigonometri untuk sudut α dan $(90^\circ - \alpha)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha$$

$$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y} = \text{cotg}\,\alpha$$

$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{r}{y} = \text{cosec}\,\alpha$$

$$\text{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{r}{x} = \sec\alpha$$

$$\text{cotg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$$

6. Nilai perbandingan trigonometri suatu - sudut sama dengan nilai perbandingan trigonometri komplemennya.

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\sec(90^\circ - \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha$
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\mathrm{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec\alpha$
$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

7. Hubungan trigonometri untuk sudut a dan (180°– a)

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{cosec}(180^\circ - \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$

8. Hubungan trigonometri untuk sudut a dan (180° + a)

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{cosec}(180^\circ + \alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$

9. Hubungan trigonometri untuk sudut a dan (360°– a)

$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\sec(360^\circ - \alpha) = \sec\alpha$
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{cosec}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$

10. Hubungan trigonometri untuk sudut a dan (k. 360° + a)

$\cos(k.360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	$\sec(k.360^\circ + \alpha) = \sec\alpha$
$\sin(k.360^\circ + \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{cosec}(k.360^\circ + \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(k.360^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(k.360^\circ + \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$

Inspirasi Pagi .....

Syahdan, di sebuah kerajaan sedang diadakan lomba uji keberanian dengan menyeberangi sungai di sebelah utara kerajaan, yang terkenal dengan arusnya yang deras dan puluhan buayanya yang ganas. Baginda Raja memberikan titah pada sang patih untuk memberikan warta pada rakyatnya bahwa lomba tersebut akan diadakan besok pagi.

Pagi yang dinanti itu telah tiba. Sang Raja dan punggawanyapun telah berada pada tepi sungai berhadap dengan rakyatnya yang berada di tepi lainnya. Di depan rombongan pentinggi kerajaan itu, terdapat satu peti emas permata yang disediakan bagi mereka yang punya keberanian besar untuk menyeberangi sungai itu.

Sang Patihpun memukul gong sebagai tanda perlombaan dimulai. Sekitar satu jam telah berlalu, namun tak satupun tampak orang yang berani menceburkan diri untuk menyeberangi sungai itu, mereka hanya saling berpandangan saja. Mereka percaya, siapa yang berani menyeburkan diri ke sungai itu sama artinya bunuh diri.

Kebekuan suasana tiba-tiba berubah oleh suara "*byuuuur.*" Sesosok pemuda menceburkan diri, berjuang melawan derasnya arus dan berenang kencang menghindar buasnya tikaman buaya. Alhasil, sampailah ia di tepi sungai di mana rombongan Sang Raja berada.

Sang Rajapun kagum kemudian melihat keberanian pemuda itu. Iapun berdiri menghampiri pemuda itu. "Selamat wahai anak muda, engkaulah sang pemberani di negeri ini, terimalah satu peti emas permata ini," Ucap Sang Raja. "Maaf, Baginda Raja, tidak selayaknya aku terima hadiah ini," ucap pemuda itu. "Mengapa kau tolak hadiah ini, wahai anak muda?" tanya Sang Raja terheran-heran. "Baginda Raja yang mulia, aku tidak punya keberanian untuk itu. Aku hanya berusaha keras untuk menyelamatkan diriku setelah terdorong dan terjebur ke sungai oleh orang yang berada di belakangku, dialah yang sebenarnya layak mendapatkan hadiah itu." (Anonim)

Hikmah yang bisa dipetik dari cerita itu adalah, pentingnya dorongan atau motivasi orang lain untuk membuat kita menjadi sukses dalam bidang apapun. (*Anonim*)

Ujilah dirimu

Soal Pilihan Ganda

1. Bila $0^{o} < \alpha < 90^{o}$ dan $\tan \alpha = \dfrac{5}{\sqrt{11}}$ maka $\sin \alpha = ...$

   a. $\dfrac{5}{6}$
   b. $\dfrac{25}{36}$
   c. $\dfrac{1}{6\sqrt{11}}$
   d. $\dfrac{5}{36}$
   e. $\dfrac{1}{36\sqrt{11}}$

2. Diketahui $\cos A = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ dengan sudut A lancip. Nilai tan A adalah....

   a. $\dfrac{1}{3}$
   b. $\dfrac{1}{2}$
   c. $\dfrac{1}{5}\sqrt{5}$
   d. $2\sqrt{5}$
   e. $3\sqrt{5}$

3. Diketahui $\tan A = \dfrac{3}{4}$ dengan sudut A lancip. Nilai $2 \cos A = ...$

   a. $\dfrac{6}{5}$
   b. $\dfrac{8}{5}$
   c. $\dfrac{5}{4}$
   d. $\dfrac{4}{5}$
   e. $\dfrac{5}{3}$

4. Jika $\cos \beta = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ dan sudut β terletak pada kuadran II, maka tg $\beta = ...$

   a. $\sqrt{3}$
   b. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$
   c. $\dfrac{1}{2}$
   d. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$
   e. $-\sqrt{3}$

5. Jika x di kuadran II, dan tan x = a maka sin x = ...

a. $\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}$

b. $-\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}$

d. $\frac{1}{a\sqrt{(1+a^2)}}$

e. $-\frac{a\sqrt{(1+a^2)}}{a}$

6. Jika $\sin A = \frac{3}{5}$, A sudut lancip pada kuadran II, maka cos A = ...

a. -1

b. $-\frac{4}{5}$

c. 0

d. $\frac{4}{5}$

e. 1

7. Nilai dari sin 300° adalah....

a. $\sqrt{3}$

b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

c. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e. $-\sqrt{3}$

8. Nilai dari $\cos^2 30^\circ - \sin^2 135^\circ + 8 \sin 45^\circ \cos 135^\circ$ adalah....

a. $-4\frac{1}{4}$

b. $-3\frac{3}{4}$

c. $4\frac{1}{4}$

d. 4

e. $3\frac{3}{4}$

9. Nilai dari $\sin 240^\circ + \sin 225^\circ + \cos 315^\circ$ adalah....

a. $-\sqrt{3}$

b. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $-\frac{1}{2}$

d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Nilai dari $\dfrac{\sin 30^\circ + \cos 330^\circ + \sin 150^\circ}{\tan 45^\circ + \cos 210^\circ} = ...$

a. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
b. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
c. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
d. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
e. $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$

11. Nilai dari $\dfrac{\sin 270^\circ \times \cos 135^\circ - \text{tg } 135^\circ}{\sin 150^\circ \times \cos 225^\circ} = ...$

a. -2
b. $-\dfrac{1}{2}$
c. $\dfrac{1}{2}$
d. 1
e. 2

12. Nilai cos 1110° adalah ....

a. $\sqrt{3}$
b. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $-\sqrt{3}$
d. $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
e. $\dfrac{1}{2}$

13. Nilai dari sin 1020° adalah....

a. -1
b. $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$
c. $-\dfrac{1}{2}$
d. $\dfrac{1}{2}$
e. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

14. Jika panjang sisi-sisi Δ ABC berturut-turut adalah AB= 4 cm, BC = 6 cm, dan AC = 5 cm, sedang $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, dan $\angle BCA = \gamma$, maka sin α : sin β : sin γ = ...

a. 4 : 5 : 6
b. 5 : 6 : 4
c. 6 : 5 : 4
d. 4 : 6 : 5
e. 6 : 4 : 5

15. Bentuk sederhana dari:

$$\frac{\sin(180^\circ - a^\circ).\cos(180^\circ + a^\circ).\cot g\,(90^\circ - a^\circ).\cos(-a^\circ)}{tg\,(180^\circ - a^\circ).\cos(90^\circ + a^\circ).\sin(270^\circ - a^\circ)}$$

a. $-\frac{\sin a^\circ}{\cos a^\circ}$

b. $\frac{\sin a^\circ}{\cos a^\circ}$

c. cos a

d. $-\cos a$

e. 1

16. Identitas trigonometri dari $\frac{tg\,A}{\sec^2 A} + \frac{\cot g\,A}{\operatorname{cosec}^2 A}$ adalah....

a. 2 sin A cos A

b. 2 sin A + 2 cos A

c. 2 sec A cosec A

d. 2 tg A + 2 cotg A

e. sin A tg A + cos A cotg A

17. Identitas berikut benar *kecuali* ....

a. $(\cos A + \sin A)^2 - (\cos A - \sin A)^2 = 4 \sin A \cos A$

b. $5 \sin^2 A + 3 \cos^2 A = 5 - 2 \cos^2 A$

c. $(tg\,A + cotg\,A).\ \cos 2\,A = ctg\,A$

d. $\frac{tg\,A.\sin 2\,(90^\circ - A)}{\cos A.\cot g\,(180^\circ - A)} = -\frac{\sin A}{tg\,A}$

e. $tg\,A + \frac{1}{tg\,A} = \frac{1}{\cos^2 A.\,tg\,A}$

18. Bentuk $\frac{2\,tg\,x}{1 + tg^2\,x}$ ekuivalen dengan ....

a. 2 sin x

b. sin 2x

c. 2 cos x

d. cos 2x

e. tg 2x

19. Bentuk $(1 - \sin^2 A).\ tg^2 A$ ekuivalen dengan....

a. $2 \sin^2 A - 1$

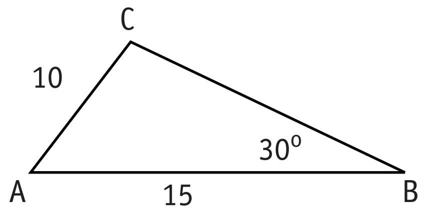
b. $\cos^2 A - \sin^2 A$

c. $1 - \cos^2 A$

d. $1 - \sin^2 A$

e. $2 + \cos^2 A$

20. Nilai cosinus sudut C pada segitiga di bawah ini adalah....



a. $\frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{4}\sqrt{7}$
c. $\frac{3}{4}$
d. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
e. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

21. Ditentukan segitiga ABC dengan panjang sisi BC = 3 cm, sisi AC = 4 cm dan sin A = $\frac{1}{2}$. Nilai cos B =....

a. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
c. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
d. $\frac{2}{3}$
e. $\frac{1}{2}$

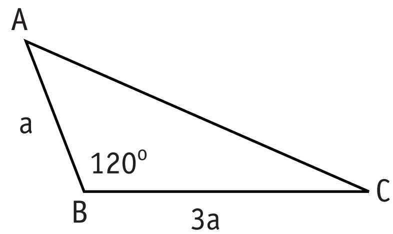
22. Diketahui segitiga ABC dengan AC = 5 cm, AB = 7 cm, dan $\angle BCA = 120^\circ$. Keliling segitiga ABC = ...

a. 14 cm
b. 15 cm
c. 16 cm
d. 17 cm
e. 18 cm

23. Pada ΔABC diketahui a + b = 10, sudut A = 30° dan sudut B = 45°, maka panjang sisi b = ...

a. $5(\sqrt{2} - 1)$
b. $5(2 - \sqrt{2})$
c. $10(2 - \sqrt{2})$
d. $10(\sqrt{2} + 2)$
e. $10(\sqrt{2} + 1)$

24. Untuk memperpendek lintasan A menuju B, dibuat jalan pintas dari A langsung ke C. Jika AB = a dan BC = 3a, maka panjang jalur pintas AC adalah....



a. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
c. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
d. $\frac{2}{3}$
e. $\frac{1}{2}$

25. Diketahui segitiga ABC dengan AB = 4 cm, AC = 6 cm, BC = 8 cm, dan ∠ ACB = ∠. Nilai cos α =....

a. $-\frac{1}{4}$
b. $\frac{11}{24}$
c. $\frac{11}{18}$
d. $\frac{18}{24}$
e. $\frac{21}{24}$

Soal Uraian

26. Diketahui titik A dan B merupakan dua titik di pinggir sungai pada posisi yang sama, sedangkan titik C merupakan suatu titik di sisi yang lain. Diketahui bahwa ∠ BAC = 81° dan ∠ ABC = 73° carilah lebar sungai jika jarak A ke B adalah 56 meter!

27. Dua orang anak berdiri pada jarak 10 m. Anak pertama melihat puncak pohon dengan sudut elevasi 50° dan anak kedua dengan sudut elevasi 30°. Hitunglah tinggi pohon!

28. Hitunglah luas lingkaran yang dapat dibuat dalam segitiga siku-siku yang panjang sisi-sisinya 10 cm, 24 cm, dan 25 cm!

29. Tentukan luas bangun berikut ini!