

SISTEM PERSAMAAN LINIER DAN KUADRAT

3

“Hai jama’ah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, maka lintasilah, kamu tidak dapat menembusnya melainkan dengan kekuatan”
(Q.S. Ar Rahman: 33)

Ketika pesawat luar angkasa diluncurkan, pengalaman astronot menyatakan bahwa dirinya mengalami stres berat. Jantung para astronot memompa darah dua kali banyaknya dari kondisi normal. Jantung memompa darah sekitar 4,7 liter lebihnya per menit pada saat peluncuran pesawat dibanding saat astronot beristirahat di daratan.

- Tulislah dua persamaan terkait dengan jantung memompa darah dalam kondisi normal maupun saat pesawat ruang angkasa diluncurkan.
- Selesaikan sistem persamaan tersebut untuk menemukan rata-rata jantung memompa darah pada saat kondisi normal dan saat peluncuran pesawat ruang angkasa.

Standar Kompetensi

Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Kompetensi Dasar

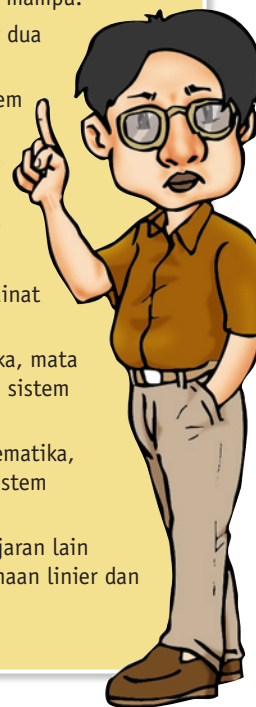
1. Menentukan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel dan memberikan tafsiran secara geometri.
2. Menentukan penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel dan memberikan tafsiran secara geometri.
3. Menentukan penyelesaian sistem persamaan campuran dan memberikan tafsiran secara geometri.
4. Merancang suatu permasalahan dengan membuat model matematika yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dua variabel, menyelesaikan modelnya dan menafsirkan hasil yang diperoleh.
5. Merancang suatu permasalahan dengan membuat model matematika yang berkaitan dengan sistem persamaan linier tiga variabel, menyelesaikan modelnya dan menafsirkan hasil yang diperoleh.
6. Merancang suatu permasalahan dengan membuat model matematika yang berkaitan dengan sistem persamaan campuran, menyelesaikan modelnya dan menafsirkan hasil yang diperoleh.



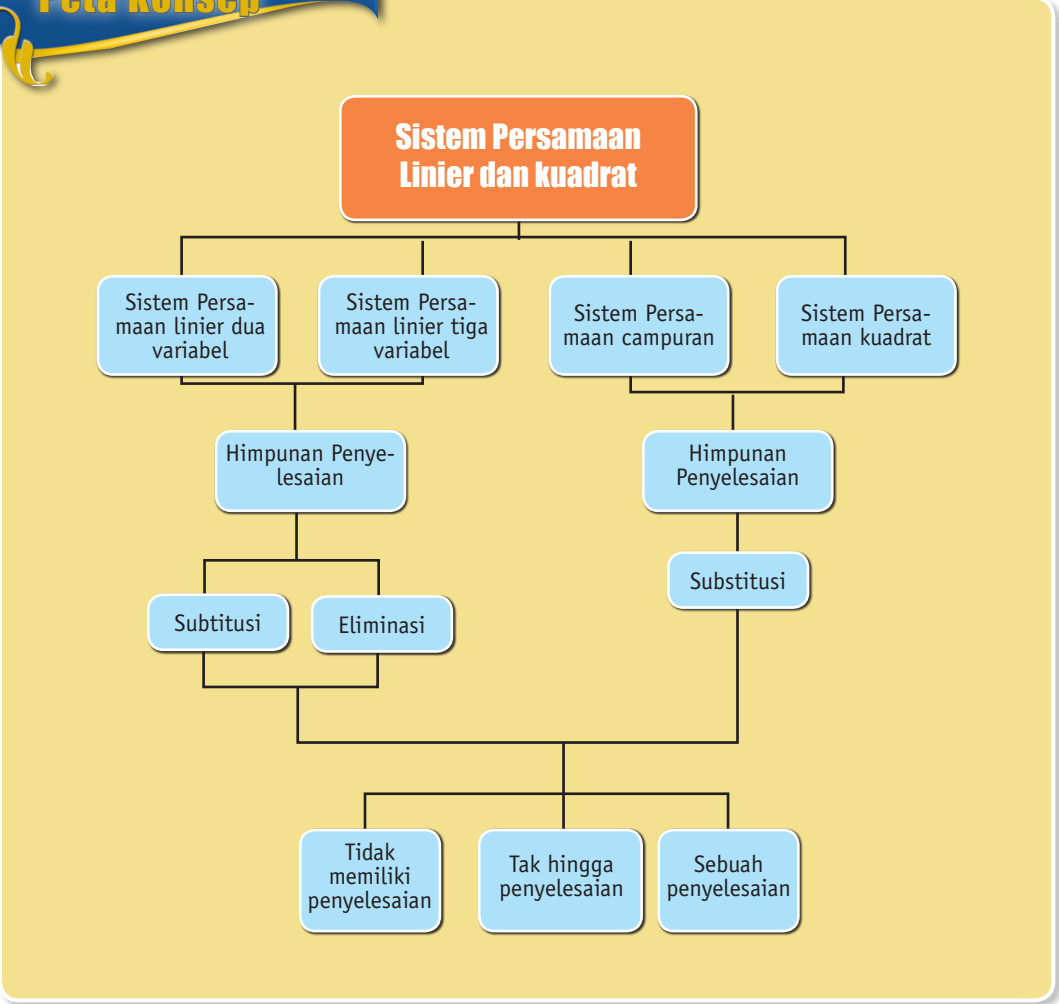
Indikator

Setelah mempelajari pokok bahasan dalam bab ini, kamu diharapkan mampu:

1. Menemukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier dua variabel.
2. Menggambarkan sistem persamaan linier dua variabel dalam sistem koordinat kartesius dan menafsirkan himpunan penyelesaiannya.
3. Menemukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier tiga variabel.
4. Menemukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier campuran.
5. Menggambarkan sistem persamaan campuran dalam sistem koordinat kartesius dan menafsirkan himpunan penyelesaiannya.
6. Membuat model matematika dari suatu masalah dalam matematika, mata pelajaran lain atau kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dan kuadrat.
7. Menyelesaikan model matematika dari suatu masalah dalam matematika, mata pelajaran lain atau kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dan kuadrat.
8. Menafsirkan penyelesaian masalah dalam matematika, mata pelajaran lain atau kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dan kuadrat.



Peta Konsep



Kata Kunci

- Variabel
- Koefisien
- Konstanta
- Substitusi
- Eliminasi
- Determinan
- Himpunan penyelesaian

Sebelum mengkaji sistem persamaan linier dan kuadrat, marilah kita baca dan kaji bersama Surah Ar Rahman ayat 33 berikut ini.

يَمَعَّشَرَ الْجِنِّ وَالْإِنْسِ إِنَّ اسْتَطَعْتُمْ أَنْ تَنْفُذُوا
مِنْ أَقْطَارِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ فَانفُذُوا
لَا تَنْفُذُونَ إِلَّا بِسُلْطَنِ ۝

Artinya:

Hai jama'ah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, maka lintasilah, kamu tidak dapat menembusnya melainkan dengan kekuatan.

Pada saat SMP atau MTs kamu telah mempelajari sistem persamaan linier dua variabel. Dalam bab ini kamu akan mempelajari lebih lanjut tentang sistem persamaan linier dua variabel, tiga variabel, linier-kuadrat, dan kuadrat-kuadrat. Untuk mengingatkannya kembali, coba perhatikan ilustrasi berikut ini!

Dalam sebuah pesawat terbang terdapat 800 orang penumpang. Harga tiket penerbangan kursi kelas VIP adalah Rp7.000.000,00, sedangkan untuk tiket penerbangan kursi kelas ekonomi adalah Rp5.000.000,00.

Hasil penjualan tiket sebesar

Rp4.600.000.000,00.

Berapa banyak penumpang yang membeli tiket kelas VIP? Berapa banyak pula penumpang yang membeli tiket kelas ekonomi?



Kuis Apersepsi

Sudah siapkah kamu berpetualang di belantara “ Persamaan Linier dan Kuadrat” ini? Untuk mengukur apakah kamu termasuk orang yang sudah siap atau tidak, kamu bisa menguji dirimu sendiri lewat kuis apersepsi ini. Jika kamu bisa menjawab seluruhnya, berarti kamu sudah siap mengikuti penjelajahan matematika ini. Jika tidak, maka kamu harus mengulangi sampai benar-benar bisa.



- Tentukan apakah persamaan berikut merupakan persamaan linier atau bukan? Jika bukan jelaskan alasannya!
 - $x^2 + 3x - 5 = 0$
 - $x + 2y = 7$
 - $xy + z = -2$
 - $x^2 + y^2 = 25$
- Tentukan koefisien x , koefisien y dari masing-masing persamaan berikut!
 - $2x - y - 5 = 0$
 - $3y + x = 8$
 - $x + 7y = -6$
 - $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{1}{5}$
- Manakah persamaan-persamaan berikut ini yang melalui titik $(2, -3)$?
 - $2x - 3y = 13$
 - $6x + 2y = 5$
 - $x - 2y = 8$
 - $5x - y + 7 = 0$
- Tentukan hasilnya jika $y = 2x - 5$ disubstitusikan ke persamaan-persamaan berikut ini!
 - $x + y = 15$
 - $2x - 3y - 7 = 0$
 - $2y - x = 10$
 - $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

Alhamdulillah, aku bisa menjawab semuanya



A. Tentang Sistem Koordinat Kartesius

Rene Descartes

(Temuan Kecil Membawa Perubahan Besar)



Sebaiknya Anda Tahu

Apa "hau" itu? Seorang Mesir yang tak diketahui namanya, menulis tentang aljabar 4000 tahun yang lalu. Ia menggunakan kata hau untuk menyebut angka yang belum diketahui. Kata hau sekarang ini kita lambangkan dengan huruf x

Menurut ahli sejarah, Heroditus (450 SM) menyatakan bahwa geometri berasal dari Mesir. Ilmu geometri lahir dari tradisi pengukuran tanah di tepi sungai Nil. Pengukuran tanah senantiasa dilakukan sebagai akibat banjir yang sering terjadi. Sebuah manuskrip tua orang Mesir bertajuk Papyrus Rhind yang ditulis oleh Ahmes 2000 SM --*saat ini disimpan di museum London Inggris*-- menginformasikan tentang aturan-aturan dan rumus-rumus untuk mencari luas ladang dan isi gudang gandum yang digunakan waktu itu.

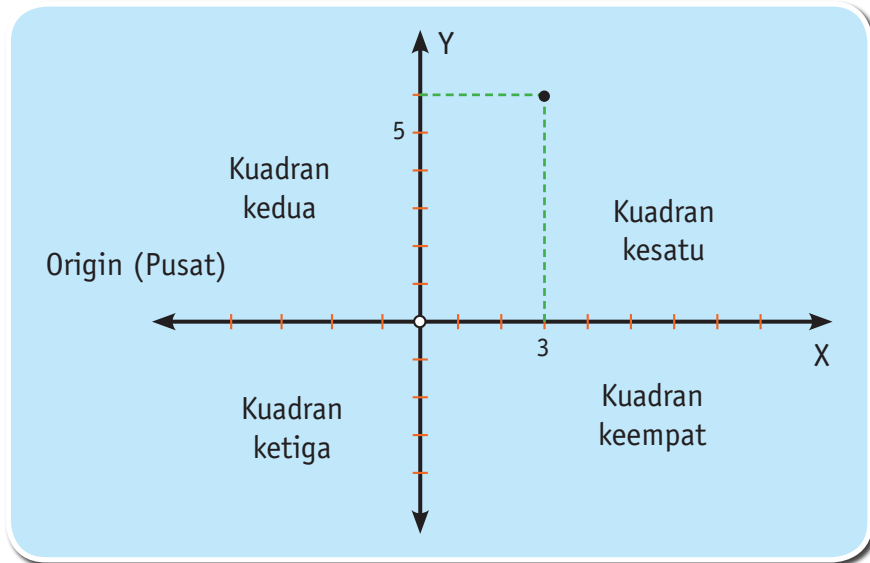
Orang Mesir juga telah mengetahui bahwa bentuk aljabar $ax + b = 0$ secara geometri dapat dinyatakan sebagai garis lurus. Demikian pula dengan bentuk-bentuk pangkat dua, telah mampu mereka ujudkan sebagai bentuk-bentuk seperti ellips, parabola dan hiperbola.

Matematikawan Rene Descartes, yang lahir di sebuah Desa La Haye Perancis 1596, adalah orang yang memiliki ketertarikan pada bidang geometri ini. Descartes telah menemukan sebuah metode untuk menyajikan sebuah titik sebagai bilangan berpasangan dalam sebuah bidang datar. Bilangan-bilangan tersebut terletak pada dua garis saling tegak lurus satu dengan yang lainnya dan berpotongannya di sebuah titik yang dinamakan Origin (0,0), biasanya disimbolkan dengan huruf kapital O(0,0).



Rene Descartes
(1596 – 1650)

Bidang itu dinamakan bidang koordinat atau lebih dikenal dengan sistem koordinat Cartesius. Bidang koordinat terbagi dalam empat kwarter atau kuadran. Contoh: P adalah sebuah titik (3,5). Bilangan 3 dinamakan koordinat x untuk P dan 5 dinamakan koordinat y untuk P. Selanjutnya, koordinat x disebut absis dan koordinat y disebut ordinat.



Dengan kelahiran bidang koordinat, terjadilah revolusi besar dalam bidang matematika. Dengan cerdasnya Descartes menyajikan bentuk-bentuk aljabar yang dilahirkan oleh orang-orang Mesir dan *Khwarizmi* ke dalam bentuk permasalahan geometri secara sistematis.

Descartes mampu “menghadirkan dan menjerat” pengetahuan matematika masa lampau ke dalam sistem koordinatnya. Kini aljabarnya orang-orang Mesir dan Khwarizmi hadir tidak lagi sebagai bentuk bangun belaka melainkan muncul sebagai sosok bentuk yang lengkap dengan koordinatnya.

Pada tahun 1649, Ratu Cristina mengundang Descartes ke Stockholm Swedia guna mengajarnya ilmu filsafat. Dalam pandangan hidupnya, Descartes menolak untuk mempercayai segala sesuatu sampai dia bisa membangun atau menemukan landasan untuk mempercayai hal itu sebagai sebuah kebenaran. Pandangan Descartes yang paling terkenal adalah “*Cogito, ego sum*” (Saya berfikir oleh karenanya saya ada). Pada tahun 1650, Descartes meninggal dalam undangan Ratu Cristina di Swedia tersebut.

B. Sistem Persamaan Linier Dua Variabel



Berfikir Kreatif dan Kritis

Apakah $(2, -3)$ merupakan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Mengapa??

Untuk menyegarkan ingatan kita tentang persamaan linier dua variabel, marilah kita perhatikan persamaan $3x + 2y = 26$. Persamaan ini memiliki dua variabel yaitu x dan y , dan masing-masing variabel tersebut berpangkat satu. Oleh karenanya, persamaan ini dinamakan dengan persamaan linier dua variabel. Angka 3 dan 2 masing-masing merupakan koefisien bagi variabel x dan y . Bilangan 26 disebut sebagai konstanta.

Himpunan penyelesaian dari SPLDV

Misalkan diketahui persamaan linier $x + y = 9$ dan $x + 2y = 13$. Penyelesaian dari kedua persamaan itu adalah pengganti untuk x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut. Pasangan bilangan $(5, 4)$ adalah penyelesaian dari kedua persamaan itu, sebab:

$$(5, 4) \text{ disubstitusikan } x + y = 9$$

$$5 + 4 = 9 \text{ (pernyataan benar)}$$

$$(5, 4) \text{ disubstitusikan } x + 2y = 13$$

$$5 + 2(4) = 13$$

$$5 + 8 = 13 \text{ (juga pernyataan benar)}$$

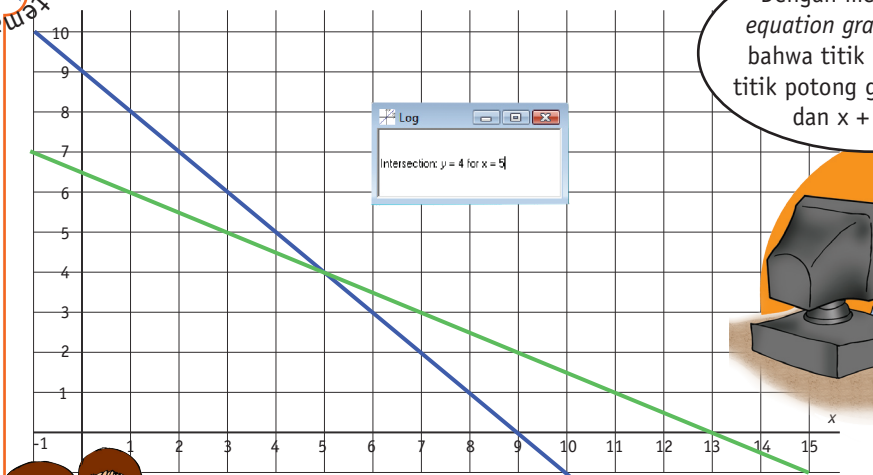
Jadi, bilangan berpasangan $(5, 4)$ merupakan penyelesaian $x + y = 9$ sekaligus untuk $x + 2y = 13$. Bilangan $(5, 4)$ adalah "*penyelesaian*" dari Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV) dari $x + y = 9$ dan $x + 2y = 13$. Sistem persamaan linier tersebut, dalam notasi matematika dituliskan sebagai:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

Himpunan penyelesaiannya dituliskan sebagai $HP = \{(5,4)\}$. Mengapa penulisannya demikian? Alasannya kalau ditinjau secara geometri, himpunan penyelesaian tersebut tidak lain adalah titik potong antara kedua garis linier tersebut.

Hubungan antara sistem persamaan linier $x + y = 9$ dan $x + 2y = 13$ serta $HP = \{(5, 4)\}$ akan terlihat dengan jelas apabila kita menggambarinya dalam sistem koordinat kartesius atau menyelidikinya dengan menggunakan *software equation grapher*.

Teknologi dalam Matematika



Dengan menggunakan *equation grapher* tampak bahwa titik (5,4) adalah titik potong garis $x + y = 9$ dan $x + 2y = 13$



Jadi, dapat dikatakan bahwa secara geometri atau metode grafik, penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel merupakan titik potong dua garis lurus. Benar kan Mat?

Untuk diingat

Diketahui sistem persamaan linier dua variabel berikut

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

Jika berlaku $ax_1 + by_1 = c$ dan $px_1 + qy_1 = r$ maka (x_1, y_1) merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linier dan dituliskan $HP = \{(x_1, y_1)\}$



Bentuk umum sistem persamaan linier dua variabel adalah:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

dengan: a, p = koefisien variabel x
 b, q = koefisien variabel y
 c, r = konstanta

Dapatkan kamu tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$$

- i) Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ maka sistem persamaan tersebut tidak memiliki penyelesaian
- ii) Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ maka sistem persamaan tersebut memiliki tak hingga penyelesaian
- iii) Jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ maka sistem persamaan tersebut memiliki sebuah penyelesaian

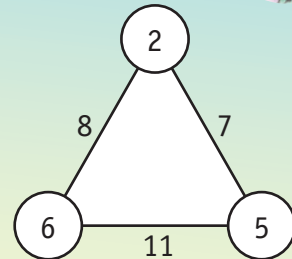


Problem Solving

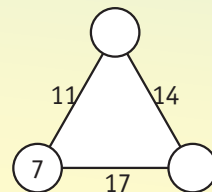
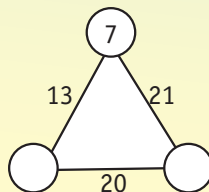
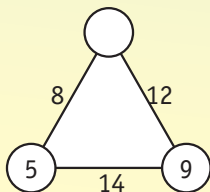


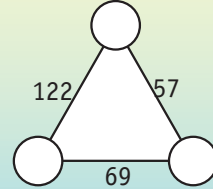
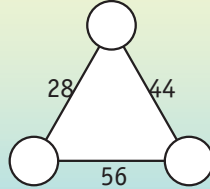
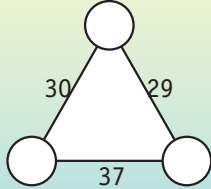
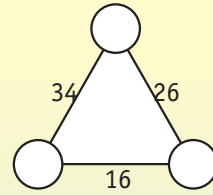
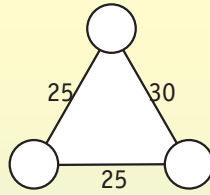
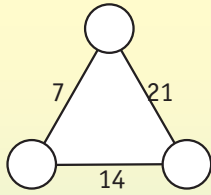
Arithmagon

Sebuah *arithmagon* adalah sebuah gambar segitiga yang memiliki sifat jika dua bilangan di ujung setiap garis dijumlahkan sama dengan sebuah bilangan yang terletak di sisi garis tersebut. Sebuah contoh disajikan seperti tampak disamping.



Selesaikanlah setiap arithmagon berikut ini!





Dapatkan kamu temukan aturan umum dalam melengkapi arithmagon ini?

“Jangan pernah melepaskan suatu impian hingga siap bangkit tuk menjadikannya kenyataan”

C. Himpunan Penyelesaian SPLDV - Cara Substitusi

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menemukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan adalah metode substitusi. Istilah substitusi berasal dari bahasa Inggris *substitute* yang artinya “mengganti”. Cara substitusi dilakukan dengan cara mengganti variabel satu dengan variabel lainnya.

Misalnya, pada bentuk $x + 2y = 7$ secara aljabar dapat diubah menjadi $x = 2y - 7$. Apa artinya? Artinya, apabila ada variabel x dari persamaan lain dalam satu sistem persamaan yang sama maka variabel x itu dapat “diganti” atau “disubstitusi” dengan $(2y - 7)$.

Mari kita perhatikan dan kaji sejumlah contoh berikut ini.

Contoh 3.1

Tentukan himpunan penyelesaian dengan cara substitusi dari sistem persamaan linier berikut!

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$

Penyelesaian:

- a) Nyatakan variabel satu dalam variabel lainnya.

$$5x + y = 13$$

$$y = 13 - 5x$$

Artinya variabel y dapat diganti dengan $(13 - 5x)$.

- b) Substitusikan:

$$\begin{aligned} y = 13 - 5x & \text{ -----} \rightarrow 3x + 2y = 5 \\ & 3x + 2(13 - 5x) = 5 \\ & 3x + 26 - 10x = 5 \\ & -7x = 5 - 26 \\ & -7x = -21 \\ & x = 3 \end{aligned}$$

- c) Untuk $x = 3$ substitusikan ke salah satu persamaan

$$\begin{aligned} x = 3 & \text{ -----} \rightarrow 5x + y = 13 \\ & 5(3) + y = 13 \\ & 15 + y = 13 \\ & y = -2 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{(3, -2)\}$.

Contoh 3.2

Tentukan himpunan penyelesaian dengan cara substitusi dari sistem persamaan linier berikut!

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 2 \\ x - \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$$

Penyelesaian:

- a) Sedapat mungkin ubahlah koefisien-koefisien SPLDV tersebut dalam bilangan bulat.

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 2 \quad | \times 6 | \text{ menjadi } 3x - 4y = 12$$

$$x - \frac{1}{2}y = 4 \quad | \times 2 | \text{ menjadi } 2x - y = 8$$

- b) Nyatakan variabel satu dalam variabel lainnya.

$$2x - y = 8$$

$$2x - 8 = y \text{ atau } y = 2x - 8$$

Artinya variabel y dapat diganti dengan $(2x - 8)$

- c) Substitusikan:

$$y = 2x - 8 \quad \text{-----} \rightarrow \quad 3x - 4(2x - 8) = 12$$

$$3x - 8x + 16 = 12$$

$$-5x = 12 - 16$$

$$-5x = -4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

- d) Untuk $x = \frac{4}{5}$ substitusikan ke salah satu persamaan.

$$x = \frac{4}{5} \quad \text{-----} \rightarrow \quad y = 2x - 8$$

$$y = 2\left(\frac{4}{5}\right) - 8$$

$$y = -\frac{32}{5}$$

Jadi, himpunan penyelesaian HP = $\left\{\left(\frac{4}{5}, -\frac{32}{5}\right)\right\}$.

Contoh

3.3

Carilah dua bilangan terurut yang apabila dijumlahkan sama dengan 99.

Penyelesaian:

a) Misalkan x = bilangan pertama dan y = bilangan kedua.

b) Buatlah model matematikanya dari informasi di atas.

$$x + y = 99$$

$$y = x + 1 \quad (\text{bilangan kedua} = \text{bilangan pertama} + 1)$$

c) $y = x + 1$ artinya y dapat diganti dengan $(x + 1)$.

d) Substitusikan:

$$y = (x + 1) \text{ -----} \rightarrow x + y = 99$$

$$x + (x + 1) = 99$$

$$x + x + 1 = 99$$

$$2x + 1 = 99$$

$$2x = 99 - 1$$

$$2x = 98$$

$$x = 49$$

e) Substitusikan $x = 49$ untuk menemukan nilai y

$$x = 49 \text{ -----} \rightarrow y = x + 1$$

$$y = 49 + 1 = 50$$

Jadi, dua bilangan yang berurutan tersebut adalah 49 dan 50.



BERPIKIR KREATIF

Seorang petani beternak sapi dan bebek. Jumlah kepala hewan ternaknya 9 buah. Jumlah kaki hewan ternaknya 24 buah. Berapa banyak sapi dan bebek yang diternakinya.

PETUNJUK: Gunakan 9 koin mata uang untuk mewakili jumlah kepala hewan ternak dan 24 batang korek api sebagai wakil jumlah kaki hewan ternaknya. Pasangkan batang korek api ke koin mata uang untuk menemukan jawab atas masalah itu. Bolehkah memasang 3 batang korek api ke sebuah koin? Mengapa? Ceklah jawaban yang kamu temukan dengan menggunakan metode substitusi!

▶ Latihan 3.A

Himpunan Penyelesaian SPLDV - Substitusi

1. Tentukan penyelesaian setiap SPLDV berikut ini dengan cara substitusi.

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 4y = 31 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 6x - y = -15 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ x + 3y = -11 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x - y = 14 \\ 8x + 3y = 56 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 7x + 2y = -6 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 3x + 5y = -19 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} -2x + y = 11 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

2. Tentukan penyelesaian setiap SPLDV berikut ini dengan cara substitusi.

$$a) \begin{cases} 2x = y + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -3x = 4 - 8y \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2y = 3x + 19 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y = 3x + 10 \\ x = 7y - 10 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - 5 = 2y \\ 6y + 20 = 4x \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x - 10 = 4y \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

3. Tentukan penyelesaian setiap SPLDV berikut ini dengan cara substitusi.

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 5y - 8x = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3y - 5x = 7 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 8x + 3y = -3 \\ -9y - 4x = 5 \end{cases}$$

4. Tentukan penyelesaian setiap SPLDV berikut ini dengan cara substitusi.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{x+2}{2} + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{2x}{5} + \frac{3y}{2} = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{2} - 4 \\ 2x + y = -12 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{5x}{2} + 2y = 3 \\ -\frac{7x}{2} + y = -8 \end{cases}$$

5. Tentukan penyelesaian setiap SPLDV berikut ini dengan cara substitusi.

$$\text{a) } \begin{cases} 0,5x - 0,6y = -2 \\ 1,5x - 0,8y = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 0,2x + 0,5y = 2,5 \\ 0,3x + y = 4,5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 0,5x + 1,5y = 3,5 \\ -x + 1,5y = 6,5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 0,25x + 0,2y = 2 \\ 0,2x - 0,5y = -1,7 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 0,25x + y = 3 \\ -x + 1,5y = -1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 0,2x + 0,7y = 1,6 \\ 0,9x + 0,3y = 1,5 \end{cases}$$

6. Tentukan penyelesaian setiap SPLDV berikut ini dengan cara substitusi.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{8}{x} - \frac{2}{y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{2}{x} = -\frac{3}{y} + 2 \\ \frac{1}{x} = 3 - \frac{4}{y} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{6}{y} = -1 \\ \frac{1}{x} = -3 - \frac{8}{y} \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{3}{y} = \frac{29}{6} \\ \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = \frac{-8}{6} \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{y} \end{cases}$$

(Petunjuk: Misalkan $\frac{1}{x} = p$ dan $\frac{1}{y} = q$)

 **Problem Solving**



PERBANDINGAN UMUR

Perbandingan umur Fitri dan Rani empat tahun yang lalu adalah 10 : 1, Sepuluh tahun yang akan datang, perbandingannya menjadi 3 : 1. Berapa umur Fitri dan Rani sekarang?

“Pengobatan terbaik untuk pikiran yang lamban adalah mengubah rutinitasnya”



D. Himpunan Penyelesaian SPLDV - Cara Eliminasi



Berfikir Kreatif dan Kritis

Setiap huruf berikut ini mewakili bilangan dari 1 sampai 9. Temukan nilai dari tiap-tiap huruf hingga penjumlahan berikut ini benar

$$\text{BIG} + \text{JOKE} = \text{HAHA}$$

Tahukah kamu apa artinya eliminasi? Kata eliminasi berasal dari istilah Inggris eliminate, yang berarti “menghilangkan”. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dengan cara eliminasi berarti menghilangkan (*mengeliminasi*) salah satu variabel persamaan, dengan terlebih dahulu menyamakan koefisiennya (*jika belum sama*). Selanjutnya, lakukan pengurangan atau penjumlahan tergantung operasi mana yang mampu menghilangkan variabel yang dikehendaki itu.

Contoh

3.4

Temukan penyelesaian SPLDV berikut dengan cara eliminasi.

Penyelesaian:

- a) Susunlah kedua persamaan seperti berikut. Variabel-variabel sejenis pada kolom yang sama.

$$2p + q = -1$$

$$5p + 3q = -4$$

- b) Mengeliminasi variabel q (samakan koefisien q).

$$2p + q = -1 \quad | \times 3 | \quad \text{maka menjadi} \quad 6p + 3q = -3$$

$$5p + 3q = -4 \quad | \times 1 | \quad \text{maka menjadi} \quad 5p + 3q = -4 \quad -$$

$$p = -3 - (-4)$$

$$p = 1$$

- c) Mengeliminasi variabel p .

$$2p + q = -1 \quad | \times 5 | \Rightarrow 10p + 5q = -5$$

$$5p + 3q = -4 \quad | \times 2 | \Rightarrow 10p + 6q = -8 \quad -$$

$$-q = -5 - (-8)$$

$$q = -3$$

- d) Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{(1, -3)\}$.

Latihan 3.B

Himpunan Penyelesaian SPLDV - Eliminasi

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari SPLDV berikut dengan cara eliminasi:

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - y = -9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y = 7 \\ y + x = -1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x - 3y = -19 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - 4y = -9 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x + y = 8 \\ -x + 7y = 32 \end{cases}$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari SPLDV berikut dengan cara eliminasi:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 5 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 5 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$



Seorang ayah mengajak anaknya jalan-jalan ke gunung. Karena asyik menikmati pemandangan, anaknya tersandung batu dan jatuh, kakinya luka. "Aduuuuuhh!" serunya. Tiba-tiba ia mendengar kembali seruannya dari suatu tempat di gunung, "Aduuuuuhh!". Karena merasa aneh dan ingin tahu, si anak lalu berseru lantang, "Siapa kamu?". Kembali ia mendengar suara yang mengulang pertanyaannya, "Siapa kamu?". Si anak jengkel karena suara itu kembali mengulangi pertanyaannya. Dengan marah ia berkata, "Kamu pengecut!" Suara itu kembali mengulang seruannya, "Kamu pengecut!"



Si anak heran, lalu bertanya kepada ayahnya, "Mengapa bisa begitu?" Ayahnya tersenyum dan berkata, "Coba perhatikan baik-baik, nak!" Sesudah berkata begitu, si ayah berseru kepada gunung, "Saya kagum padamu!" Dan suara itu kembali terdengar, "Saya kagum padamu!" Si Ayah berseru sekali lagi "Kamu hebat!" Suara itu kembali terdengar, "Kamu hebat!"

Si anak heran. Ayahnya lalu menjelaskan, suara yang berulang itu disebut gema dan hidup juga seperti itu. Hidup memberikan kembali segala sesuatu yang kita katakan atau lakukan. Hidup kita adalah pantulan dari tindakan-tindakan kita. Jika kita ingin mendapatkan banyak kebaikan dan kasih sayang maka kitapun harus memberikan kebaikan dan kasih sayang pada sesama. Jika kita tekun meningkatkan kemampuan, kita akan menjadi orang yang tangguh.

Hidup memberikan kembali segala sesuatu yang kita berikan. Hidup bukan suatu kebetulan, tapi cerminan dari sikap dan perilaku kita. (Dari Kisah Inspirasional Tabloid Aura)

E. Sistem Persamaan Linier dengan Tiga Variabel

BENTUK umum sistem persamaan linier tiga variabel (SPLTV) adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ kx + ly + mz = n \\ px + qy + rz = s \end{cases}$$

dengan:

x, y, z adalah variabel-variabel

a, k, p adalah koefisien untuk variabel x

b, l, q adalah koefisien untuk variabel y

c, m, r adalah koefisien untuk variabel z

d, n, s adalah konstanta

Seperti halnya sistem persamaan linier dua variabel, penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel dapat dilakukan dengan cara *substitusi eliminasi*.

Ingat bahwa tidak semua sistem persamaan linier tiga variabel memiliki penyelesaian. Sebagaimana pada sistem persamaan linier dua variabel, bahwa pada tiga kemungkinan hubungan antara persamaan-persamaan linier tiga variabel tersebut. Oleh karena itu, kita perlu melakukan langkah substitusi atau eliminasi terlebih dahulu, sehingga dari sistem persamaan linier yang tiga variabel tersebut bisa kita peroleh persamaan linier dua variabel misalnya $gx + hy = i$ dan $tx + uy = v$. Kemudian, kita cari hubungan antara $g, h, i, t, u,$ dan v .

- i) Jika $\frac{g}{t} = \frac{h}{u} = \frac{i}{v}$ maka sistem persamaan linier tiga variabel tersebut tidak memiliki penyelesaian
- ii) Jika $\frac{g}{t} = \frac{h}{u} = \frac{i}{v}$ maka sistem persamaan linier tiga variabel tersebut tak berhingga
- iii) Jika $\frac{g}{t} \neq \frac{h}{u}$ maka sistem persamaan linier tiga variabel tersebut memiliki sebuah penyelesaian

Problem Solving



Dengan cara substitusi atau eliminasi kita bisa membawa sistem persamaan linier tiga variabel ke dalam persamaan dua variabel. Setelah itu, tentukan mana di antara ketiga sistem persamaan linier tiga variabel berikut, yang:

- a) Tidak memiliki penyelesaian
- b) Penyelesaiannya tak berhingga banyaknya
- c) Memiliki sebuah penyelesaian

i) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 12 \\ 3x + 5y - z = 11 \\ 4x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 10 \\ 4x + 5y + z = 20 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x - 2y + z = 11 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x + 2y - 2z = 16 \end{cases}$

Contoh 3.5

Dengan menggunakan metode substitusi, selesaikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 14 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 5x - 3y - z = 2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

- a) Terdapat tiga buah persamaan.
 - $2x - y + 4z = 14$ 1)
 - $3x + 2y + z = 6$ 2)
 - $5x - 3y - z = 2$ 3)

- b) Ubahlah persamaan (1) menjadi $y = 2x + 4z - 14$.
- c) Substitusikan $y = 2x + 4z - 14$ ke (2) diperoleh:
 $3x + 2y + z = 6$
 $3x + 2(2x + 4z - 14) + z = 6$
 $3x + 4x + 8z - 28 + z = 6$
 $7x + 9z = 34 \quad \dots\dots\dots 4)$
- d) Substitusikan $y = 2x + 4z - 14$ ke (3) diperoleh:
 $5x - 3(2x + 4z - 14) - z = 2$
 $5x - 6x - 12z + 42 - z = 2$
 $-x - 13z = -40$, atau
 $x + 13z = 40 \quad \dots\dots\dots 5)$
- e) Ubahlah (5) yaitu $x + 13z = 40$ menjadi $x = 40 - 13z$ substitusikan dalam persamaan (4):
 $7x + 9z = 34$
 $7(40 - 13z) + 9z = 34$
 $280 - 91z + 9z = 34$
 $-82z = 34 - 280$
 $-82z = -246$
 $z = 3$
- f) Untuk $z = 3$ substitusikan ke (5):
 $z = 3 \quad \dots\dots\dots \rightarrow x + 13z = 40$
 $x + 13(3) = 40$
 $x + 39 = 40$
 $x = 1$
- g) Untuk $x = 1$ dan $z = 3$ substitusikan ke (1)
 $x = 1, z = 3 \quad \dots\dots\dots \rightarrow 2x - y + 4z = 14$
 $2(1) - y + 4(3) = 14$
 $2 - y + 12 = 14$
 $y = 0$

Jadi, himpunan penyelesaian sistem persamaan di atas adalah $HP = \{(1, 0, 3)\}$.

“Jangan katakan semua yang kau ketahui, namun ketahuilah semua yang kau katakan”

Contoh 3.6

Dengan menggunakan metode eliminasi, selesaikan sistem persamaan berikut!

$$\begin{cases} x - y + 4z = 25 \\ x - 3y + z = -6 \\ 4x - 5y - z = -24 \end{cases}$$

Penyelesaian:

a) Terdapat tiga buah persamaan

$$\begin{array}{ll} x - y + 4z = 25 & \dots\dots\dots 1) \\ x - 3y + z = -6 & \dots\dots\dots 2) \\ 4x - 5y - z = -24 & \dots\dots\dots 3) \end{array}$$

b) Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2):

$$\begin{array}{r} x - y + 4z = 25 \\ x - 3y + z = -6 \quad | \times 4 | \text{ menjadi} \quad 4x - 12y + 4z = -24 - \\ \hline -3x + 11y = 49 \quad \dots\dots\dots 4) \end{array}$$

c) Eliminasi z dari persamaan (2) dan (3):

$$\begin{array}{r} x - 3y + z = -6 \\ 4x - 5y - z = -24 \\ \hline 5x - 8y = -30 \quad \dots\dots\dots 5) \end{array}$$

d) Eliminasi x dari persamaan (4) dan (5):

$$\begin{array}{r} -3x + 11y = 49 \quad | \times 5 | \text{ menjadi} \quad -15x + 55y = 245 \\ 5x - 8y = -30 \quad | \times -3 | \text{ menjadi} \quad -15x + 24y = 90 - \\ \hline 31y = 155 \\ y = 5 \end{array}$$

e) Untuk y = 5 substitusikan ke persamaan (5):

$$\begin{array}{l} y = 5 \quad \dots\dots\dots \rightarrow 5x - 8y = -30 \\ 5x - 40 = -30 \\ 5x = 10 \\ x = 2 \end{array}$$

Latihan 3.D

Himpunan Penyelesaian SPLTV

1. Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode substitusi!

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y - z = -7 \\ x + y - z = 0 \\ 5x + y + z = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y - 2z = -18 \\ x - 3y + 2z = 8 \\ 2x + y - 7z = -39 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 5z = 10 \\ 2x - 2y + 3z = 11 \\ 2x + y - 5z = -19 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 13 \\ 3x - y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x - y - z = 10 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 15 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ -5x - 3y + z = 24 \\ -7x - 2y + 3z = 39 \end{cases}$$

2. Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode eliminasi!

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - z = 6 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ 3x - 2y + z = 14 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + z = 9 \\ 3x - y + z = 8 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 4x - 2y + z = 11 \\ x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 17 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 10 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

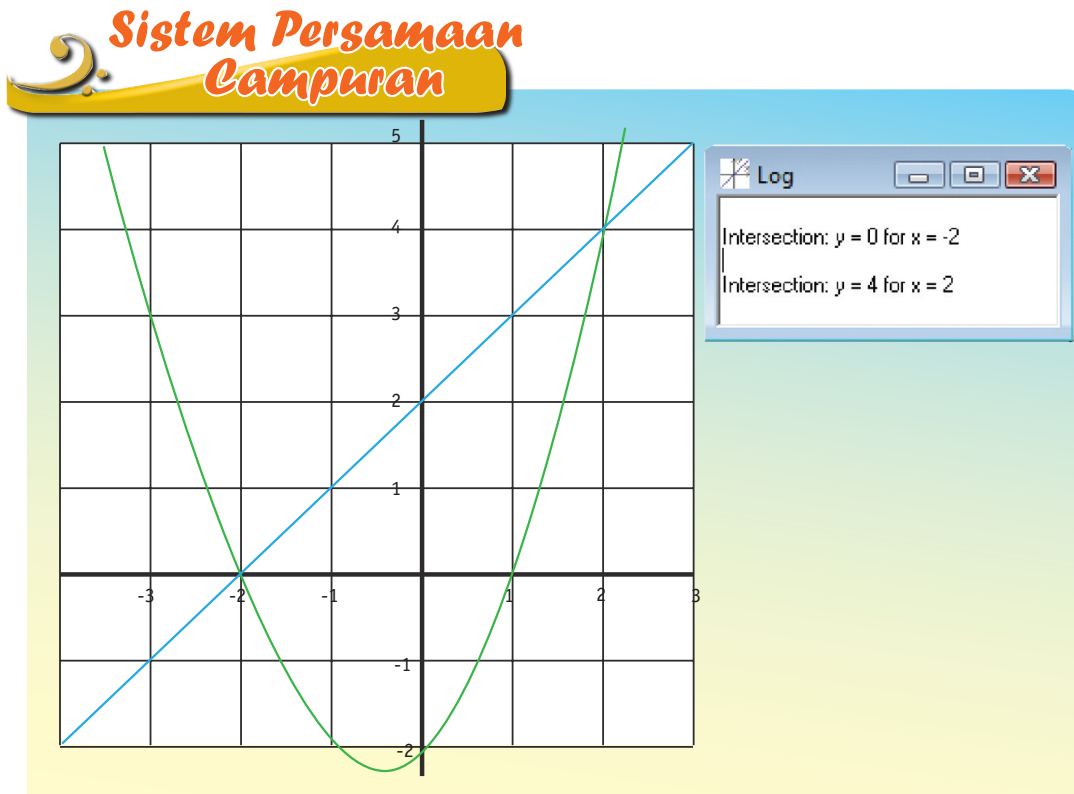


F. Sistem Persamaan Campuran Linier dan Kuadrat dalam Dua Variabel

Sejauh ini yang kita kaji adalah perpotongan linier dengan linier. Solusinya adalah sebuah titik (x, y) untuk sistem persamaan linier dua variabel dan (x, y, z) untuk sistem persamaan linier tiga variabel. Bagaimana penyelesaian sistem campuran linier dan kuadrat. Ambil sebuah contoh:

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Mari kita kaji sistem persamaan campuran ini dengan cara melukiskannya pada sistem koordinat kartesius dengan menggunakan kertas berpetak. Kita dapat melakukan eksplorasi dengan menggunakan *software equation grapher*.





Bagaimana cara menemukan penyelesaian sistem persamaan linier-kuadrat ini? Apakah semua sistem persamaan linier-kuadrat selalu memiliki penyelesaian?

Tinjaulah sistem persamaan linier dan kuadrat berikut!

a)
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = px + q \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = px + q \end{cases}$$

Pastilah dari sistem persamaan campuran tersebut dapat dibentuk suatu persamaan kuadrat baku dengan cara mensubstitusikan persamaan yang linier ke dalam persamaan kuadrat.

Substitusi $y = px + q$ ke dalam $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh:

$$\begin{aligned} px + q &= ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx - px + c - q &= 0 \\ ax^2 + (b - p)x + (c - q) &= 0 \end{aligned}$$

Nilai diskriminannya akan kita peroleh:

$$D = (b - p)^2 - 4 \cdot a \cdot (c - q)$$



Berikir Kreatif dan Kritis

Temukan nilai D dari sistem persamaan linier-kuadrat

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = px + q \end{cases}$$

- i) Jika $D = 0$ maka sistem persamaan linier-kuadrat memiliki satu penyelesaian
- ii) Jika $D > 0$ maka sistem persamaan linier-kuadrat memiliki dua penyelesaian atau dua titik potong
- iii) Jika $D < 0$, maka sistem persamaan tersebut tidak memiliki penyelesaian

“Hanya orang yang memiliki kepercayaan kepada dirinya sendiri yang dapat dipercayai oleh orang lain”

Contoh

3.7

Tentukan penyelesaian dari sistem campuran kuadrat dan linier berikut!

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

- a) Sederhanakan persamaan linier dan nyatakan variabel satu ke dalam variabel lainnya.

$$x - y = -2$$

$$y = x + 2$$

- b) Substitusikan

$$\begin{aligned} y = x + 2 & \text{ -----} \rightarrow y = x^2 + x - 2 \\ & x + 2 = x^2 + x - 2 \\ & x^2 - 4 = 0 \\ & x^2 - 2^2 = 0 \\ & (x + 2)(x - 2) = 0 \\ & x_1 = -2 \text{ atau } x_2 = 2 \end{aligned}$$

- c) Substitusikan nilai-nilai x untuk menemukan nilai y

$$\begin{aligned} \text{Untuk } x_1 = -2 & \text{ -----} \rightarrow y = x^2 + x - 2 \\ & y_1 = (-2)^2 + (-2) - 2 \\ & y_1 = 0 \end{aligned}$$

diperoleh sebuah titik potong $(-2, 0)$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } x_2 = 2 & \text{ -----} \rightarrow y = x^2 + x - 2 \\ & Y_2 = (2)^2 + (2) - 2 \\ & Y_2 = 4 \end{aligned}$$

diperoleh sebuah titik potong kedua yaitu $(2, 4)$

- d) Himpunan penyelesaian sistem campuran adalah $HP = \{(-2, 0), (2, 4)\}$. Coba bandingkan dengan grafik hasil software equation grapher di atas.

▶ Latihan 3.E

Sistem Persamaan Campuran Linier

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut!

a)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 7x - 12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 15 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 9x - 14 \end{cases}$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut!

a)
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 4 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ y = 5x - 6 \end{cases}$$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut!

a)
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 5 \\ 8x + y = 29 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 + 5x - 15 \\ 2x - y - 25 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 10 \\ 10x + 2y + 10 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 30 \\ x - y = -10 \end{cases}$$

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut!

a)
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 2 \\ 8x + y = 14 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 5 \\ 7x + y = 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = -3x^2 + 5x + 2 \\ 6x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = -5x^2 - 3 \\ 17x + y - 3 = 0 \end{cases}$$



G. Sistem Persamaan Kuadrat

Pada prinsipnya untuk menyelesaikan sistem persamaan kuadrat sama dengan menyelesaikan sistem persamaan linier dan kuadrat.

Bentuk umum sistem persamaan kuadrat adalah

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, & \text{dimana } a \neq 0 \\ y = px^2 + qx + r, & \text{dimana } p \neq 0 \end{cases}$$

dengan a , b , c , p , q , dan r bilangan riil.

Grafik dari sistem persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dan $y = px^2 + qx + r$ berupa dua buah kurva berbentuk parabola.

Titik potongnya merupakan penyelesaian dari sistem persamaan kuadrat-kuadrat tersebut. Akan tetapi dua buah parabola tidak selalu berpotongan. Ada empat kemungkinan hubungan yang terjadi antara grafik parabola tersebut, yaitu (a) berhimpitan, (b) berpotongan di dua titik, (c) berpotongan di satu titik dan (d) tidak berpotongan.

Penyelidikan terhadap hubungan antar kurva tersebut dapat dilakukan melalui tahap, pertama, mencari hubungan a , b , c , p , q , dan r .

- i) Jika $a = p$ dan $b \neq q$, maka kedua grafik parabola berpotongan di satu titik yang merupakan himpunan penyelesaiannya.
- ii) Jika $a = p$, $b = q$ dan $c \neq r$ maka kedua grafik parabola tidak berpotongan.
- iii) Jika $a = p$, $b = q$ dan $c = r$ maka kedua grafik parabola berimpit sehingga anggota himpunan penyelesaiannya tak berhingga.

Jika kedua persamaan kuadrat tidak memenuhi hubungan pada tahap pertama maka disarankan melakukan penyelidikan tahap kedua, yaitu menggunakan *uji diskriminan*.

$$y = ax^2 + bx + c \quad \dots\dots\dots 1)$$

$$y = px^2 + qx + r \quad \dots\dots\dots 2)$$

Substitusikan persamaan 1 ke persamaan 2 diperoleh:

$$ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$$

$$(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0 \quad \text{dimana } (a - p) \neq 0$$

Diskriminannya adalah:

$$D = (b - q)^2 - 4(a - p)(c - r)$$

- i) Jika $D > 0$ maka kedua grafik parabola berpotongan di dua titik yang merupakan himpunan penyelesaiannya.
- ii) Jika $D = 0$ maka kedua grafik parabola berpotongan di satu titik (bersinggungan) yang merupakan himpunan penyelesaian.
- iii) Jika $D < 0$, maka kedua grafik parabola tidak berpotongan sehingga tidak memiliki himpunan penyelesaian.

Contoh

3.8

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$$

Penyelesaian:

- a) Substitusikanlah $y = 9 - x^2$ ke $y = x^2 + 1$ hingga diperoleh

$$9 - x^2 = x^2 + 1$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 2$$

- b) Substitusikan $x = -2$ ke $y = 9 - x^2$

$$y = 9 - (-2)^2$$

$$y = 5$$

Diperoleh sebuah titik potong $(-2, 5)$

- c) Substitusikan $x = 2$ ke $y = 9 - x^2$

$$y = 9 - (2)^2$$

$$y = 5$$

Diperoleh sebuah titik potong satu lagi di $(2, 5)$

- d) Jadi, himpunan penyelesaian persamaan tersebut adalah $\{(-2, 5), (2, 5)\}$

Contoh

3.9

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + y^2 + 2x - 17 = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:

- a) Substitusikan persamaan $x^2 + y^2 = 20$ ke dalam

$x^2 + y^2 + 2x - 17 = 0$ diperoleh:

$$13 + 2x - 17 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

- b) Untuk $x = 2$ substitusikan ke $x^2 + y^2 = 13$

$$(2)^2 + y^2 = 13$$

$$4 + y^2 = 13$$

$$y^2 = 9$$

$$y = -3 \text{ atau } y = 3$$

- c) Diperoleh titik potong $(2, -3)$ dan $(2, 3)$. Jadi himpunan penyelesaiannya $HP = \{(2, -3) \text{ dan } (2, 3)\}$

Dapatkan kamu menemukan himpunan penyelesaian dari

$$\begin{cases} y = x^2 + 5x + 3 \\ y = -x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$

Mengapa?



Diskriminan, Belum Cukup!

Mengapa Belum Cukup dengan Diskriminan?

Eh Mat... tadi pak guru ngasih soal seperti ini. Adakah penyelesaian dari

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = x^2 + 4x \end{cases}$$

Aku jawab "ada" sebab

$$\begin{aligned} D &= (b - q)^2 - 4(a - p)(c - r) \\ &= (3 - 4)^2 - 4(1 - 1)(0 - 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Oleh karena $D > 0$ berarti kedua kurva berpotongan di dua titik. Kan ada dua penyelesaian? Eh... malah aku disalahkan oleh Pak guru. Lalu yang betul bagaimana Mat?



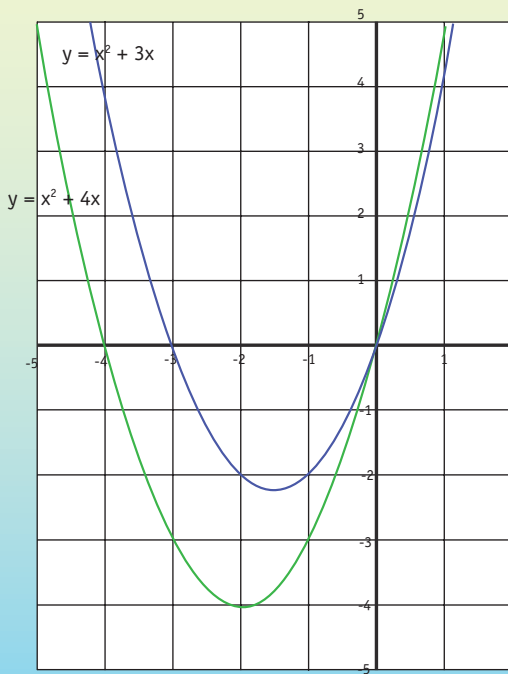
Kamu salah Dul..., untuk sistem persamaan kuadrat, tahapannya kamu harus mengecek dulu hubungan antara $a, b, c, p, q,$ dan r . Jangan langsung mendeteksi menggunakan diskriminan. Pada soal itu, $a = p$ dan $b \neq q$ berarti kedua kurva berpotongan di satu titik



Apa betul
Mat??!



Nah.., kalau kamu nggak percaya mari kita lihat kedua grafiknya dengan menggunakan software Equation grapher



Nah dengan menggunakan software ini tampak bahwa kedua parabola tersebut berpotongan di satu titik, walaupun $D > 0$



Kalau begitu penggunaan D dalam sistem persamaan kuadrat adalah pada "tahap kedua" ya? Tidak seperti pada sistem campuran.

"Ribuan kilo yang kau tempuh selalu diawali oleh satu langkah kecil..."

▶ Latihan 3.F

Sistem Persamaan Kuadrat dan Kuadrat

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan kuadrat berikut ini!

a)
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -x^2 - 10x - 11 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = x^2 + 4x - 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x^2 - 12x + 15 \end{cases}$$

2. Diketahui sistem persamaan
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3 \\ y = px^2 - 2px + p \end{cases}$$

Tentukan batas-batas nilai p agar sistem persamaan tersebut memiliki dua penyelesaian

3. Tentukan nilai m agar persamaan $y = mx^2 + 2x - 7$ dan $y = 3x^2 - 4x + 8$ tidak memiliki penyelesaian

4. Diketahui sistem persamaan kuadrat
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x - 5 \\ y = px^2 + x - 10 \end{cases}$$

a. Tentukan nilai p agar sistem persamaan kuadrat tersebut memiliki satu penyelesaian!

b. Tentukan himpunan penyelesaiannya

5. Diketahui sistem persamaan kuadrat
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + p \\ y = 3x^2 + ax + p \end{cases}$$

Tentukan nilai a agar sistem persamaan kuadrat tersebut memiliki penyelesaian tak berhingga.



H. Sistem Persamaan Linier dan Kuadrat dalam Kehidupan Sehari-hari

Sistem persamaan linier dan kuadrat memiliki peranan yang cukup penting dalam memecahkan sejumlah permasalahan sehari-hari yang terkait dengan, seperti, fungsi penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand*), mencari keuntungan maksimum (*maximim profit*) serta persoalan-persoalan terapan yang lain. Berikut adalah beberapa contohnya.

Contoh 3.10

Pabrik memproduksi dua jenis mobil. Mobil jenis A akan menghasilkan keuntungan setelah 500 mobilnya terjual, dan ketika menjual 1500 mobil A keuntungan yang diperoleh Rp200.000.000,00. Mobil B menghasilkan keuntungan Rp100.000,00 setiap satu unitnya. Berapa banyak mobil A dan B yang harus diproduksi supaya kedua mobil tersebut menghasilkan keuntungan yang sama besar?



Sumber: kalaniossullivan.com

Penyelesaian:

- a) Menemukan persamaan garis A

Misalkan banyaknya mobil adalah x_A dan keuntungan adalah y_A , sehingga garis A melalui $(500,0)$ dan $(1500,200000000)$

Rumus persamaan garis lurus yang melalui dua titik adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{200000000 - 0} = \frac{x - 500}{1500 - 500}$$

$$\frac{y}{200000000} = \frac{x - 500}{1000}$$

$$\frac{y}{200000000} = \frac{x - 500}{1000}$$

$$y_A = \frac{200000000}{1000}(x_A - 500)$$

$$y_A = 200000(x_A - 500)$$

b) Menemukan persamaan garis B.

Misalkan banyaknya mobil adalah x_B dan keuntungan adalah y_B

$$Y_B = 100000 x_B$$

c) Banyaknya mobil A dan B akan menghasilkan keuntungan yang sama

jika $y_A = y_B$

$$y_A = 200000(x_A - 500)$$

$$y_B = 100000 x_B$$

$$y_A = y_B \text{ akibatnya } x_A = x_B = x$$

$$200000 (x_A - 500) = 100000 x_B$$

$$200000x - 100000000 = 100000 x$$

$$100000 x = 100000000$$

$$x = 1000$$

Jadi, untuk menghasilkan keuntungan yang sama besar maka baik mobil A maupun mobil B harus diproduksi masing-masing 1000 buah.

Ceklah berapa besar keuntungannya!

Keseimbangan Pasar

Tiga komponen utama dalam teori ekonomi mikro yaitu tentang kajian keseimbangan pasar (*market equilibrium*) antara faktor permintaan (*demand*) dan penawaran (*supply*). Permintaan mengacu pada bagaimana seseorang atau keluarga membutuhkan barang atau

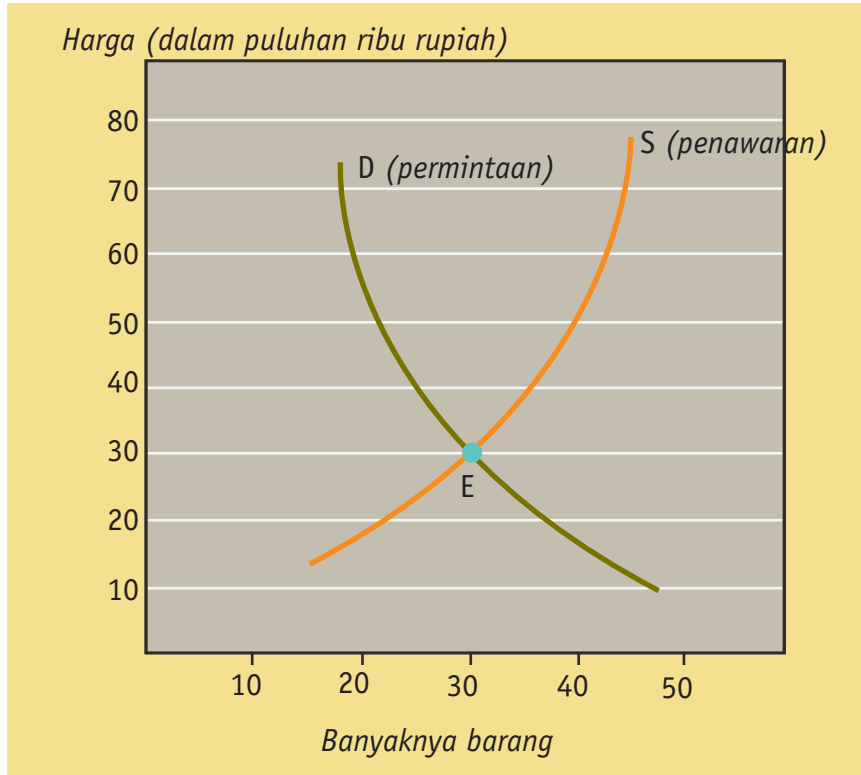
pelayanan. Sementara, penawaran mengacu pada bagaimana sebuah perusahaan atau industri memutuskan barang atau pelayanan mana yang akan ditawarkan. Keseimbangan pasar mengacu pada bagaimana pasar memungkinkan antara penawaran dan permintaan berinteraksi.

Dalam analisa matematika, jika permintaan dan penawaran adalah dua buah grafik maka interaksinya adalah *titik potong* yang dalam istilah ekonomi lebih dikenal dengan *keseimbangan pasar*.



Sumber: www.bpurwoko_sataff_ugm.ac.id

Perhatikan ilustrasi berikut!



Contoh

3.11

Jika y adalah harga (dalam ratusan ribu rupiah) dan x adalah banyaknya barang. Tentukan keseimbangan pasar jika diketahui fungsi penawaran $y = x^2 - 3$ dan fungsi permintaan $y = -x + 3$

Penyelesaian:

- a) Keseimbangan pasar adalah titik potong yang berada di kuadran pertama. Mengapa demikian? Substitusikan persamaan linier ke kuadrat.

$$\begin{aligned}
 y = -x + 3 & \dots\dots\dots \rightarrow y = x^2 - 3 \\
 -x + 3 & = x^2 - 3 \\
 x^2 + x - 6 & = 0 \\
 (x - 2)(x + 3) & = 0 \\
 x & = 2 \text{ atau } x = -3
 \end{aligned}$$

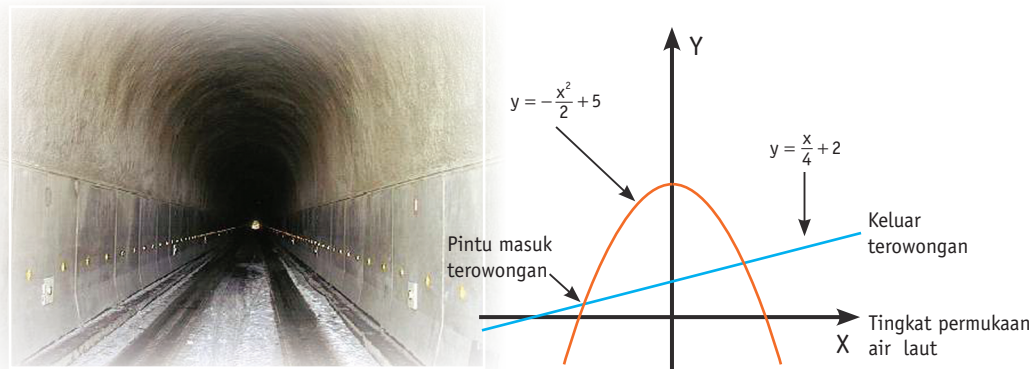
b) Nilai x yang memenuhi adalah $x = 3$. Mengapa? Substitusikan!

$$x = 2 \text{ -----} \rightarrow \begin{aligned} y &= -x + 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Titik potong $(2,1)$. Artinya keseimbangan pasar dicapai pada banyak barang 2 buah dengan harga Rp100.000,00

Soal-soal Kontekstual

- Seorang teknisi merencanakan untuk membuat terowongan yang menembus sebuah gunung ditunjukkan pada sketsa berikut ini.



Sumber: www.gizmodo.com.au

Persamaan gunung dan terowongannya telah diberikan. Pada ketinggian berapakah di atas permukaan air laut pintu masuk dan pintu ke luar terowongan tersebut?

- Sebuah kereta api (sebut saja kereta 1) meninggalkan stasiun A dan bergerak menuju stasiun B dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Setengah jam kemudian kereta api yang lain (sebut saja kereta 2) meninggalkan stasiun A dan berjalan searah dengan kereta api pertama dengan kecepatan rata-rata 70 km/jam.



Sumber: www.japaneselifeestyle.com

- a. Berapa waktu yang diperlukan kereta api yang kedua untuk menyusul kereta api yang pertama?
- b. Berap jarak kedua kereta api tersebut saat bertemu terhadap stasiun A?

3. Ali dan Fahmi akan mengendarai sepeda. Ali mengendarai sepeda dengan kecepatan rata-rata 10 km/jam, sementara Fahmi mengendarai dengan kecepatan rata-rata 12 km/jam. Ali meninggalkan rumah pada jam 10 pagi, sementara Fahmi menyusul di belakangnya 15 menit kemudian dan berusaha untuk mengejarinya. Kapan Fahmi bisa menyusul Ali?



4. Dua kota berjarak 165 km. Sebuah mobil dan bis mulai berjalan dengan arah berlawanan dari masing-masing kota tersebut. Mobil berjalan 10 km/jam lebih cepat dari bis. Jika mobil dan bis saling bersimpangan satu sama lain dalam waktu 1,5 jam setelah mereka berangkat. Temukan kecepatan masing-masing!
5. Dua buah buku dan tiga batang pensil harganya Rp7.000,00. Lima buah buku dan dua batang pensil harganya Rp12.000,00. Berapakah harga sebuah buku dan sebuah pensil?
6. Jika y adalah harga (dalam ratusan ribu rupiah) dan x adalah banyaknya barang. Tentukan keseimbangan pasar dari sistem permintaan dan penawaran berikut, serta lukiskan grafiknya pada kertas berpetak!

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 2x + 5y = 41 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 5y = 40 \\ x + 2y = 23 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x - y = -4 \\ 7x + y = 24 \end{cases}$$

 **Investigasi**

Tanpa melukiskan grafiknya terlebih dahulu, dapatkan kamu menemukan ciri-ciri fungsi penawaran dan ciri-ciri fungsi permintaan pada persamaan linier dua variabel?



7. Diketahui y adalah harga (*dalam ratusan ribu rupiah*) dan x adalah banyaknya barang. Tentukan keseimbangan pasar dari sistem permintaan dan penawaran berikut, serta lukiskan grafiknya pada kertas berpetak!

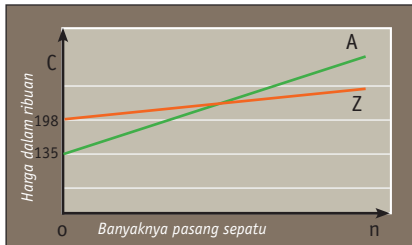
a)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = -2x + 20 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = -3x + 20 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 7x + y = 24 \end{cases}$$

9. Grafik di bawah menyajikan informasi sebagai berikut. Pada sebuah perusahaan tertentu, biaya produksi n_1 pasang sepatu orang dewasa ditentukan dengan $C_1 = 198 + 15n_1$ dan biaya produksi n_2 pasang sepatu anak-anak ditentukan dengan $C_2 = 135 + 22n_2$.



- Manakah garis, A atau Z, yang menggambarkan biaya produksi sepatu orang dewasa dan biaya produksi sepatu anak-anak?
- Tentukan jumlah sepatu yang harus diproduksi sedemikian sehingga biaya produksi kedua sepatu sama!



Sumber: www.myanmar.gov.mm



Seringkali pikiran kita sendirilah yang membatasi apa yang bisa dan apa yang tidak bisa kita raih. Sementara tindakan kita akan sangat tergantung pikiran kita. Jika pikiran kita membatasi, maka tindakan kita juga terbatas, dan tentu saja sukses kita juga akan kita batasi. Berpikirlah di luar kotak. (Anonim)

Rangkuman

1. Bentuk umum sistem persamaan linier dua variabel:
$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

Dimana: a, p = koefisien variabel x

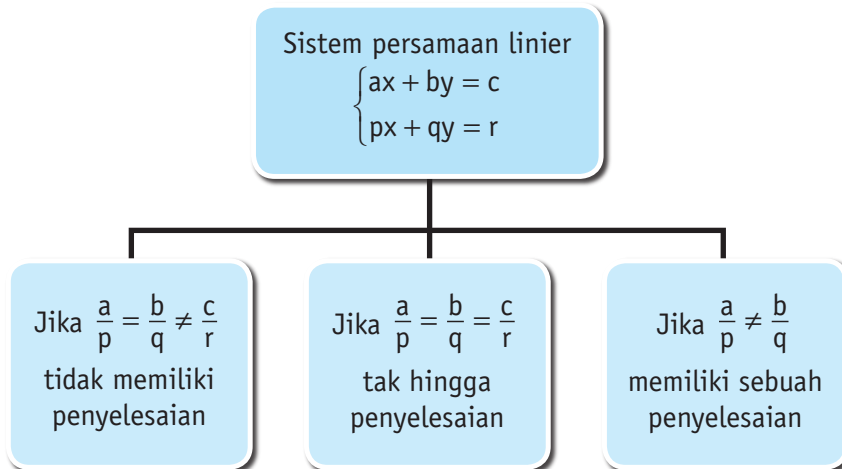
b, q = koefisien variabel y

c, r = konstanta

Jika berlaku $ax_1 + by_1 = c$ dan $px_1 + qy_1 = r$ maka (x_1, y_1) merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linier tersebut di atas dan dituliskan sebagai $HP = \{(x_1, y_1)\}$

2. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dapat ditemukan dengan metode substitusi, eliminasi dan determinan.

3.



4. Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel (SPLTV) adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ kx + ly + mz = n \\ px + qy + rz = s \end{cases}$$

dengan

x, y, z adalah variabel-variabel

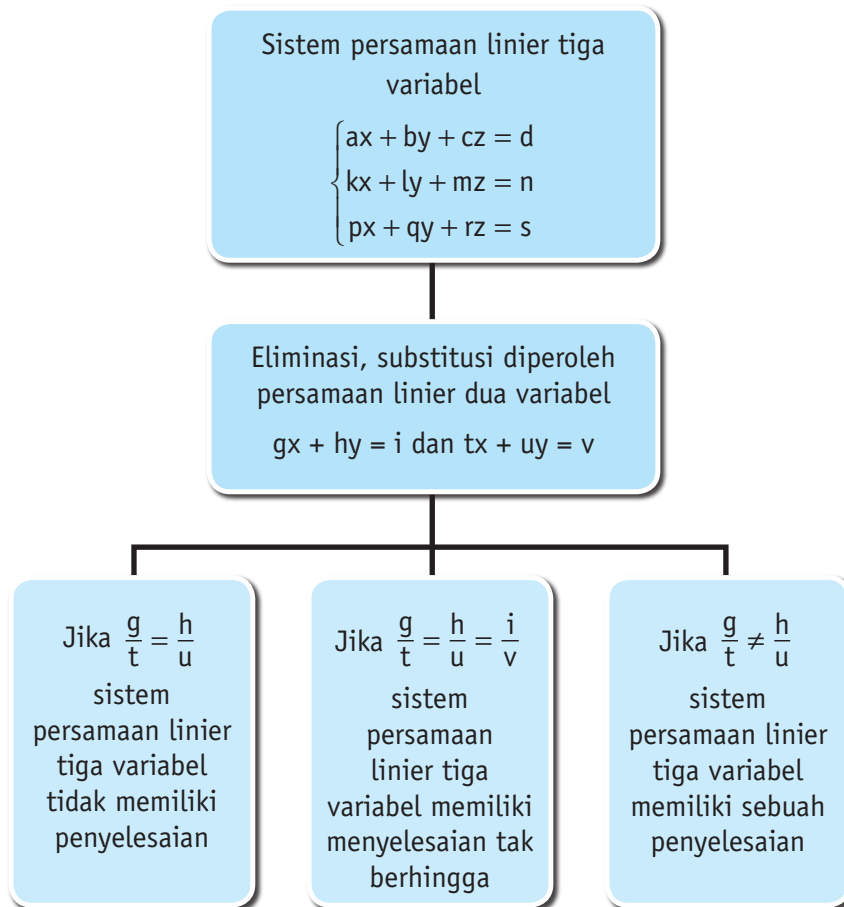
a, k, p adalah koefisien untuk variabel x

b, l, q adalah koefisien untuk variabel y

c, m, r adalah koefisien untuk variabel z

d, n, s adalah konstanta

5.

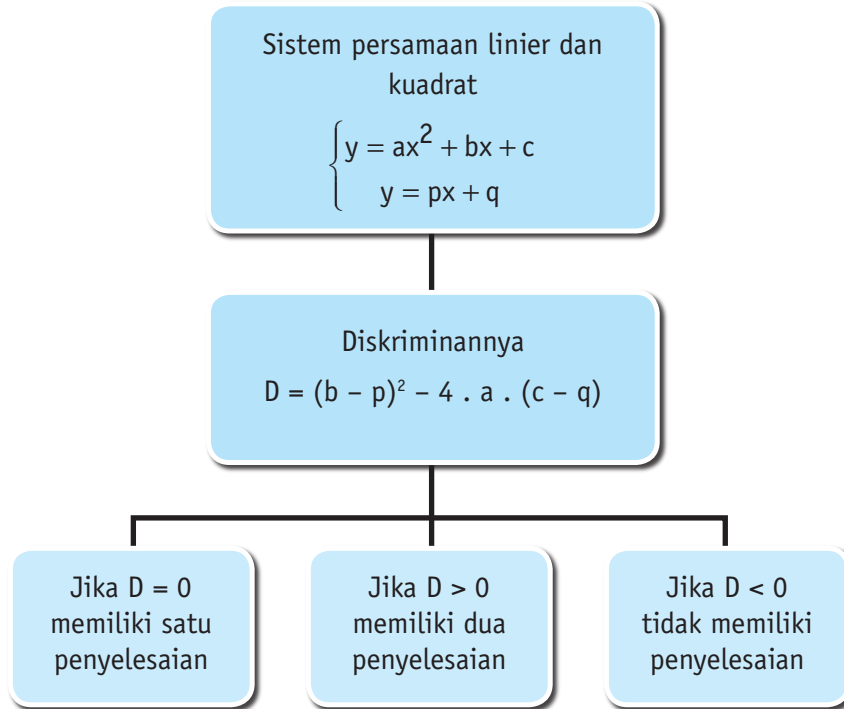


6. Sistem persamaan linier campuran antara persamaan linier dan kuadrat secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ y = px^2 + qx + r \end{cases}$$

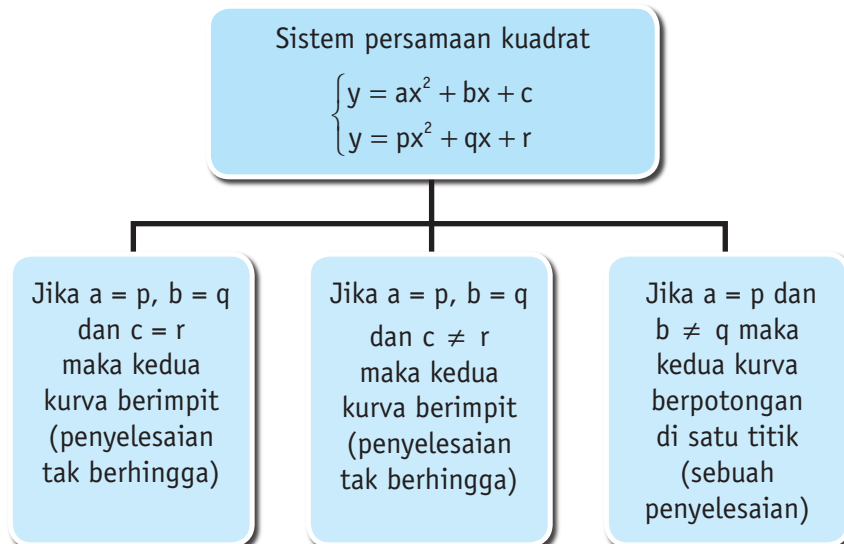
Himpunan penyelesaian dapat ditemukan diantaranya dengan cara substitusi.

7.

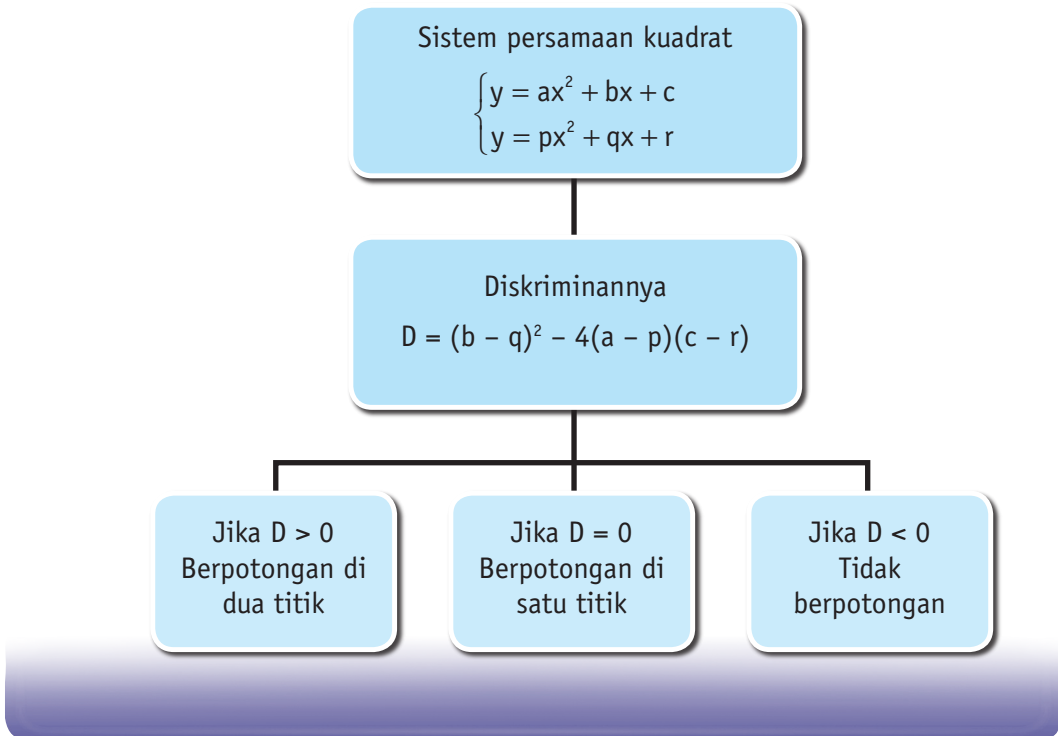


8. Dua langkah mengidentifikasi kedudukan kurva parabola dan parabola

Langkah pertama: Uji koefisien dan konstanta



Langkah kedua: Uji diskriminan



Soal Pilihan Ganda

1. Himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} 13x + 7y = 8 \\ 7x + 13y = 32 \end{cases}$ adalah....
 - a. $\{(1, 3)\}$
 - b. $\{(2, 1)\}$
 - c. $\{(3, -1)\}$
 - d. $\{(4, 1)\}$
 - e. $\{(-1, 3)\}$

2. Jika maka nilai $x + y = \dots$
 - a. 2
 - b. 10
 - c. 4
 - d. -4
 - e. -10

3. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} \frac{2x-5}{3} + \frac{y+7}{2} = 6 \\ x+y-5 = 2(x-y) \end{cases}$ adalah....
- a. $\{(2, 3)\}$ d. $\{(3, 4)\}$
b. $\{(4, 3)\}$ e. $\{(7, -1)\}$
d. $\{(3, 2)\}$

4. $(3, 5)$ adalah penyelesaian sistem persamaan linier

$$\begin{cases} px - qy = 4 \\ 2qy + 3px = -13 \end{cases}, \text{ maka nilai } \frac{6p+2q}{3} \text{ sama dengan....}$$

- a. $\frac{-4}{3}$ d. $\frac{-1}{3}$
b. -2 e. -1
c. $\frac{-2}{3}$
5. Nilai x yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} 4^{x+y} = 64 \\ 2^{2x-y} = 8 \end{cases}$ adalah....
- a. 3 d. 0
b. 2 e. -3
c. 1

6. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ x-y+2z = 5 \\ 2x-2y-z = -5 \end{cases}$ adalah....
- a. $\{(3, 2, 1)\}$ d. $\{(-1, -2, -3)\}$
b. $\{(1, 2, 3)\}$ e. $\{(-1, 2, 3)\}$
c. $\{(1, 3, 2)\}$

7. Jika (x_0, y_0, z_0) merupakan penyelesaian sistem persamaan

$$\begin{cases} x+z = 3 \\ 2y-z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases} \text{ maka } x_0 + y_0 + z_0 = \dots$$

- a. 3 d. 8
b. 4 e. 11
c. 6

8. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} p + q + r = 12 \\ 2p - q + 2r = 12 \\ 3p + 2q + r = 8 \end{cases}$ adalah $\{(p, q, r)\}$ dengan $p : q : r = \dots$
- a. 1 : 2 : 3
b. 1 : 2 : 4
c. 2 : 3 : 4
d. 2 : 3 : 5
e. 3 : 4 : 5
9. Jika x , y , dan z himpunan penyelesaian sistem persamaan linier $\begin{cases} 3x - 4y + z = -2 \\ -2x + 3y + 2z = 10 \\ x + 5y - 3z = 2 \end{cases}$ maka nilai $\frac{x+y}{z}$ sama dengan
- a. -5
b. -3
c. 0
d. 1
e. 2
10. Diketahui parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(1, -2)$, $(-2, 7)$ dan $(3, 12)$, maka persamaan parabola tersebut adalah....
- a. $y = 2x^2 - x - 3$
b. $y = 2x^2 - x + 3$
c. $y = 2x^2 + x - 3$
d. $y = 2x^2 + x + 3$
e. $y = -2x^2 + x + 3$
11. Himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ adalah
- a. $\{(-1, 1), (-2, -4)\}$
b. $\{(-1, 1), (-2, 4)\}$
c. $\{(1, 1), (2, 4)\}$
d. $\{(-1, -1), (-2, -4)\}$
e. $\{(1, -1), (2, -4)\}$
12. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 6x - y + 5 = 0 \end{cases}$ adalah $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Nilai $x_1 + x_2 = \dots$
- a. 1
b. 5
c. 6
d. 7
e. 11

13. Sistem persamaan $2x + 3y = 8$ dan $x + y = 3$ mempunyai D_x , D_y dan D berturut-turut adalah
- | | |
|----------------|----------------|
| a. $-1, -1, 2$ | d. $-2, 1, 1,$ |
| b. $-1, -2, 1$ | e. $-2, 1, -1$ |
| c. $-1, 2, -1$ | |
14. Harga 4 buku dan 2 pensil Rp2.200,00 dan harga 3 buku dan 3 pensil Rp2.400,00. Maka harga 1 buku dan satu pensil berturut-turut adalah....
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a. Rp300,00 dan Rp500,00 | d. Rp500,00 dan Rp100,00 |
| b. Rp200,00 dan Rp700,00 | e. Rp500,00 dan Rp300,00 |
| c. Rp400,00 dan Rp300,00 | |
15. Perbandingan antara umur A dan B sekarang adalah 3 : 4. Perbandingan umur mereka 6 tahun yang akan datang adalah 7 : 9. Perbandingan umur mereka 6 tahun yang lalu adalah....
- | | |
|----------|-----------|
| a. 2 : 3 | d. 8 : 11 |
| b. 5 : 7 | e. 11:13 |
| c. 8 : 9 | |
16. Diketahui jumlah dua bilangan sama dengan 16 dan jumlah kuadratnya sama dengan 178, maka selisih dari kedua bilangan tersebut adalah....
- | | |
|----------------|----------------|
| a. 6 atau -6 | d. 12 atau -12 |
| b. 8 atau -8 | e. 14 atau -14 |
| c. 10 atau -10 | |
17. Jumlah dari angka-angka dari sebuah bilangan yang terdiri atas dua angka adalah 10. Apabila angkanya ditukar terjadi bilangan baru. Bilangan yang baru dibentuk adalah dua kali bilangan asal kurang 1. Bilangan tersebut adalah....
- | | |
|-------|-------|
| a. 28 | d. 82 |
| b. 64 | e. 73 |
| c. 37 | |
18. Sebuah bilangan terdiri atas tiga angka. Jumlah angka pertama dan ketiga adalah angka kedua. Jumlah angka pertama dan kedua adalah 4 lebihnya dari angka ketiga. Sedangkan jumlah angka

kedua dan ketiga adalah 6 kali angka pertama. Maka bilangan itu adalah....

- a. 242
- b. 253
- c. 275
- d. 363
- e. 385

Soal Uraian

19. Keliling sebuah persegi panjang sama dengan 98 cm. Jika panjang persegi panjang 6 kali lebarnya. Hitunglah luas persegi panjang itu?
20. Sebuah bilangan terdiri atas dua angka. Selisih angka satuan dan puluhan sama dengan 3. Jika posisi angka ditukar maka nilainya 20 kurangnya dari dua kali bilangan semula. Berapakah jumlah bilangan mula-mula dengan bilangan sekarang?
21. Sebuah perahu menempuh jarak 875 m. Pada saat berangkat menentang arus sungai dapat ditempuh selama 35 menit. Pada saat pulang jarak itu dapat ditempuh dalam waktu 25 menit. Hitunglah kecepatan arus sungai pada saat itu?
22. Sebuah pekerjaan dapat dikerjakan oleh 5 orang terampil dalam dalam waktu 8 hari. Tetapi jika dikerjakan oleh 8 orang setengah terampil akan selesai dalam waktu 9 hari. Berapa hari pekerjaan itu akan selesai jika dikerjakan oleh 1 orang terampil dan 3 orang setengah terampil secara bersama-sama?
23. Sepuluh tahun yang lalu umur Ali sama dengan dua kali umur Budi. 5 tahun yang akan datang umur Ali sama dengan $\frac{3}{2}$ kali umur Budi. Berapakah umur Ali dan Budi saat ini?