2

PERSAMAAN KUADRAT DAN FUNGSI KUADRAT

"Dan pada sisi Allah-lah kunci-kunci semua yang ghaib, tidak ada yang mengetahuinya kecuali Dia sendiri, dan Dia mengetahui apa yang di daratan dan di lautan, dan tiada sehelai daun pun yang gugur melainkan Dia mengetahuinya (pula), dan tidak jatuh sebutir bijipun dalam kegelapan bumi, dan tidak sesuatu yang basah atau yang kering, melainkan tertulis dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfudz)". (QS. Al-Anaam : 59)

Sumber: sportsillustrated.cnn.com

TAHUKAH kamu mengapa benda-benda di ruang angkasa "*senantiasa*" beredar pada garis edarnya? Menurut ilmu fisika, karena adanya "*gaya gravitasi*". Gaya inilah yang menyebabkan benda yang kita lempar ke atas kembali lagi ke bawah. Bola golf yang dipukul dan membentuk "*lintasan melengkung*" juga akibat dari gaya ini. Pernahkah kamu berpikir apa yang bakal terjadi seandainya Allah SWT tidak menciptakan gaya gravitasi ini?

Sekarang pecahkanlah persoalan ini. Sebuah bola golf dipukul dari dasar sebuah bunker seperti ditunjukkan oleh gambar di samping. Ketinggian h meter bola di atas tanah dinyatakan dengan rumus $h = 10t - 5t^2 - 1$, dengan t detik adalah waktu bola terbang.

a. Berapa kedalaman bunker?
b. Kapan bola sejajar dengan bibir bunker?
c. Kapan bola berada pada ketinggian 4 meter?

Standar Kompetensi

Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan dan fungsi kuadrat serta pertidaksamaan kuadrat

Kompetensi Dasar

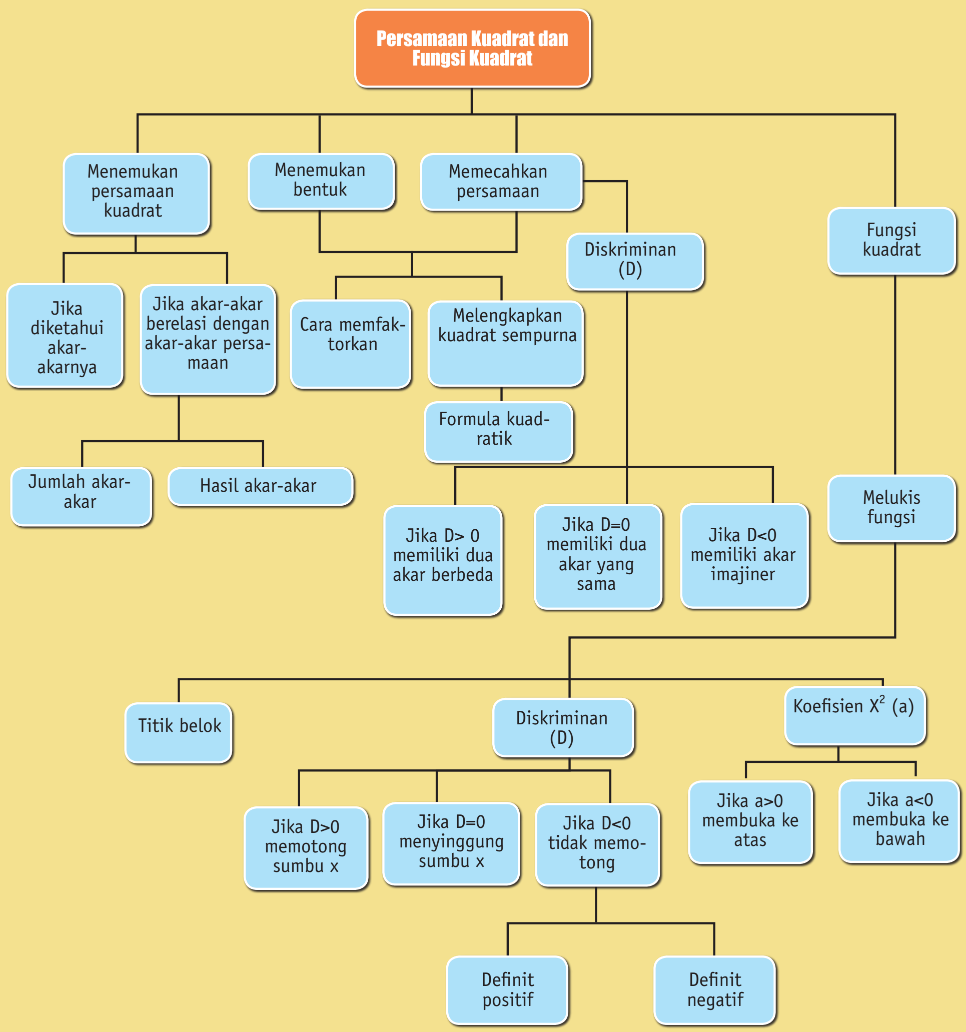
1. Memahami konsep fungsi.
2. Menggambar grafik fungsi aljabar sederhana dan fungsi kuadrat.
3. Menggunakan sifat dan aturan tentang persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.
4. Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.
5. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan/atau fungsi kuadrat.
6. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan/atau fungsi kuadrat dan penafsirannya.

Indikator

Setelah mempelajari pokok bahasan dalam bab ini, kamu diharapkan mampu:

1. Membedakan relasi yang merupakan fungsi dan yang bukan fungsi.
2. Mengidentifikasi jenis-jenis dan sifat-sifat fungsi.
3. Menyelidiki karakteristik grafik fungsi kuadrat dari bentuk aljabarnya.
4. Menggambar grafik fungsi kuadrat.
5. Menentukan definit positif dan definit negatif.
6. Membuat grafik fungsi aljabar sederhana.
7. Menentukan akar-akar persamaan kuadrat.
8. Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat.
9. Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.
10. Membedakan jenis-jenis akar persamaan kuadrat.

Peta Konsep



Kata Kunci

Fungsi
Jenis fungsi
Karakteristik grafik
Himpunan penyelesaian
Menyususun persamaan kuadrat
Bukan fungsi
Sifat fungsi
Definit positif
Akar persamaan kuadrat
Jenis-jenis akar
Definit negatif

SEBELUM mengkaji persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat, marilah kita baca dan kaji bersama Al-Qur'an Surah Al-Anaam ayat 59 berikut ini.

۞ وَعِندَهُۥ مَفَاتِحُ ٱلۡغَيۡبِ لَا يَعۡلَمُهَآ إِلَّا هُوَۚ وَيَعۡلَمُ مَا فِي ٱلۡبَرِّ
وَٱلۡبَحۡرِۚ وَمَا تَسۡقُطُ مِن وَرَقَةٍ إِلَّا يَعۡلَمُهَا وَلَا حَبَّةٖ فِي ظُلُمَٰتِ
ٱلۡأَرۡضِ وَلَا رَطۡبٖ وَلَا يَابِسٍ إِلَّا فِي كِتَٰبٖ مُّبِينٖ ٥٩

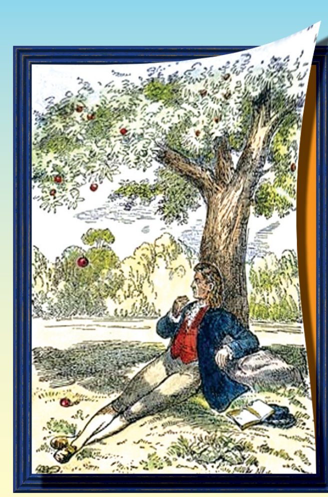
Artinya:
Dan pada sisi Allah-lah kunci-kunci semua yang ghaib, tidak ada yang mengetahuinya kecuali Dia sendiri, dan Dia mengetahui apa yang di daratan dan di lautan, dan tiada sehelai daun pun yang gugur melainkan Dia mengetahuinya (pula), dan tidak jatuh sebutir biji-pun dalam kegelapan bumi, dan tidak sesuatu yang basah atau yang kering, melainkan tertulis dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfudz)".

(QS. Al-An'am : 59)

Investigasi

Pernahkah kamu melihat buah yang jatuh dari pohonnya? Kemanakah arah jatuhnya buah itu? Mengapa demikian? Ya, benar. Buah itu jatuh ke bawah karena adanya gaya gravitasi yang merupakan gaya "*sunatullah*" di muka bumi dan benda-benda langit yang lainnya.

Gaya gravitasi ini, pertama kali diselidiki oleh Sir Isaac Newton pada tahun 1687, menyatakan bahwa setiap partikel di jagat raya ini menarik partikel yang lain, yang besarnya gaya tarik tergantung dari perkalian masa dua partikel tersebut dibagi dengan kuadrat jarak



Sumber: cache.eb.com

antar kedua benda tersebut. Dirumuskan sebagai F= GMm/d2 dimana F adalah kekuatan grafitasi, G adalah tetapan yang dikenal dengan konstanta universal gravitasi, M dan m masing-masing adalah massa dari kedua obyek tersebut.

Nah tugasmu sekarang adalah tendanglah bola melambung ke arah temanmu. Dengan gravitasi ini bola itu pasti akan jatuh ke tanah lagi. Lalu sketlah lintasan bola itu pada selembar kertas? Berbentuk apakah lintasan bola tersebut? Mengapa demikian?

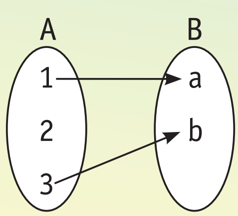
Kuis Apersepsi

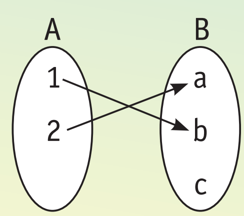
Sudah siapkah kamu berpetualang di belantara "Persamaan dan Fungsi Kuadrat" ini? Untuk mengukur apakah diri kita ini termasuk orang yang sudah siap atau tidak, kita bisa menguji diri sendiri lewat kuis apersepsi ini.

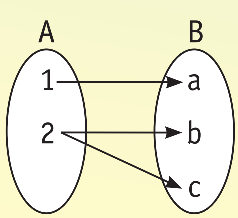
1. Faktor dari bentuk aljabar $x^2 - 5x + 6$ adalah....
   a. $(x - 1)$ dan $(x - 6)$
   b. $(x + 1)$ dan $(x + 6)$
   c. $(x - 2)$ dan $(x - 3)$
   d. $(x + 2)$ dan $(x + 3)$

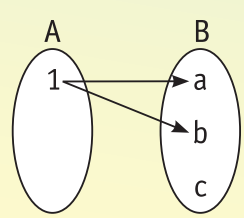
2. Hasil dari $(x + 7)$ dan $(x - 2)$ adalah....
   a. $x^2 - 5x - 14$
   b. $x^2 + 5x - 14$
   c. $x^2 - 9x - 14$
   d. $x^2 + 9x - 14$

3. Berikut yang merupakan fungsi atau pemetaan f: $A \longrightarrow B$ adalah....

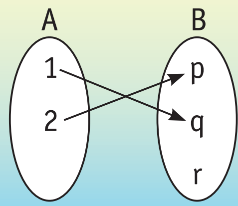
   a.
   

   c.
   

   b.
   

   d.
   

4. Himpunan daerah hasil atau range dari fungsi berikut ini adalah....



a. {p, q, r}
b. {p, q}
c. {1, 2}
d. {q, r}
e. {2}

A. Fungsi dan Bukan Fungsi

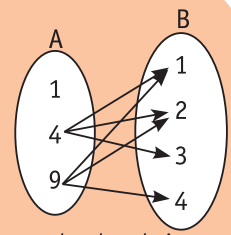
Pada saat SMP/MTs kamu sudah mempelajari tentang persamaan kuadrat. Di bagian ini kamu akan mengkaji dan memperdalam persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat. Namun, sebelumnya perhatikan ilustrasi berikut ini.

Utami sedang merencanakan membuat poster dengan luas gambar 50 dm^2. Batas gambar ke sisi atas dan bawah kertas adalah 4 dm sedangkan batas kiri dan kanan adalah 2 dm. Dapatkah kamu menentukan ukuran kertas sehingga luas kertas yang digunakan oleh Utami adalah sekecil mungkin?

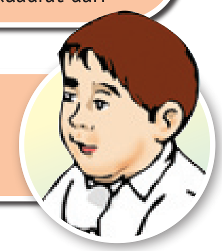
Relasi & Pemetaan

Tahukah kamu, apa bedanya antara relasi dan pemetaan itu?

Nih..tak buatkan relasi "lebih besar dari" ya ...
4 di A "lebih besar dari" 1, 2, dan 3 di B
9 di A "lebih besar dari" 1, 2, 3 dan 4 di B
Jadi, 4 di A dihubungkan dengan 1, 2, dan 3 di B
9 di A dihubungkan dengan 1, 2, 3 dan 4 di B
Lihatlah diagram ini, Dul!

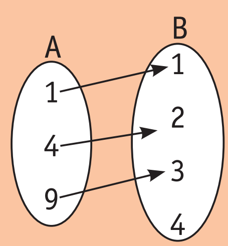


kuadrat dari



Nah kalau relasi "kuadrat dari" seperti apa?

Kita kan tahu Dul, kalau
1 di A adalah "kuadrat dari" 1di B
4 di A adalah "kuadrat dari" 2 di B
9 di A adalah "kuadrat dari" 3 di B
Jadi, 1 dihubungkan ke 1
4 dihubungkan ke 2
9 dihubungkan ke 3
Perhatikan diagram berikut ini, Dul!



kuadrat dari

Tanya lagi boleh nggak Mat? Mana di antara dua "relasi" itu, yang merupakan "pemetaan" atau "fungsi" dan mana yang bukan?

Relasi "lebih besar dari" bukan pemetaan atau bukan fungsi, sebab ada anggota 1 di A yang tidak punya tepat satu bayangan (peta) di B. Bisakah kau temukan alasan lain, Dul?

Aku tahu Mat. Anggota 4 di A memiliki 3 bayangan di B. Itu *tidak boleh*. Harus satu dan hanya satu bayangan saja. Baru itu namanya "fungsi".

Kalau untuk relasi "kuadrat dari" , *setiap anggota* di A memiliki *tepat satu* bayangan (peta) di B. Nah, itu baru namanya "pemetaan" atau "fungsi"

Nah, sekarang aku semakin jelas. Apa itu relasi? Dan, apa itu pemetaan atau fungsi? Dan perlu dicatat, bahwa *tidak semua relasi* mesti merupakan pemetaan atau fungsi. Benar kan Mat?

Untuk diingat

Suatu fungsi f, atau suatu pemetaan f, dari himpunan A ke himpunan B, ialah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen (anggota) dari A dengan tepat satu elemen dari B.

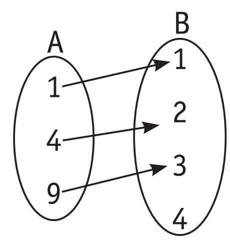
Kita menulis $f : A \longrightarrow B$, dibaca: "f memetakan A ke B"

Jika f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu elemen $y \in B$, kita bisa mengatakan bahwa "y peta dari x oleh f".

Berarti kata kuncinya:
Setiap dan **tepat satu**

Elemen y yang merupakan peta dari x, dapat dituliskan sebagai f(x). Dengan demikian kita bisa menuliskan fungsi $f : x \longrightarrow y$ sebagai $f : x \longrightarrow f(x)$

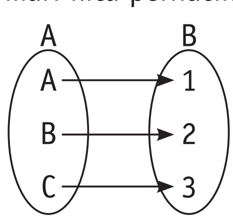
Mari kita perhatikan kembali fungsi "*kuadrat dari*" sebagaimana yang telah dieksplorasi oleh si Dul dan si Mat.



kuadrat dari

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain). Himpunan B dinamakan daerah kawan (kodomain). Himpunan semua peta di B dinamakan daerah hasil (range). Dalam contoh di atas daerah asalnya ialah {1, 4, 9}, daerah kawannya {1, 2, 3, 4} dan daerah hasilnya ialah {1, 2, 3}.

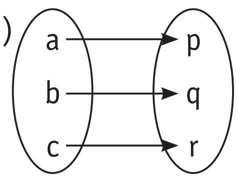
Sekarang, mari kita perhatikan relasi berikut.

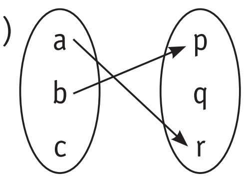


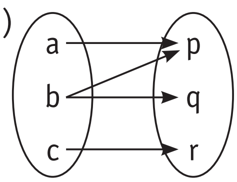
Relasi yang memetakan dari A ke B ini adalah "pemetaan khusus". Anggota-anggota dari dua himpunan dipasangkan sehingga setiap elemen dari A dikawankan dengan satu elemen dari B, demikian juga sebaliknya, maka dikatakan bahwa himpunan A dan himpunan B berada dalam korespondensi satu-satu.

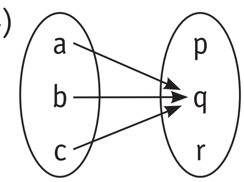
Contoh 2.1

Nyatakanlah apakah tiap-tiap diagram berikut merupakan suatu fungsi dari A = {a, b, c} ke dalam B = {p, q, r} atau tidak!

1)


2)


3)


4)


Penyelesaian:

a. Relasi (1) dan (4) merupakan pemetaan atau fungsi sebab setiap elemen di A dipetakan ke tepat satu elemen di B. Relasi (1) lebih sering dikenal sebagai korespondensi satu-satu Relasi (4) sebagai fungsi konstan.

b. Relasi (2) bukan pemetaan atau fungsi. Karena ada anggota A yaitu c yang tidak dipetakan ke anggota B.

c. Relasi (3) bukan pemetaan atau fungsi sebab ada anggota A yaitu b yang dipetakan sebanyak dua kali (seharusnya sekali saja). Elemen b dipetakan ke p dan juga ke q.

Ranting muda akan lurus jika kau luruskan, sementara kayu tua tak mungkin lagi kau bengkokkan

(***Anonim***)

Contoh 2.2

Berikut adalah pasangan yang memetakan A = {1, 2, 3} ke B = { p, q, r}. Manakah di antara pasangan-pasangan berikut ini yang merupakan fungsi?

i) {(1, p), (2, p), (3, p)}
ii) {(1, p), (1, q), (1, r)}
iii) {(1, p), (2, q), (1, r)}
iv) {(1, p), (2, p), (3, r)}

Penyelesaian:

a. Pasangan pada (i) dan (iv) merupakan fungsi karena memasangkan setiap anggota dalam A tepat dengan satu anggota B.
b. Pasangan pada (ii) dan (iii) **bukan** merupakan fungsi karena ada anggota dari A yang dipetakan ke B lebih dari satu kali. Tahukah kamu, anggota manakah itu?

Contoh 2.3

Fungsi h(x) = 2x + 1 memetakan dari A = {–1, 0, 1, 2} ke B = {–2, –1, 0, 1, 3, 5}. Tentukan daerah asal, daerah hasil, dan daerah kawannya?

Penyelesaian:

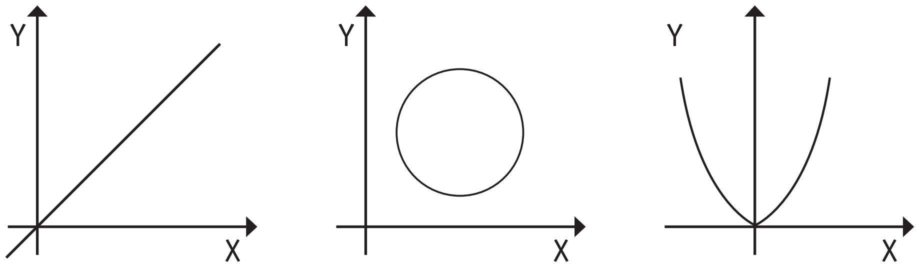
a. Daerah asalnya adalah A = {–1, 0, 1, 2}
b. Daerah hasil dapat ditemukan dengan cara mensubstitusikan anggota-anggota dari daerah asal yaitu A = {–1, 0, 1, 2} ke fungsi h(x) = 2x + 1

x = –1	h(–1) = 2(–1) + 1 = –1
x = 0	h(0) = 2(0) + 1 = 1
x = 1	h(1) = 2(1) + 1 = 3
x = 2	h(2) = 2(2) + 1 = 5

   Jadi, daerah hasilnya adalah R = {–1, 1, 3, 5}
c. Daerah kawannya adalah B = {–2, –1, 0, 1, 3, 5}

Contoh 2.4

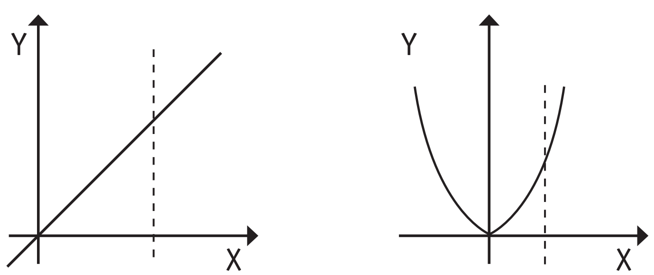
Bilangan-bilangan di sumbu X merupakan daerah asal dan bilangan-bilangan di sumbu Y merupakan daerah kawan. Manakah grafik berikut ini yang merupakan fungsi?



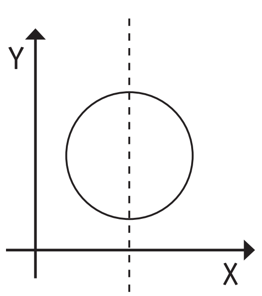
(i) (ii) (iii)

Penyelesaian:

a. Grafik (i) dan (iii) merupakan fungsi karena setiap anggota di sumbu X memiliki hanya satu bayangan di Y. Buktinya adalah ketika kita menarik garis sejajar sumbu Y, maka garis itu akan memotong grafik "hanya" di satu titik saja.



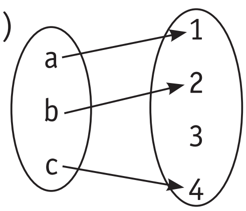
b. Grafik (ii) bukan kurva sebab "ada" bilangan di sumbu X yang memiliki dua peta pada bilangan di sumbu Y. Buktinya adalah ketika kita menarik garis sejajar sumbu Y maka "ada" garis yang memotong grafik tersebut di dua titik.

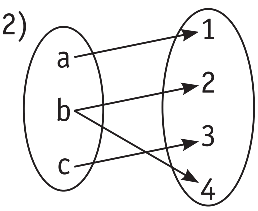


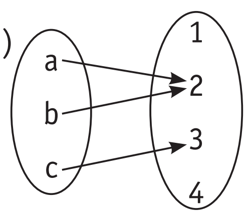
Latihan 2.A

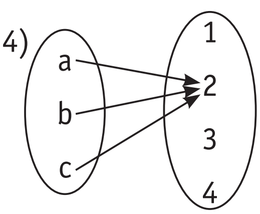
Fungsi dan Bukan Fungsi

1. Nyatakanlah apakah tiap-tiap diagram berikut merupakan suatu fungsi dari A = {a, b, c} ke dalam B = {1, 2, 3, 4} atau tidak!

1)


2)


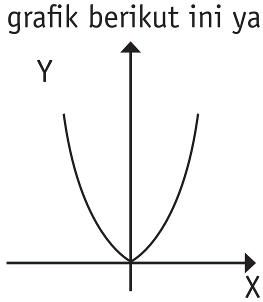
3)


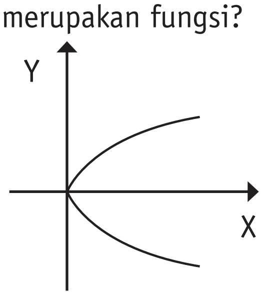
4)


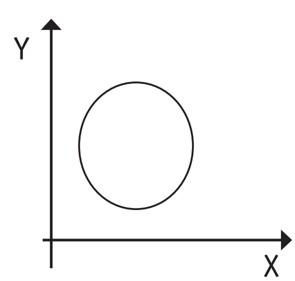
2. Berikut adalah pasangan yang memetakan A = {a, b, c} ke B = { k, l, m, n}. Manakah di antara pasangan-pasangan berikut ini yang merupakan fungsi?
   i) {(a, k), (b, l), (c, m), (b, n)}
   ii) {(a, k), (b, l), (c, n)}
   iii) {(a, n), (b, n), (c, n)}
   iv) {(a, k), (b, k), (c, k)}

3. Fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 1$ memetakan dari A = {0, 1, 2} ke B = { 1, 2, 4, 7, 9, 10}. Tentukan daerah asal, daerah hasil, dan daerah kawannya?

4. Bilangan-bilangan di sumbu Y merupakan daerah asal dan bilangan-bilangan di sumbu X merupakan daerah kawan. Manakah grafik berikut ini yang merupakan fungsi?







B. Tentang Aljabar

Tahukah kamu jika orang Mesir telah mampu menyelesaikan persamaan berderajat satu lebih dari 4000 tahun yang lalu? Mereka telah menemukan penyelesaian persamaan $ax + b = 0$ ialah $x = \frac{b}{a}$, secara geometris atau grafik, persamaan itu digambarkan dalam sebuah garis lurus.


Sumber: www.logoi.com

Jika tinggi sebuah piramida dikalikan dengan 5, kemudian ditambah 5 meter, maka hasilnya sama dengan 500 meter. Dapatkah kamu tentukan berapa tinggi piramida itu?

Adapun persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ telah diselesaikan oleh orang Islam dengan formula kuadratik atau yang lebih populer dengan "**rumus abc**" sekitar abad ke 7 M. Masih seperti apakah masyarakat Indonesia pada abad itu? Tengoklah buku sejarahmu! Rumus kuadratik yang digunakan oleh umat untuk memecahkan persamaan kuadrat tersebut adalah sebagai berikut:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Berbagai bentuk seperti *lingkaran*, *ellips*, parabola dan hiperbol, adalah wujud-wujud geometri bagi persamaan kuadrat dalam dua variabel, yang juga telah dikaji oleh orang-orang Islam sekitar abad ke 7 M tersebut.

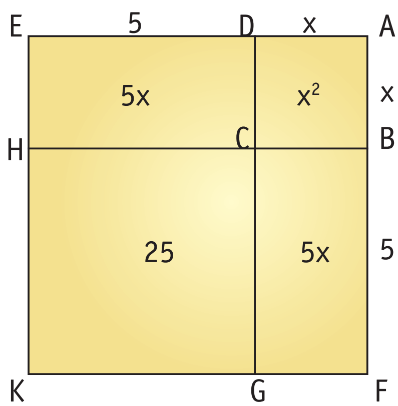
Al-Khwarizmi, abad 8 M, telah mencoba mengelompokkan persamaan kuadrat ke dalam 5 jenis:

1) $ax^2 = bx$
2) $ax^2 = c$
3) $ax^2 + bx = c$
4) $ax^2 + c = bx$
5) $ax^2 = bx + c$

Al-Khwarizmi menganggap a, b, c adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan a = 1.

Paradigma Al-Khwarizmi persamaan kuadratik $x^2 + 10x = 39$

Marilah kita lihat fakta sejarah yang ditorehkan oleh Al Khwarizmi terkait persamaan kuadrat jenis ketiga. Contoh permasalahan yang ia angkat adalah bagaimana mencari akar atas bentuk kuadrat jenis ke 3 yaitu $x^2 + 10x = 39$. Solusi terhadap permasalahan ini, ia tunjukkan secara "cerdas" dengan mengubah bentuk-bentuk aljabar ke dalam ujud geometri yang menakjubkan, yang belum pernah terfikirkan sebelumnya.



Mula-mula ia buat persegi ABCD dengan sisi AB = x

Ia panjangkan AD ke E dan AB ke F. Ia buat panjang DE = DF = $\frac{1}{2}(10) = 5$. Kemudian, ia lengkapkan persegi AFKE dengan memanjangkan DC ke G dan BC ke H. Selanjutnya "luas persegi" AFKE ia dinyatakan sebagi:

$$x^2 + 10x + 25$$

Tantangan Matematika

Dari proses kotak sempurna (*perfect square*) inilah bentuk "*kuadrat sempurna*" terlahirkan. Seperti:

$x^2 + 10x + 25$

$x^2 + 8x + 16$

$x^2 - 6x + 9$

Dapatkah kau temukan bentuk kuadrat sempurna yang lainnya? Tunjukkan bagaimana proses kelahirannya?

Persamaan kuadrat ini, selanjutnya, sering dikenal sebagai "*kuadrat sempurna*".

Ketika Khwarizmi mencoba mentransformasi bentuk persamaan kuadrat $x^2 + 10x = 39$ ke dalam ujud kuadrat sempurnanya, maka ia memerlukan kehadiran bilangan "tertentu" yang akan menjadikan bentuk $x^2 + 10x$ menjadi kuadrat sempurna. Tahukan kamu, bilangan berapakah itu? Perhatikan proses berikut!

$x^2 + 10x = 39$

Untuk menjadi kuadrat sempurna $x^2 + 10x$ harus ditambahkan dengan bilangan 25. Mengapa? Agar persamaan tetap seimbang nilainya, maka Khwarizmi juga menambahkan bilangan itu pada ruas sebelah kanannya, sehingga tercipta bentuk berikut ini.

$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

$x^2 + 10x + 25 = 64$

$(x + 5)^2 = 64$

$(x + 5)^2 = \pm\sqrt{64}$

$x + 5 = \pm 8$

$x_1 = +3$ atau $x_2 = -8$

Dari mana ya angka 25 pada persamaan itu?

$x^2 + 10x + 25$ adalah bentuk kuadrat sempurna yang "identik dengan" **luas persegi sempurna** dengan panjang sisi $(x + 5)$. Luasnya adalah $(x + 5)(x + 5)$ atau $(x + 5)^2$ maka $x^2 + 10x + 25$ dapat dinyatakan oleh Khwarizmi sebagai $(x + 5)^2$

Kecerdasan pemikiran Khwarizmi ini, mampu menembus ruang dan waktu. Terbukti pemikiran Khwarizmi tentang aljabar tetap hidup dari generasi ke generasi. Di belahan dunia manapun, aljabar menjadi bahan kajian yang tetap menggairahkan di sekolah dan madrasah. Pemikiran Khwarizmi juga telah menyusup dan mewarnai peradaban manusia karena sisi aplikatif realistis dari ilmu aljabar itu sendiri untuk peradaban umat manusia.

Eh..sudah tahu belum, kalau...
Algiebar berasal *al-jabr*
Almachabel berasal *al-muqabalah*
Nah.. ini kan bukti kontribusi ilmuwan Islam dalam matematika

Abad 16 M, dunia Barat mulai mulai menggunakan kata *algiebar* dan *almachabel*. Kata algiebar dan almachabel merupakan terjemah dari karya Khwarizmi di tahun 820 M yang berjudul **Al-Jabr wa al-Muqabalah** (*The science of cancellation and reduction*) perkataan ini bermakna penghilangan dan pengurangan. Dalam buku **Khulasah al-Hisab** (*Ringkasan aritmatika*) karya Baha Uddin (1600 M) dijelaskan ada perbedaan yang menyolok antara proses al-jabr dan proses *al-Muqabalah*. Perhatikan dengan seksama perbedaan kedua proses tersebut.

Jika diberi	$x^2 + 5x + 4 = 4 - 2x + 5x^3$
Proses al-jabr menghasilkan	$x^2 + 7x + 4 = 4 + 5x^3$
Proses al-Muqabalah menghasilkan	$x^2 + 7x = 5x^3$

C. Menemukan Bentuk Kuadrat

Bentuk Kuadrat

Dapatkah kamu memberi contoh bentuk kuadrat?

Tahukah kamu jika bentuk kuadrat terjadi ketika dua bentuk linier dikalikan? Perhatikan:

$$(3x + 2)(2x - 5)$$

Untuk menemukan bentuk kuadrat dari perkalian ini, marilah kita kaji "skema proses" berikut ini.

Untuk diingat

i) Kalikan suku pertama pada kurung pertama dengan semua suku pada kurung kedua

ii) Kalikan suku kedua pada kurung pertama dengan semua suku pada kurung kedua

$$(3x + 2)\ (2x - 5)$$

Hasil dari tiap-tiap perkalian di atas adalah sebagai berikut:

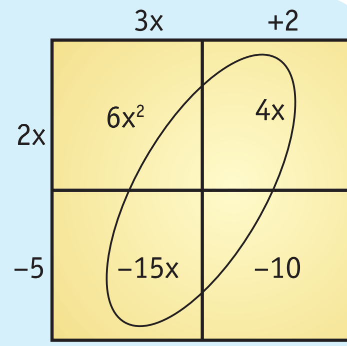
1) $6x^2$ 2) $-15x$ 3) $4x$ 4) 10

Bagian (2) bisa dijumlahkan dengan bagian (3) menjadi $-15x + 4x = -11x$ sehingga kita peroleh $6x^2 - 11x + 10$

Bentuk Kuadrat

Adakah cara lain untuk menemukan hasil perkalian dua bentuk linier?

Nah..., aku akan gunakan "perseginya Al-Khwarizmi" untuk temukan bentuk kuadrat itu. Perhatikan kerjaanku ini ya...

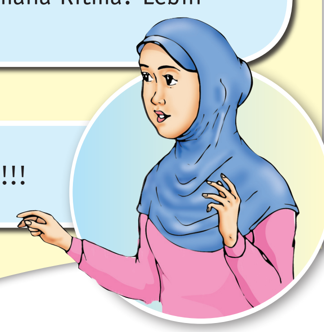


Hasilnya adalah

$\mathbf{6x^2 + 4x - 15x - 10 = 6x^2 - 11x - 10}$

Mula-mula kita urai 3x + 2 menjadi 3x dan + 2. Letakkan di bagian atas persegi al-Khwarizmi. Demikian juga dengan bentuk (2x −5), kita urai ke dalam 2x dan −5, lalu kita letakkan pada sisi lainnya. Kemudian, kalikan kedua sisi tersebut dengan menuliskan hasilnya di dalam persegi itu. Jumlahkan suku-suku yang sejenis, ternyata diperoleh hasil $6x^2 - 11x - 10$. Bagaimana Ritma? Lebih mudah kan?

Cerdas juga kamu Tika!!!



Contoh 2.5

Tentukan hasil perkalian berikut ini!

a) $(2x - 5)(5x - 7)$

b) $(2x - 4)^2$

c) $-3(x - 7)(2x + 1)$

Penyelesaian:

a) $(2x - 5)(5x - 7) = 10x^2 - 14x - 25x + 35$
$= 10x^2 - 39x + 35$

b) $(2x - 4)^2$ artinya $(2x - 4)(2x - 4)$
$(2x - 4)(2x - 4) = 4x^2 - 8x - 8x + 16$
$= 4x^2 - 16x + 16$

c) $-3(x - 7)(2x + 1) = -3\ (2x^2 + x - 14x - 7)$
$= -3\ (2x^2 - 13x - 7)$
$= -6x^2 + 39x + 21$

Contoh 2.6

Sederhanakan bentuk $(x - 7)(x + 2) - (2x - 1)(x + 4)$

Penyelesaian:

$(x - 7)(x + 2) - (2x -1)(x + 4)$
$= (x^2 + 2x - 7x -14) - (2x^2 + 8x - x - 4)$
$= (x^2 - 5x - 14) - (2x^2 + 7x - 4)$
$= x^2 - 5x - 14 - 2x^2 - 7x + 4$
$= -x^2 - 12x - 10$

Contoh 2.7

Tentukan hasil perkalian sekawan $(5x + 3)(5x - 3)$

Penyelesaian:

$(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 - 15x + 15x - 9$
$= 25x^2 - 9$

Cara cepat: (suku pertama)^2 – (suku kedua)^2
$= (5x)^2 - (3)^2$
$= 25x^2 - 9$

Latihan 2.A

Menemukan Bentuk Kuadrat

1. Tentukan hasil perkalian dari
   a) $(2x + 6)(x + 5)$
   b) $(3x + 1)(4x - 3)$
   c) $(5x - 7)(5x + 2)$
   d) $(8x - 3)(6x - 1)$
   e) $(x + 4)(7x - 9)$
   f) $(x + 6)(x + 15)$
   g) $(6x - 13)(2 - 3x)$
   h) $(5 - x)(6 - x)$
   i) $(x - 9)(9x - 1)$
   j) $(4x + 21)(x - 3)$

2. Tentukan hasil perpangkatan (kuadrat sempurna) berikut ini.
   a) $(2x + 3)^2$
   b) $(3x - 5)^2$
   c) $(6x + 1)^2$
   d) $(7x - 6)^2$
   e) $(x - 8)^2$
   f) $(x + 13)^2$
   g) $(-2x + 9)^2$
   h) $(2x + 9)^2$
   i) $(4 - 3x)^2$
   j) $(6 - x)^2$

3. Tentukan hasil perkalian berikut. Gunakan kaidah atau cara cepat untuk menemukan hasil perkalian sekawan.
   a) $(2x - 6)(2x + 6)$
   b) $(3x + 5)(3x - 5)$
   c) $(6x + 1)(6x - 1)$
   d) $(2x - 9)(2x + 9)$
   e) $(11x + 3)(11x - 3)$
   f) $(x - 12)(x + 12)$
   g) $(x + 6)(x - 6)$
   h) $(7 - 2x)(7 + 2x)$
   i) $(1 - x)(1 + x)$
   j) $(5x + 1)(5x - 1)$

4. Tentukan hasil perkalian berikut.
   a) $2(x + 6)(3x + 5)$
   b) $3(x - 4)(2x + 7)$
   c) $-4(x + 2)(2x - 5)$
   d) $3(4x - 9)(2x - 1)$
   e) $8(3x - 1)(4x - 1)$
   f) $-7(2x + 3)(5x - 10)$
   g) $4(4 - x)(7 - x)$
   h) $-5(7x - 4)(2 - x)$
   i) $a(2x + 9)(x - 6)$
   j) $-b(8 - 2x)(x + 4)$

5. Kalikan dan sederhanakan.
   a) $(x - 9)(x + 2) + (x + 4)(x - 4)$
   b) $(3x + 7)(2x - 1) + (4x - 3)(3x - 4)$
   c) $2(x + 5)2 + 5(2x + 7)(x - 3)$
   d) $(x - 12)(x + 12) - 3(x + 1)(x + 5)$
   e) $4(x - 3)(3x + 5) - 2(2x + 1)2$
   f) $6(2x - 5)(2x + 5) - (x - 6)(x + 6)$
   g) $4 (2x + 1)(4x + 7) + 7 (5x +1)(3x - 5)$

D. Memfaktorkan Bentuk Kuadrat

Kita sudah bergelut dengan persoalan cara menemukan bentuk kuadrat dari hasil perkalian dua bentuk linier. Sekarang kita akan melakukan sebuah proses yang boleh dibilang sebagai proses *kebalikan* menemukan bentuk kuadrat yaitu proses "*pemfaktoran*".

Pernahkah kamu melakukan proses pemfaktoran dari bentuk kuadrat yang sudah diketahui? Untuk menyegarkan kembali ingatan kita akan hal itu, marilah kita lakukan kembali proses pemfaktoran dari bentuk kuadrat. Jenis pemfaktoran yang paling mudah adalah pemfaktoran yang melibatkan faktor *umumya* (*kelipatan*). Contoh:

Bentuk $5x^2 - 10x - 15$ dapat dinyatakan sebagai $5(x^2 - 2x - 3)$
Oleh karena itu faktor-faktor dari $5x^2 - 10x - 15$ adalah 5 dan $x^2 - 2x - 3$

Nah ...kalau sudah ketemu dua bilangan yang dimaksud, maka faktor-faktornya dapat ditemukan dengan mudah yaitu $(x + 1)$ dan $(x - 3)$. Kalau teka-tekinya nggak terjawab, maka kita harus cari cara lain. Betul kan ustadz?

Contoh 2.8

Nyatakan bentuk $3x^2 + 3x - 60$ ke dalam faktor-faktornya.

Penyelesaian:

a. Temukan faktor kelipatannya, yaitu:
   $3x^2 + 3x - 60 = 3(x^2 + x - 20)$

b. Fokuskan pemikiran pada $x^2 + x - 20$
   Bentuk $x^2 + x - 20$ dapat difaktorkan menjadi $(x - 4)(x + 5)$

c. Jadi faktor-faktor dari $3x^2 + 3x - 60$ adalah 3, $(x - 4)$ dan $(x + 5)$

Oleh karena pada bentuk $x^2 + x - 20$ nilai $a = 1$ maka aku harus ajukan pertanyaan ini pada diriku **"Adakah dua bilangan jika dijumlahkan sama dengan 1 (nilai b) dan jika dikalikan sama dengan -20 (nilai c)?"**

Oh ya..., ketemu! Bilangan itu adalah (-4) dan $(+5)$. Berarti faktor-faktornya adalah $(x - 4)$ dan $(x + 5)$. Nah, aku bisa!

Kuadrat Sempurna (perfect square)

Nah, tahukah kamu apa yang dimaksud dengan bentuk "kuadrat sempurna" atau *perfect square*? Untuk bisa memahami hal itu, marilah kita ikuti suasana pengajaran di kelas ini.

Untuk diingat

Misalkan diketahui bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ jika berlaku $\sqrt{a} \times \sqrt{c} \times 2 = |b|$ maka bentuk kuadrat itu adalah bentuk kuadrat sempurna.

Catatan: $|b|$ dibaca *"harga mutlak dari b"*.
Misal $|2| = 2$ dan juga $|-2| = 2$.

Untuk menemukan *"faktor-faktor dari bentuk kuadrat sempurna"* dapat kita ikirkan sebagai berikut. Pertama, ubahlah setiap bentuk kuadrat sempurna ke dalam bentuk $p^2 x^2 + 2pqx + q^2$ atau $p^2 x^2 - 2pqx + q^2$. Selanjutnya kita lakukan "proses" berikut untuk menemukan faktor-faktornya.

Untuk diingat

Menemukan Faktor-faktor dari Bentuk Kuadrat Sempurna

Jenis 1: $p^2 x^2 + 2pqx + q^2 = \left(\sqrt{p^2 x^2} + \sqrt{q^2}\right)^2 = (px + q)^2$

Jadi faktor dari $p^2x^2 + 2pqx + q^2$ adalah $(px+q)$ dan $(px + q)$

Jenis 2: $p^2 x^2 - 2pqx + q^2 = \left(\sqrt{p^2 x^2} - \sqrt{q^2}\right)^2 = (px - q)^2$

Jadi faktor dari $p^2 x^2 - 2pqx + q^2$ adalah $(px - q)$ dan $(px - q)$

Contoh 2.8

Temukan faktor-faktor dari $4x^2 - 8x + 4$.

Penyelesaian:

a) Bentuk $4x^2 - 8x + 4$ adalah kuadrat sempurna sebab berlaku $\sqrt{4} \times \sqrt{4} \times 2 = |-8|$.

b) Ubah dalam bentuk $p^2x^2 + 2pqx + q^2$ dan temukan faktor-faktornya.

$$2^2x^2 - (2\cdot 2\cdot 2)x + 2^2 = \left(\sqrt{2^2x^2} - \sqrt{2^2}\right)^2$$
$$= (2x - 2)^2$$
$$= (2x - 2)(2x - 2)$$

c) Jadi, faktor dari $4x^2 - 8x + 4$ adalah $(2x - 2)$ dan $(2x - 2)$.

Kuadrat berbeda (*difference square*)

Kuadrat berbeda (*difference square*) adalah kuadrat yang terbangun dari perkalian faktor-faktor yang sekawan. Sekawan dari $(x - b)$ adalah $(x + b)$. Sekawan dari $(ax + q)$ adalah $(ax - q)$ dan sebagainya.

Bentuk umum dari kuadrat berbeda dan faktor-faktornya adalah sebagai berikut:

$$px^2 - q = (\sqrt{px} + \sqrt{q})(\sqrt{px} - \sqrt{q})$$

Contoh 2.10

Tentukan faktor-faktor dari bentuk kuadrat berikut!

a) $49x^2 - 36$

b) $25x^2 - 7$

Penyelesaian:

a) $49x^2 - 36 = (\sqrt{49}x - \sqrt{36})(\sqrt{49}x + \sqrt{36})$
$= (7x - 6)(7x + 6)$

Jadi, faktor dari $49x^2 - 36$ adalah $(7x - 6)$ dan $(7x + 6)$

b) $25x^2 - 7 = (\sqrt{25}x - \sqrt{7})(\sqrt{25}x + \sqrt{7})$
$= (5x - \sqrt{7})(5x + \sqrt{7})$

Jadi, faktor dari $25x^2 - 7$ adalah $(5x - \sqrt{7})$ dan $(5x + \sqrt{7})$

Latihan 1.E

Memfaktorkan Bentuk Kuadrat

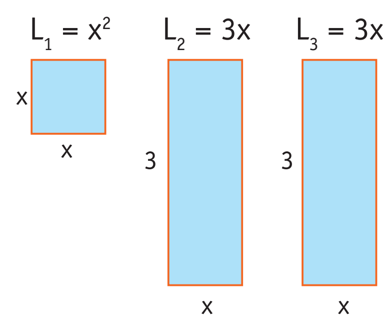
1. Faktorkan (dengan cara menarik kelipatan persekutuan dari koefisien x^2, x dan konstantanya).
   a) $9x^2 - 36x$ b) $-3x^2 - 18x + 6$ c) $-7ax^2 + 14ax$
   d) $6x - 24x^2$ e) $7p^2 - 21p + 7$ f) $5x^2 + 10x + 75$
2. Temukan faktor-faktor dari bentuk kuadrat berikut.
   a) $x^2 + 16x + 63$ b) $x^2 - 4x - 21$ c) $x^2 - 17x + 66$
   d) $2x^2 + 22x + 48$ e) $-3x^2 - 6x + 24$ f) $4x^2 - 16x - 20$
   g) $-x^2 - 4x + 96$ h) $6x^2 - 11x - 35$ i) $6x^2 - 37x + 45$
   j) $-40x^2 + 46x + 14$
3. Temukan faktor-faktor dari bentuk kuadrat berikut.
   a) $4x^2 - 9$ b) $81x^2 - 25$ c) $x^2 - 100$
   d) $2x^2 - 32$ e) $3x^2 - 108$ f) $18x^2 - 162$
   g) $(x + 1)^2 - 4$ h) $(3x - 4)^2 - 1$ i) $2(x + 3)^2 - 98$
   j) $-3(5x - 8)^2 + 27$
4. Temukan faktor-faktor dari bentuk kuadrat berikut.
   a) $x^2 + 14x + 49$ b) $16x^2 - 24x + 9$ c) $25x2 - 10x + 1$
   d) $2x^2 + 12x + 18$ e) $3x^2 - 12x + 12$ f) $-18x^2 - 84x - 98$
   g) $72x^2 - 24x + 2$ h) $x^2 + 2 + 3$ i) $4x^2 - 4x + 5$
5. Temukan faktor-faktor dari bentuk kuadrat berikut.
   a) $(x + 3)^2 - 9$ b) $(x - 3)^2 - 16$ c) $(2x + 7)^2 - 36$
   d) $(3x - 2)^2 - 81$ e) $2(x + 1)^2 - 8$ f) $-3(x - 4)^2 + 48$
   g) $4(2x - 3)^2 - 36$ h) $50(3x + 2)^2 - 98$ i) $(6 - x)^2 - 1$
   j) $(2 - 3x)^2 - 64$
6. Temukan faktor-faktor dari bentuk kuadrat berikut dengan cara memisalkan bagian yang sama terlebih dahulu.
   a) $(x + 7)^2 + 9(x + 7) + 20$ b) $(x - 2)^2 + 7(x - 2) + 10$
   c) $6(x - 3)^2 + 13(x - 3) + 5$ d) $4(x + 8)^2 + 3(x + 8) - 10$
   e) $(2x + 7)^2 - 9(2x + 7) + 8$ e) $12(3x - 11)^2 - 19(3x - 11) - 18$

7. Temukan faktor-faktornya.
   a) $3x^2 - 24x - 27$
   b) $25x^2 + 10x + 1$
   c) $(x - 13)^2 - 2(x - 13) + 1$
   d) $x^2 - 28x + 196$
   e) $196x^2 - 49$
   f) $60x^2 + 40x + 5$
   g) $60x^2 - 5x$
   h) $9 - 9x^2 y^2$
   i) $4(3x - 1)^2 - (x + 2)^2$
   j) $-12x^2 + 70x + 98$

Memfaktorkan dengan melengkapkan kuadrat sempurna (*perfect square*)

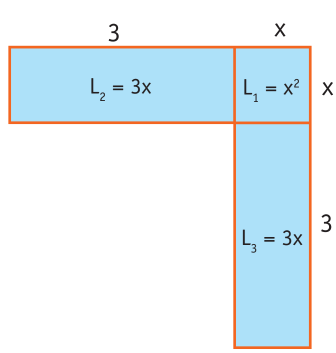
SEBAGAIMANA yang telah kita kaji pada pendahuluan bab ini, memfaktorkan dengan melengkapkan kuadrat sempurna telah dilakukan oleh Khwarizmi (780 – 850 M) dengan menggunakan pendekatan "*geometri*" sebagai ujud luas bangun persegi atau persegi panjang

Misalnya: Tentukan faktor dari $x^2 + 6x + 5$ dengan pendekatan kuadrat sempurna.



Mula-mula Khwarizmi menguraikan bentuk kuadrat $x^2 + 6x + 5$ menjadi $x^2 + 3x + 3x + 5$. Selanjutnya bentuk x^2, $3x$ dan $3x$, ia "*khayalkan*" sebagi luas bangun.

Kemudian, bangun-bangun di atas ia susun sebagai berikut.

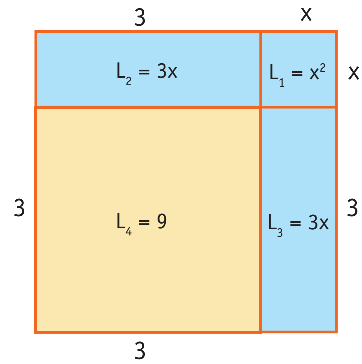


Ujud geometri dari $x^2 + 6x$

Al-Khwarizmi

Sumber: www.tacomacc.edu

Tahukah kamu, bangun berbentuk apakah yang bisa ditambahkan agar bangun-bangun tersebut bisa menjadi "persegi yang sempurna"? Berapa luasnya? Agar tercipta persegi yang sempurna perlu ditambahkan sebuah persegi dengan luas 9 satuan atau persegi yang panjang sisi-sisinya 3 satuan. (Perhatikan luas bangun L_4 yang ditambahkan itu).



Ujud geometri kuadrat sempurna $x^2 + 6x + 9$

Selanjutnya, Khwarizmi menyarankan langkah yang bisa dianggap "*aneh*" pada waktu itu, sebab untuk menemukan faktor-faktor dari $x^2 + 6x - 12$, justru harus digiring ke dalam bentuk kuadrat sempurnanya terlebih dahulu. Sekarang perhatikan, bagaimana proses seorang Khwarizmi menemukan faktor-faktor bentuk kuadrat dengan mengubah terlebih dahulu ke dalam bentuk kuadrat sempurna itu.

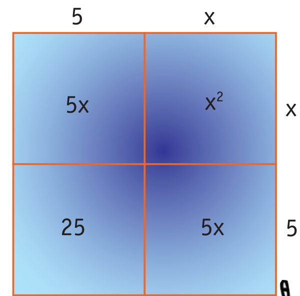
$$\begin{aligned}
x^2 + 6x - 12 &= x^2 + 3x + 3x + 5 \\
&= x^2 + 3x + 3x + (9 - 9) + 5 \\
&= (x^2 + 2.\ 3x + 3^2) + (-9 + 5) \\
&= (x + 3)^2 - 4 \\
&= (x+3)^2 - 2^2 \\
&= \left(\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{2^2}\right)\left(\sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{2^2}\right) \\
&= ((x + 3) + 2)\ ((x + 3) - 2) \\
&= (x + 5)(x + 1)
\end{aligned}$$

Jadi, faktor dari $x^2 + 6x - 12$ adalah $(x + 5)(x + 1)$

Dalam pengerjaan selanjutnya orang cenderung tidak melakukan visualisasi untuk membuat kuadrat sempurna. Angka 9 agar $x^2 + 6x$ menjadi kuadrat sempurna bisa diperolah dari koefisiennya x dibagi dua lalu dikuadratkan. Koefisien x adalah 6 maka $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$. Mengapa harus dibagi 2, bukan 3 ataupun 5? Pikirkan!

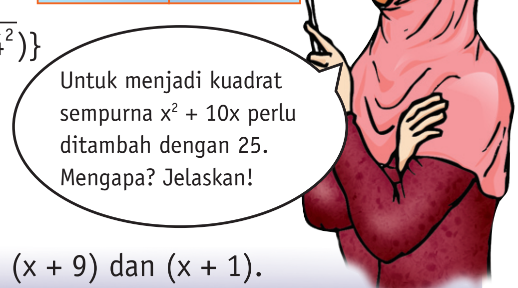
Contoh 2.11

Gunakan cara melengkapkan kuadrat sempurna untuk menemukan faktor dari bentuk kuadrat $2x^2 + 20x + 18$



Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
&2x^2 + 20x + 18\\
&\quad = 2\ (x^2 + 10x + 9)\\
&\quad = 2\ (x^2 + 10x + 25 - 25 + 9)\\
&\quad = 2\ \{(x^2 + 10x + 25) - 16\ \}\\
&\quad = 2\ \{(x + 5)^2 - 4^2\}\\
&\quad = 2\{(\sqrt{(x+5)^2} + \sqrt{4^2})(\sqrt{(x+5)^2} - \sqrt{4^2})\}\\
&\quad = 2\{((x + 5) + 4)\ ((x + 5) - 4)\}\\
&\quad = 2\ (x + 5 + 4)\ (x + 5 - 4)\\
&\quad = 2\ (x + 9)\ (x + 1)
\end{aligned}
$$



Jadi faktor dari $2x^2 + 20x + 18$ adalah 2, $(x + 9)$ dan $(x + 1)$.

Latihan 2.C

Melengkapkan Kuadrat Sempurna

1. Gunakan metode melengkapi kuadrat sempurna untuk memfaktorkan bentuk kuadrat berikut ini.
   a) $x^2 + 4x - 3$
   b) $x^2 + 10x + 20$
   c) $x^2 + 6x + 7$
   d) $x^2 + 2x - 7$
   e) $x^2 + 8x + 13$
   f) $x^2 - 4x - 1$
   g) $x^2 - 12x + 19$
   h) $x^2 - 2x - 5$
   i) $x^2 - 8x + 10$
   j) $x^2 - 6x - 4$

2. Gunakan metode melengkapi kuadrat sempurna untuk memfaktorkan bentuk kuadrat berikut ini.
   a) $x^2 + 3x + 1$
   b) $x^2 + 5x - 3$
   c) $x^2 - 7x + 2$
   d) $x^2 - x - 1$

e) $x^2 + 9x + 4$
f) $x^2 + 11x - 6$
g) $x^2 - 3x + 5$
h) $x^2 + 5x + 2$
i) $x^2 - 13x - 1$
j) $x^2 + x - 3$

3. Faktorkanlah dengan melengkapi kuadrat sempurna
   a) $3x^2 - 18x - 3$
   b) $2x^2 + 10x + 4$
   c) $-5x^2 - 10x + 15$
   d) $-12x^2 + 4x - 8$

E. Memecahkan persamaan kuadrat Hukum faktor nol

Tahukah kamu, apakah perbedaan *bentuk kuadrat* dan *persamaan kuadrat*? Persamaan kuadrat adalah bentuk kuadrat yang nilainya sama dengan nol. Ingat kembali bahwa persamaan linier memiliki pangkat tertinggi 1, dan persamaan linier memiliki satu penyelesaian. Persamaan kuadrat memiliki pangkat tertinggi 2, dengan demikian persamaan kuadrat tepat memiliki dua penyelesaian. Perhatikan persamaan kuadrat berikut ini.

$$\mathbf{x^2 - 4x + 3 = 0}$$

Dengan memfaktorkan, kita dapat $(x - 3)(x - 1) = 0$
Jika A x B = 0 maka A = 0 atau B = 0
Jika A x B = 0 maka baik A dan B sama dengan 0
Hukum ini dikenal dengan nama "*hukum faktor nol*"

$$\begin{array}{ccc} (x - 3) = 0 & \text{atau} & (x - 1) = 0 \\ x = 3 & \text{atau} & x = 1 \end{array}$$

Untuk diingat

Hukum faktor nol

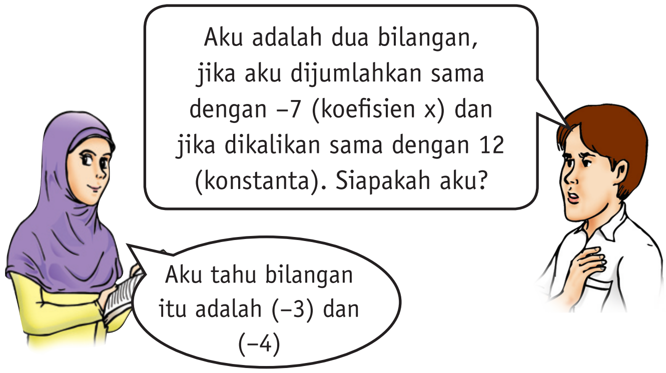
Jika A × B = 0 maka A = 0 atau B = 0.
Jika A × B = 0 maka baik A dan B sama dengan 0.

Contoh 2.12

Temukanlah nilai x dari persamaan kuadrat $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Penyelesaian:

a. Pecahkan teka-teki berikut:



b. Selanjutnya, persamaan kuadrat $x^2 - 7x + 12 = 0$ dapat dituliskan ke dalam bentuk faktor-faktornya sebagai berikut:
$(x - 3)(x - 4) = 0$
$(x - 3) = 0$ atau $(x - 4) = 0$
$x = 3$ atau $x = 4$

c. Jadi, penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 - 7x + 12 = 0$ adalah $x = 3$ atau $x = 4$

Contoh 2.13

Temukanlah nilai x dari persamaan kuadrat $2x^2 - 10x + 12 = 0$.

Penyelesaian:

a. $2x^2 - 10x + 12 = 0$
Faktor kelipatan $2(x^2 - 5x + 6) = 0$

b. Pecahkan teka-teki berikut!

c. Selanjutnya, bentuk $2(x^2 - 5x + 6) = 0$ dapat dituliskan sebagai:
$2\ (x - 2\ )\ (x - 3) = 0$
$(x - 2\ ) = 0$ atau $(x - 3) = 0$
$X = 2$ atau $x = 3$

d. Jadi, penyelesaian dari persamaan kuadrat $2x^2 - 10x + 12 = 0$ adalah $x = 3$ atau $x = 4$.

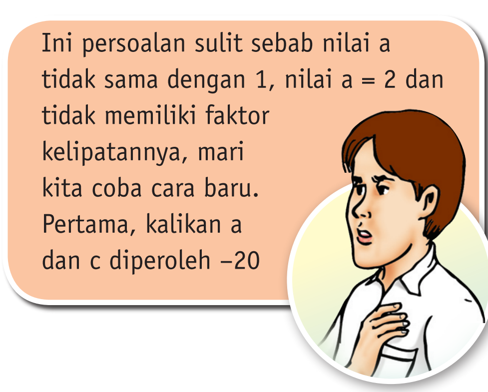
Contoh 2.14

Tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat $2x^2 - x - 10 = 0$.

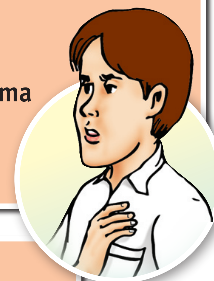
Penyelesaian:

a. $2x^2 - x - 10 = 0$

−20



b. Pecahkan teka-teki berikut!

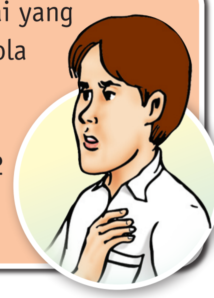


Sekarang kita buat teka-teki dari nilai b dan nilai (a x c) dari persamaan kuadrat itu. **Aku adalah dua bilangan jika dijumlahkan sama dengan –1 (nilai b) dan jika dikalikan sama dengan –20 (nilai a x b). Siapakah aku?**

Jawabnya pasti –5 dan 4. Bagaimana Mat? Betul kan?

Betul Dul. Kamu sekarang ada kemajuan

c. Nyatakan dalam bentuk faktornya!



Bentuk faktornya "*agak aneh*", karena nilai-nilai yang kamu temukan harus aku masukkan ke dalam pola (2x ... ...) (2x ... ...) = 0 dan kita peroleh (2x – 5)(2x + 4) = 0 atau 2(2x – 5)(x + 2) = 0 Selanjutnya ruas kiri dan ruas kanan kita bagi 2 diperoleh hasil akhir (2x – 5) (x + 2) = 0

$(2x - 5)(2x + 4) = 0$

$2(2x - 5)(x + 2) = 0$

$(2x - 5)(x + 2) = 0$ ruas kiri dan kanan dibagi dengan 2

$x = \frac{5}{2}$ atau $x = -2$

d. Jadi, penyelesaian dari persamaan kuadrat $2x^2 - x - 10 = 0$ adalah

$x = \frac{5}{2}$ atau $x = -2$

Bisakah kamu temukan cara lain untuk menemukan penyelesaian dari $2x^2 - x - 10 = 0$? Tunjukkan!

Teka Teki

ADA dua bilangan, jika bilangan itu dijumlahkan hasilnya sama dengan 8 dan jika dikalikan hasilnya sama dengan 105. Dapatkah kamu menemukan kedua bilangan tersebut?

Latihan 2.D

Penyelesaian Persamaan Kuadrat

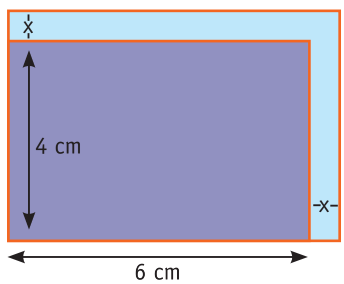
1. Selesaikan persamaan berikut ini!
   a) $x(x - 3) = 0$
   b) $x(x + 7) = 0$
   c) $(x - 4)x = 0$
   d) $(x + 6)x = 0$
   e) $3x(x - 6) = 0$
   f) $2x(x + 5) = 0$
   g) $(x + 3)5x = 0$
   h) $(x + 7)6x = 0$
   i) $x(-2x - 6) = 0$
   j) $x(3x + 15) = 0$
   k) $4x(x + 7) = 0$
   l) $8x(x - 9) = 0$
   m) $-5x(-5x - 45) = 0$
   n) $(7x + 63)9x = 0$
2. Selesaikan persamaan berikut ini!
   a) $(x + 6)(2x + 3) = 0$
   b) $(x + 2)(5x + 7) = 0$
   c) $(x + 1)(6x - 1) = 0$
   d) $(x - 5)(x + 2) = 0$
   e) $(3x - 5)(5x - 11) = 0$
   f) $(7x + 12)(9x + 2) = 0$
   g) $(16x + 8)(2x - 6) = 0$
   h) $(7 + x)(23 - x) = 0$
   i) $(6 - 7x)(x + 6) = 0$
   j) $(x + 0)(x + 4) = 0$
3. Selesaikan persamaan kuadrat berikut!
   a) $3x^2 - 27 = 0$
   b) $x^2 + 16x + 64 = 0$
   c) $32x^2 - 16x + 2 = 0$
   d) $12 - 75x^2 = 0$
   e) $x^2 - 6x = 0$
   f) $15x - 3x^2 = 0$
   g) $x^2 + 6x - 72 = 0$
   h) $x^2 - 13x + 42 = 0$
   i) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
   j) $4x^2 + 13x + 10 = 0$
   k) $6x^2 + 5x - 25 = 0$
   l) $2x^2 + 12x - 110 = 0$

4. Susun kembali dan selesaikan persamaan kuadrat berikut!

a) $x^2 + 45 = 14x$
b) $6x^2 + 7x = 49$
c) $1 + 8x = -16x^2$
d) $36x^2 = 1$
e) $-32x = 6x^2 + 10$
f) $27 + 12x^2 = 36x$
g) $32x^2 = 162$
h) $5x^2 = 8x$

5. Lebar dari pada persegipanjang adalah 3 kurangnya dari panjangnya. Jika luas persegi panjang tersebut adalah 40 m^2, tentukan panjang dan lebarnya.

6. Seorang teknisi menggambar persegipanjang seperti berikut.



Jika luas seluruh permukaan adalah 63 cm^2, tentukan nilai untuk x.

7. Suhu udara T (°C) dalam sebuah ruangan mengikuti persamaan ini $T = \frac{5}{8}t^2 - 5t + 30$ dengan t adalah waktu (dalam jam) yang dioperasikan pada ruangan itu. Butuh berapa lama untuk mencapai suhu ruangan 20° C?

8. Barisan bilangan yang mengikuti aturan $n^2 + 3n + 2$ adalah 6, 12, 20, ... (diperoleh dengan mensubstitusikan n = 1, n = 2, n = 3, ... ke dalam aturan itu).

a. Temukan suku berikutnya dengan mensubstitusikan n = 4
b. Nilai positif n berapakah yang jika disubstitusikan menghasilkan nilai 210?

Apapun yang dapat Anda lakukan atau ingin Anda lakukan mulailah. Keberanian memiliki kecerdasan, dan keajaiban di dalamnya

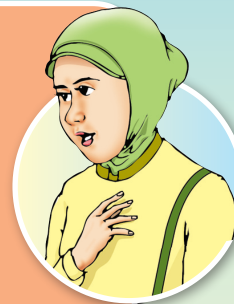
(*Goethe*)

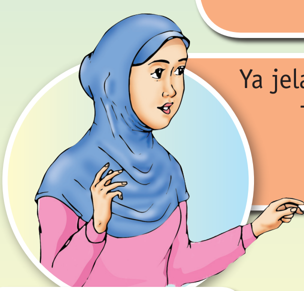
F. Memecahkan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Kuadrat Sempurna

Bagaimana melengkapi kuadrat sempurna?

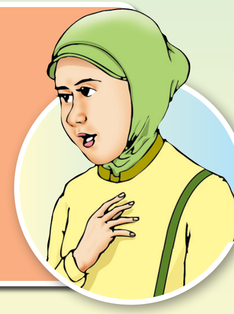
Sama deh dengan aku..., dulu aku juga pernah mengalami kesulitan untuk menemukan dua buah bilangan yang jika dijumlahkan sama dengan b dan jika dikalikan sama dengan $(a \times c)$ pada persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, baik untuk nilai $a = 1$, sebagaimana yang kamu tanyakan maupun untuk nilai $a \neq 1$. Lalu aku tanya sama pak ustadz matematika. Mau tau jawabnya?





Ya jelas dong Tika.....

Pak Ustadz menyarankan kalau menghadapi persamaan kuadrat yang sulit difaktorkan maka gunakan pendekatan "melengkapkan kuadrat sempurnanya al-khwarizmi". Nah sekarang, perhatikan uraiannya!

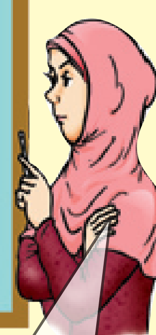


Kamu bisa gunakan pendekatan yang "lebih cerdas", yaitu dengan melengkapkan kuadrat sempurna. Perhatikan baik-baik penjelasan Bapak di papan tulis ini!

TAHUKAH KAMU, dari mana bilangan 16 diperoleh? Mengapa bilangan 16 ada di kedua ruasnya?

$$x^2 - 8x - 1 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 - 1 = 0 + 16$$
$$x^2 - 8x + 4^2 - 1 = 0 + 4^2$$
$$(\sqrt{1}x - \sqrt{4^2})^2 = 16 + 1$$
$$(x - 4)^2 = 17$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{17}$$
$$x - 4 = +\sqrt{17} \text{ atau } x - 4 = -\sqrt{17}$$
$$x_1 = 4 + \sqrt{17} \text{ atau } x_2 = 4 - \sqrt{17}$$

Jadi, akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 8x - 1 = 0$ adalah $(4 + \sqrt{17})$ dan $(4 - \sqrt{17})$



Kalau cuma itu aku tahu, teman...! Bilangan 16 diperoleh dari $(\frac{1}{2}b)^2$
Nilai $b = -8$, maka $(\frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}.(-8))^2 = (-4)^2 = 16$.
Betul kan?
Adapun kenapa 16 diberikan secara adil di kedua ruas, tidak lain biar persamaan tetap dalam kedaan seimbang. Begitu?!

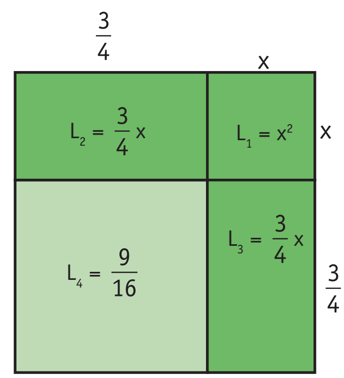
Untuk lebih memahami cara melengkapkan kuadrat sempurna, marilah kita pelajari contoh berikut ini.

Contoh 2.15

Tentukan penyelesaian dari $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ dengan melengkapkan kuadrat sempurna.

Penyelesaian:

a. Melengkapkan kuadrat sempurna adalah membagi sisi $\frac{3}{2}$ menjadi dua bagian yang sama, sebagai perpanjangan luasan x^2 nya, yaitu masing-masing panjangnya $\frac{3}{4}$.



b. Berarti bentuk $\frac{9}{16}$ perlu ditambahkan pada kedua ruas persamaan kuadrat $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ agar terbentuk kuadrat sempurna.

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - 1 = 0 + \frac{9}{16}$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{9}{16}$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 - 1 - \frac{9}{16} = 0$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{16} = 0$$

$$\left(\sqrt{(x + \frac{3}{4})^2} - \sqrt{\frac{25}{16}}\right)\left(\sqrt{(x + \frac{3}{4})^2} + \sqrt{\frac{25}{16}}\right) = 0$$

$$\left((x + \frac{3}{4}) - \frac{5}{4}\right)\left((x + \frac{3}{4}) + \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) = 0$$

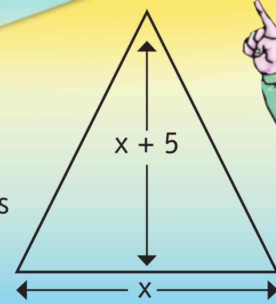
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ atau } x = 2$$

Jadi penyelesaiannya adalah $\frac{1}{2}$ atau x = 2

Problem Solving

TINGGI dari sebuah segitiga adalah 5 cm lebihnya dari panjang alasnya. Jika luas segitiga adalah 18 cm^2. Temukan panjang alas dan tinggi segitiga tersebut!



Latihan 2.E

Persamaan Kuadrat-Melengkapkan Kuadrat Sempurna

1. Temukan penyelesaian dari persamaan berikut!
   a) $x^2 + 8x + 1 = 0$
   b) $x^2 + 12x + 3 = 0$
   c) $x^2 + 4x - 2 = 0$
   d) $x^2 - 6x + 4 = 0$
   e) $x^2 - 10x + 18 = 0$
   f) $x^2 - 6x + 6 = 0$
   g) $x^2 + 2x - 9 = 0$
   h) $x^2 - 8x - 1 = 0$
2. Selesaikan!
   a) $x^2 + 3x - 1 = 0$
   b) $x^2 + 5x + 2 = 0$
   c) $x^2 - 7x + 5 = 0$
   d) $x^2 - 9x - 2 = 0$
   e) $x^2 + 11x + 4 = 0$
   f) $x^2 - x - 6 = 0$
   g) $x^2 - 5x + 1 = 0$
   h) $x^2 + 7x - 3 = 0$
3. Susunlah kembali dan selesaikan!
   a) $x^2 = 4x + 1$
   b) $x^2 + 2 = 6x$
   c) $9x - 2 = x^2$
   d) $4 - x^2 = 7x$
   e) $2(3x + 5) = x^2$
   f) $x^2 - 3(5x - 2) = 0$
   g) $14x - x^2 = -1$
   h) $\dfrac{x^2 + 3x}{4} = -2$
4. Selesaikan!
   a) $x^2 - 14 = 0$
   b) $6 - x^2 = 0$
   c) $3x^2 = 36$
   d) $-2x^2 + 18 = 0$

G. Memecahkan Persamaan Kuadrat - Formula Kuadratik

Kita sudah mempelajari dua kiat menemukan akar-akar dari persamaan kuadrat, yaitu *cara memfaktorkan langsung* dan *melengkapkan kuadrat sempurna gaya Khwarizmi*. Namun, terkadang dua cara ini dipandang "**kurang ampuh**" dan "**lamban**" untuk menemukan akar-akar bentuk persamaan kuadrat yang cukup sulit untuk dipecahkan, semisal $0{,}501x^2 - 3{,}742x + 0{,}256 = 0$. Dapatkah kamu temukan faktor-faktor dari persamaan kuadrat ini dengan cara langsung memfaktorkannya? Hampir tidak mungkin. Dapatkah kamu menemukan akar-akar persamaan ini dengan lebih cepat melalui cara melengkapkan kuadrat sempurna? Bisa saja, namun kita akan butuh waktu yang cukup lama ---*dibanding dengan cara yang akan segera kamu kuasai berikut*--- karena harus bekerja membagi, mengalikan, mengkuadratkan terhadap bilangan-bilangan desimalnya yang cukup rumit itu.

Cara yang lebih praktis ini, selanjutnya, lebih populer dengan nama "**rumus abc**". Cara ini sebenarnya bukanlah hal yang baru. Rumus ini *dilahirkan* ketika seseorang mencoba berupaya keras ingin mengetahui, seperti apakah ujud akar-akar pada bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ini? Mari kita pahami dan ulangi secara mandiri proses penemuan rumus abc berikut ini.

Perhatikan bentuk umum persamaan kuadrat berikut

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ dimana } a \neq 0$$

Bagilah setiap suku dengan a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Gunakan cara melengkapi kuadrat sempurna

Setengah dan kuadrat dari $\frac{b}{a}$ adalah $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Lalu jumlahkan dan kurangkan hal itu pada persamaan kuadrat:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sekarang, marilah kita simak bagaimana rumus abc ini diterapkan lewat sebuah contoh berikut ini.

Contoh 2.16

Temukan penyelesaian persamaan kuadrat $5x^2 - x - 7 = 0$ dengan menggunakan rumus $x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)}{2a}$.

Penyelesaian:

a) Identifikasi nilai-nilai a, b dan c.
$5x^2 - x - 7 = 0$ dimana $a = 5$, $b = -1$ dan $c = -7$

b) Substitusikan ke rumus:

$$x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-7)}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{10}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{10}$$

$$x = \frac{1 \pm 11}{10}$$

$$x = \frac{1 + 11}{10} \text{ atau } x = \frac{1 - 11}{10}$$

$$x = \frac{12}{10} \text{ atau } x = \frac{-10}{10}$$

$$x = 1{,}2 \text{ atau } x = -1$$

Jadi, penyelesaian dari persamaan kuadrat $5x^2 - x - 7 = 0$ adalah $x = 1{,}2$ atau $x = -1$.

Latihan 2.F

Persamaan Kuadrat Formula Kuadratik

1. Tentukan a, b, dan c (masing-masing koefisien dari x^2, x dan konstanta) dari setiap persamaan kuadrat berikut.
   a) $x^2 + 4x - 3 = 0$
   b) $x^2 - 7x + 9 = 0$
   c) $9 - 4x + x^2 = 0$
   d) $7 - 3x - 6x^2 = 0$
   e) $x^2 - 7x + 5 = 0$
   f) $(x + 1)^2 = 0$
   g) $(2x - 3)^2 = 0$
   h) $5 - 2(x^2 + 2) = 0$
   i) $3x^2 - 10x + 4 + 4x^2 - 11x = 0$
2. Gunakan formula kuadratik untuk menyelesaikan persamaan kuadrat berikut (meskipun persamaan itu mungkin dapat difaktorkan dengan mudah).
   a) $x^2 + 9x + 20 = 0$
   b) $x^2 - 10x + 16 = 0$
   c) $2x^2 - 13x - 24 = 0$
   d) $-4x^2 + 13x - 3 = 0$
3. Temukan jawaban dari tiap-tiap persamaan berikut ini.
   a) $x^2 + 5x + 3 = 0$
   b) $x^2 + 8x + 5 = 0$
   c) $x^2 + 3x + 1 = 0$
   d) $x^2 + 10x + 12 = 0$
   e) $x^2 - 6x + 2 = 0$
   f) $x^2 - 7x + 6 = 0$
   g) $x^2 - 4x - 2 = 0$
   h) $x^2 - 9x - 8 = 0$
   i) $-2x^2 + 3x + 1 = 0$
   j) $-4x^2 + 12x - 1 = 0$
   k) $-6x^2 - 5x + 2 = 0$
   i) $-x^2 + 14x - 5 = 0$
4. Temukan jawabannya (dalam bentuk tiga tempat desimal) dari tiap-tiap persamaan berikut.
   a) $x^2 - 6x - 2 = 0$
   b) $x^2 + 3x - 9 = 0$
   c) $-2x^2 + 7x + 1 = 0$
   d) $9x^2 - 2x - 2 = 0$
   e) $-x^2 - 8x + 1 = 0$
   f) $3x^2 + x - 9 = 0$
   g) $x^2 + 8x + 13 = 0$
   h) $x^2 - 10x + 30 = 0$
   i) $-2x^2 + 3x - 2 = 0$
   j) $5x^2 - 3x + 7 = 0$
5. Temukan jawaban dalam bentuk desimal dari persamaan berikut ini
   a) $x^2 + 6x = 11$
   b) $2x^2 = 7 - 4x$
   c) $10x + 2 = -5x^2$
   d) $x^2 = 8x - 6$
   e) $5 = 9x - 2x^2$
   f) $x^2 - 2 = 7x + 4$
   g) $5x^2 + 6x + 2 = 0$
   h) $-x^2 + 4x = 8$

Untuk diingat

Rumus abc

Jika diketahui persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ maka akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ atau } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Investigasi

"BILANGAN ANEH HASIL AKAR DUA DARI"

DI bawah ini terdapat 3 persamaan kuadrat yang akar-akarnya tidak bisa dinyatakan ke dalam bentuk bilangan desimal. Dengan menggunakan "rumus abc", coba tentukan mana ketiga persamaan yang dimaksud tersebut. Gunakan kalkulator jika kamu perlukan.

No.	Persamaan	a	b	c	Banyaknya penyelesaian	$b^2 - 4ac$
A	$x^2 + 6x + 9 = 0$					
B	$x^2 + 6x + 5 = 0$					
C	$x^2 + 6x + 10 = 0$					
D	$x^2 - 2x + 4 = 0$					
E	$x^2 - 2x + 1 = 0$					
F	$x^2 - 4x - 5 = 0$					
G	$x^2 + 5x + 6 = 0$					
H	$x^2 - 9x + 14 = 0$					

a. Apa yang bisa kamu katakan dari persamaan kuadrat pada kolom terakhir? Mengapa?

b. Buatkan 5 persamaan kuadrat yang akar-akar tidak bisa dinyatakan dalam bentuk desimal atau bilangan riil.

H. Diskriminan

Bagaimana dengan hasil investigasimu pada "bilangan aneh hasil akar dua dari" di atas? Benar, kita cukup dikejutkan dengan temuan bentuk bilangan-bilangan negatif yang berada di bawah tanda akar dua dari, misalnya bentuk $\sqrt{-4}$. Bentuk bilangan ini cukup merepotkan bagi kita untuk menemukan hasil akar duanya. Bahkan sering kali kalkulator biasa hanya memunculkan huruf "E" atau "*error*" di layarnya sebagai ujud ketidakmampuannya dalam menemukan hasil perhitungan bentuk itu. Selanjutnya para matematikawan menamakan bilangan jenis itu sebagai "*bilangan khayal*" atau "*bilangan imaginer*".

Bentuk $\sqrt{-4}$ dihasilkan dari perhitungan $\sqrt{b^2 - 4ac}$ pada persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 10 = 0$, yaitu

$$b^2 - 4ac = (6)^2 - 4.1.10 = 36 - 40 = -4$$

Selanjutnya, bentuk $b^2 - 4ac$ ini dinamakan dengan diskriminan disimbolkan dengan huruf kapital D, yaitu $D = b^2 - 4ac$. Istilah diskriminan berasal dari kata Inggris "*discriminate*" yang artinya "*membedakan*". Sesuai dengan namanya, $D = b^2 - 4ac$ ternyata merupakan alat deteksi yang canggih dalam membedakan jenis-jenis akar yang dimiliki oleh sejumlah persamaan kuadrat tanpa harus memfaktorkan terlebih dahulu. Sungguh luar biasa.

Sejalan dengan kehadiran istilah diskriminan yaitu $D = b^2 - 4ac$ maka rumus abc atau formula kuadratik

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dapat kita tuliskan sebagai

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

Bagaimana kita bisa menggunakan alat canggih *diskriminan* $D = b^2 - 4ac$ untuk membedakan jenis-jenis akar persamaan kuadrat tanpa memfaktorkan terlebih dahulu itu? Ikutilah tip-tip berikut ini.

Jika $D < 0$ (*bilangan negatif*) artinya tidak ada penyelesaian riil. Pada bagian terdahulu kita tidak mampu menemukan hasil perhitungan akar dua dari bilangan negatif. Kata "riil" digunakan untuk mendiskripsikan bilangan-bilangan meliputi *negatif, positif, pecahan, desimal, akar, rasional* (yaitu bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan atau pecahan) dan *irasional*. Dalam kajian matematika lebih lanjut, akar dua dari bilangan negatif dikaji dibagian tersendiri yang selanjutnya dinamai sebagai *bilangan* imajiner.

Diskriminan $D = b^2 - 4ac$, inilah alat deteksi canggih yang mampu mendeteksi jenis-jenis akar tanpa menemukan akarnya terlebih dahulu.

Jika $D < 0$
maka akar-akarnya tidak riil
Jika $D > 0$
maka akar-akarnya riil
Jika $D = 0$
maka hanya ada tepat satu penyelesaian riil

Jika $D > 0$ (yaitu bilangan positif), artinya akar dua dari diskriminan itu ada. Lalu akar dua dari diskriminan itu dijumlahkan dan dikurangkan dalam formula kuadratik (lihat rumusnya ada tanda $\pm$) dan dihasilkan dua akar riil yang berbeda.

Jika $D = 0$ artinya tidak ada sesuatu yang bisa dijumlahkan dan dikurangkan dalam formula kuadratik itu. Oleh karena itu, hanya ada tepat satu penyelesaian riil.

Untuk diingat

Diketahui persamaan kuadarat $ax^2 + bx + c = 0$ dimana $a \neq 0$.
Diskriminannya adalah $D = b^2 - 4ac$
Jika $D < 0$ maka akar-akar persamaan kuadratnya tidak *riil*
Jika $D > 0$ maka akar-akar persamaan kuadratnya *riil*
Jika $D = 0$ maka persamaan kuadrat hanya memiliki satu penyelesaian riil

Contoh 2.17

Hitunglah diskriminan pada persamaan kuadrat $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Penyelesaian:

Pada persamaan kuadrat $3x^2 - 5x + 2 = 0$ nilai $a = 3$, $b = -5$ dan $c = 2$

Subsritusikan ke rumus diskriminan $D = b^2 - 4ac$

$D = (-5)2 - 4 \,.\, (3) \,.\, (2) = 25 - 24$

$D = 1$

Contoh 2.18

Ada berapa banyak penyelesaian riil pada persamaan kuadrat

$-7x^2 - 3x - 1 = 0$

Penyelesaian:

Pada persamaan kuadrat $-7x^2 - 3x - 1 = 0$ nilai $a = -7$, $b = -3$ dan $c = -1$

Subsritusikan ke rumus diskriminan $D = b^2 - 4ac$

$D = (-3)2 - 4 \,.\, (-7) \,.\, (-1)$

$D = 9 - 28$

$D = -19$

Oleh karena $D < 0$ maka persamaan kuadrat itu tidak memiliki penyelesaian atau akar yang riil

Barang siapa yang Allah inginkan kebaikan padanya, maka Dia akan memahamkannya dalam agama dan sesungguhnya ilmu itu (diperoleh) dengan cara belajar

(*HR. Al-Bukhori*)

Contoh 2.19

Berapakah nilai k agar persamaan kuadrat $-x^2 + 2kx - 9 = 0$ mempunyai:

a) dua penyelesaian

b) satu penyelesaian

c) tidak memiliki penyelesaian riil

Penyelesaian:

a) Pada persamaan kuadrat $-x^2 + 2kx - 9 = 0$
nilai $a = -1$, $b = 2k$ dan $c = -9$. Substitusikan ke rumus diskriminan

$D = b^2 - 4ac$

$D = (2k)^2 - 4(-1)(-9)$

$D = 4k^2 - 36$

Memiliki dua penyelesaian jika $D > 0$, maka:

$$4k^2 - 36 > 0$$
$$4k^2 > 36$$
$$k^2 > 9$$
$$|k| > 3$$

$k > 3$ atau $k < -3$

Jadi, agar persamaan kuadrat $-x^2 + 2kx - 9 = 0$ memiliki dua akar yang berbeda maka $k > 3$ atau $k < -3$

b) Memiliki hanya satu penyelesaian jika $D = 0$ maka:

$$4k^2 - 36 = 0$$
$$4k^2 = 36$$
$$k^2 = 9$$
$$|k| = 3$$
$$k = 3 \text{ atau } k = -3$$

Jadi, agar persamaan kuadrat $-x^2 + 2kx - 9 = 0$ hanya memiliki satu buah akar saja maka $k = 3$ atau $k = -3$ $(k = \pm 3)$

c) Tidak memiliki penyelesaian riil jika $D < 0$ maka:

$$4k^2 - 36 < 0$$
$$4k^2 < 36$$
$$k^2 < 9$$
$$|k| < 3$$
$$-3 < k < 3$$

Jadi, agar persamaan kuadrat $-x^2 + 2kx - 9 = 0$ tidak memiliki penyelesaian riil maka $-3 < k < 3$

Tahukah kamu?

1) $k^2 = a^2$ dapat dituliskan dalam bentuk nilai absolut $|k| = a$
   Jika $|k| = a$ maka $k = a$ atau $k = -a$
2) $k^2 > a^2$ dapat dituliskan dalam bentuk nilai absolut $|k| > a$
   Jika $|k| > a$ maka $-a > k > a$
3) $k^2 < a^2$ dapat dituliskan dalam bentuk nilai absolut $|k| < a$
   Jika $|k| < a$ maka $-a < k < a$

Latihan 2.G

Diskriminan

1. Hitunglah diskriminan dari persamaan kuadrat berikut:
   a) $x^2 + 9x + 2 = 0$ b) $x^2 - 4x - 1 = 0$ c) $5x^2 + 6x - 7 = 0$
   d) $2x^2 - 3x + 10 = 0$ e) $-3x^2 + x + 3 = 0$ f) $-x^2 - 2x - 6 = 0$
   g) $x^2 + 15x = 1$ h) $9 - 7x = 4x^2$ i) $-3x^2 = 5$
2. Berapa banyak penyelesaian riil yang dimiliki oleh tiap-tiap persamaan kuadrat berikut? Tanpa melakukan proses penemuan akar-akarnya.
   a) $5x^2 + x + 2 = 0$ b) $-x^2 + 4x + 4 = 0$ c) $3x^2 - 3x + 1 = 0$
   d) $3x^2 + 6x + 3 = 0$ e) $-2x^2 - 8x - 8 = 0$ f) $9 - x^2 + x = 0$
   g) $5x^2 = 2 - x$ h) $6 - 6x = x^2$ i) $12x = 9x^2 + 4$
3. Temukan diskriminan dari persamaan berikut.
   a) $x^2 + ax + 1 = 0$ b) $ax^2 + 2x + 3 = 0$
   c) $x^2 + 6x + a = 0$ d) $ax^2 + bx + 1 = 0$
   e) $mx^2 + 2mx + 1 = 0$ f) $x^2 + (m + 1)x + 3 = 0$
   g) $x^2 - mx - (m + 4) = 0$ h) $(k - 1)x^2 - kx + 2 = 0$
4. Berapa nilai p agar bentuk $x^2 - px + 5 = 0$ memiliki dua buah penyelesaian yang berbeda?

5. Berapakah nilai k agar tiap-tiap persamaan berikut mempunyai:
   i) dua penyelesaian berbeda?
   ii) satu penyelesaian?
   iii) tidak memiliki penyelesaian riil?
   a) $x^2 + kx + 4 = 0$
   b) $x^2 - 4x + k = 0$
   c) $x^2 + 4kx + 4 = 0$
   d) $kx^2 - 18x + 20 = 0$
   e) $x^2 - 4x + (k + 1) = 0$
   f) $6x^2 + 4kx + (k + 3) = 0$
   g) $4kx^2 + 12kx + 9k = 0$
   h) $(k + 4)x^2 + 10x + 5 = 0$
   i) $(k - 1)x^2 - (k + 1)x + 2 = 0$

I. Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar

PADA bagian ini kita akan mengkaji *jumlah* dan *hasil kali* akar-akar dari suatu persamaan kuadrat tertentu "tanpa harus menemukan akar-akarnya terlebih dahulu."

Di bagian terdahulu kita sudah memiliki formula kuadratik atau rumus abc untuk menemukan akar-akar persamaan kuadrat, yaitu:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kali ini, marilah kita proses rumus itu untuk menemukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat. Mula-mula, rumus ini kita urai menjadi dua bagian, sebab didalamnya terdapat tanda operasi hitung ganda, yaitu operasi jumlah dan kurang sekaligus yang menggunakan tanda ± . Inilah hasil pengguraiannya.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jumlah akar-akar persamaan kuadrat

Dari kedua akar di atas yaitu x_1 dan x_2 kita jumlahkan

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Untuk sembarang persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku $\mathbf{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

Emosi positif meningkatkan kekuatan otak, keberhasilan, dan kehormatan diri

(*Boobi DePorter & Mike Hernacki*)

Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat

Dari kedua akar di atas yaitu x_1 dan x_2 kita kalikan

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \quad \text{(perkalian sekawan)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Untuk sembarang persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Investigasi

SELIDIKILAH dengan temanmu tentang kebenaran rumus atau aturan-aturan ini. Untuk sembarang persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku:

1) $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$

2) $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

3) $x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$

4) $x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4} = \frac{b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c}{a^4}$

Dapatkah kamu temukan aturan untuk:

5) $x_1^{\ 5} + x_2^{\ 5}$?

Untuk meningkatkan kemampuan menemukan *jumlah* dan *hasil kali* akar-akar dari suatu persamaan kuadrat, marilah kita kaji contoh-contoh berikut ini.

Contoh 2.20

Jika diketahui persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 8 = 0$ serta x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Tentukan nilai:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $x_1^2 + x_2^2$

d) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$

e) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

f) $x_1 - x_2$

Penyelesaian:

Pada persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 8 = 0$ nilai $a = 1$, $b = -4$ dan $c = -8$

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-4}{1} = 4$

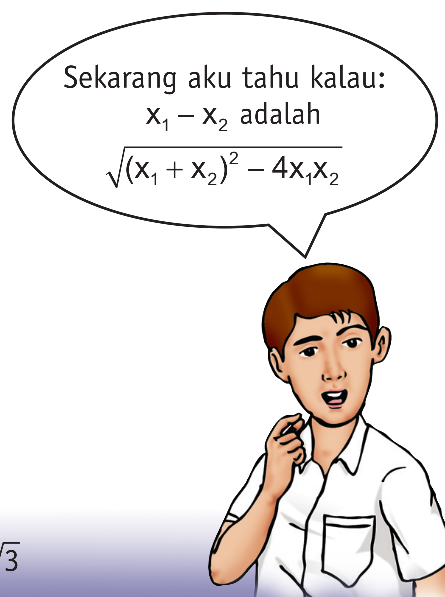
b) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-8}{1} = -8$

c) $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 \cdot x_2) \\ &= (4)^2 - 2(-8) \\ &= 16 + 16 = 32 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 &= x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2) \\ &= -8(4) = -32 \end{aligned}$$

e) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

f) $$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \\ (x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \\ (x_1 - x_2)^2 &= \{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\} - 2x_1 x_2 \\ (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ x_1 - x_2 &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ x_1 - x_2 &= \sqrt{(4)^2 - 4(-8)} \\ x_1 - x_2 &= \sqrt{16 + 32} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$



Contoh 2.21

Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 7x + m = 0$ dan $\alpha^2 - \beta^2 = 7$. Tentukan nilai m pada persamaan kuadrat tersebut.

Penyelesaian:

a) Pada persamaan kuadarat $x^2 - 7x + m = 0$ nilai a = 1, b = –7 dan c = m sehingga:

$\alpha + \beta = 7$ .... i)

$\alpha \,.\, \beta = m$ .... ii)

b) Uraikan bentuk kuadrat sempurna $\alpha^2 - \beta^2 = 7$ menjadi:

$\alpha^2 - \alpha^2 = 7$

$(\alpha - \beta)\,(\alpha + \beta) = 7$ .... iii)

c) Substitusikan i ke iii:

$\alpha + \beta = 7$ ke $(\alpha - \beta)\,(\alpha + \beta) = 7$

$(\alpha - \beta)\,.\,7 = 7$

$\alpha - \beta = 1$ .... iv)

d) Lakukan pengeliminasian i dan iv:

$$\begin{array}{r} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha - \beta = 1 \quad + \\ \hline 2\,\alpha = 8 \\ \alpha = 4 \end{array}$$

Untuk $\alpha = 4$ disubstitusikan ke $\alpha + \beta = 7$ maka:

$4 + \beta = 7$

$\beta = 3$

e) Kamu tahu $\alpha.\beta = m$ atau $m = \alpha.\,\beta$ sehingga:

$m = \alpha \,.\, \beta$

$m = 4 \,.\, 3 = 12$

Jadi nilai m pada persamaan $x^2 - 7x + m = 0$ jika $\alpha^2 - \beta^2 = 7$ adalah $m = 12$

Contoh 2.22

Jika akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - (k^2 - 7k + 10)\,x + (k + 9) = 0$ saling berlawanan. Tentukanlah nilai untuk k.

Penyelesaian:

a) Akar-akar saling berlawanan yaitu x_1 dan $x_2 = -x_1$.

b) Jumlah akar-akar persamaan kuadrat $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$\frac{-b}{a} = x_1 + x_2$ dimana $x_2 = -x_1$

$\frac{-b}{a} = x_1 + (-x_1)$

$\frac{-b}{a} = 0$; $b = 0$

c) $b = 0$

$k^2 - 7k + 10 = 0$

$(k - 4)(k - 3) = 0$

$k = 4$ atau $k = 3$

Jadi, agar akar-akar pada persamaan kuadrat $x^2 - (k^2 - 7k + 10)\,x + (k + 9) = 0$ saling berlawanan maka nilai untuk k adalah 4 atau 3.

Latihan 2.H

Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Kuadrat

1. Tentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat berikut:

a) $x^2 - 9x + 24 = 0$	b) $-2x^2 + 23x - 17 = 0$
c) $x^2 + px + q = 0$	d) $-x^2 + bx - c\,q = 0$
e) $px^2 + qx + r = 0$	f) $-kx^2 - lx + m = 0$

2. Tentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat berikut:

a) $8x = 13 - x^2$	b) $x^2 = -5x - 9$
c) $(x + 2)^2 = 3x - 7$	d) $-7x + 11 = (2x - 4)^2$
e) $\frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{7} = 0$	f) $\frac{(x-5)}{2x} = \frac{5}{(3x-1)}$

3. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 3 = 0$. Tentukan nilai dari:

a) $\alpha + \beta$ dan $\alpha\beta$
b) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
c) $\alpha^2 \beta + \alpha\beta^2$
d) $\alpha^2 + \beta^2$
e) $(\alpha + \beta)^2$
f) $\alpha^3 + \beta^3$
g) $\alpha^4 + \beta^4$
h) $\alpha^5 + \alpha^5$

4. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 7x + 5 = 0$ Tentukan nilai dari:

a) $\alpha + \beta$ dan $\alpha\beta$
b) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
c) $\alpha^2 \beta + \alpha\beta^2$
d) $\alpha^2 + \beta^2$
e) $(\alpha + \beta)^2$
f) $\alpha^3 + \beta^3$
g) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$
h) $(\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

5. Jika salah satu akar persamaan $x^2 - 8x + (2m + 1) = 0$ adalah tiga kali akar yang lain, berapakah nilai m? (Petunjuk: Misalkan akar-akarnya adalah x_1 dan x_2 dimana $x_2 = 3x_1$)

6. Salah satu akar persamaan $2x^2 + 8x + (k + 1) = 0$ adalah 2 lebihnya dari pada akar lainnya. Tentukan berapa nilai k? (*Petunjuk*: Misalkan akar-akarnya adalah x_1 dan x_2 dimana $x_2 = x_1 +_2$)

7. Persamaan kuadrat $x^2 + 5x + p = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2 Jika $x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 23$. Berapa nilai p?

8. Jika akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 9x + (m^2 - 5m + 7) = 0$ berkebalikan. Tentukan berapakah nilai m? (*Petunjuk*: Misalkan akar-akarnya adalah x_1 dan x_2 dimana $x_1 = \frac{1}{x_2}$)

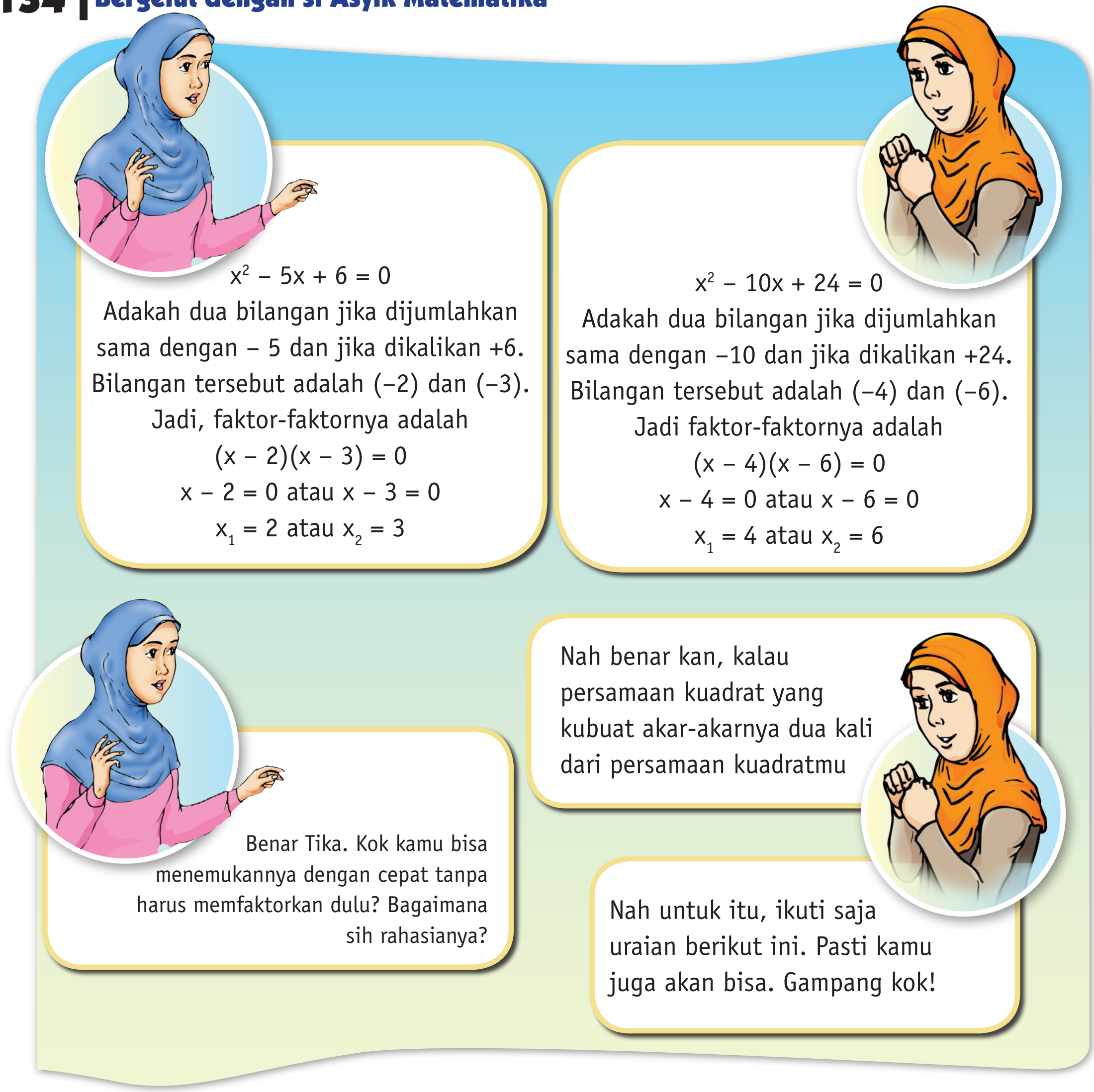
9. Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + (2m^2 + 6m - 20)x + 7 = 0$ berlawanan. Tentukan berapa nilai m?

10. Jika akar-akar persamaan kuadrat $2m^2 x^2 - 16x + (20 - 6m) = 0$ berkebalikan. Tentukan berapakah nilai m? (Petunjuk: Misalkan akar-akarnya adalah x_1 dan x_2 dengan $x_1 = \frac{1}{x_2}$)

J. Menyusun Persamaan Kuadrat

JIKA akar-akar persamaan kuadrat diketahui atau mempunyai hubungan dengan akar-akar persamaan kuadrat yang lain, maka persamaan kuadrat itu dapat ditentukan atau dicari.

Persamaan Kuadrat Baru



Menemukan persamaan kuadrat jika diketahui kedua akarnya

Perhatikan persamaan umum kuadrat berikut ini.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Kita bagi ruas kiri dan ruas kanan persamaan dengan koefisiennya x^2, yaitu a.

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{......................} \text{ i)}$$

Dan kita sudah tahu bahwa:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ atau } \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \quad \text{......... ii)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ atau } \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \quad \text{........ iii)}$$

Substitusikan ii dan iii ke i diperoleh

$$x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \,.\, x_2 = 0$$

Jadi, jika diketahui kedua akar persamaan kuadrat yaitu x_1 dan x_2 maka persamaan kuadratnya dapat ditentukan sebagai

$$x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \,.\, x_2 = 0$$

Dapatkah kamu menemukan cara lain untuk menyusun persamaan kuadrat jika diketahui kedua akarnya?

Selanjutnya, cara berpikir ini dapat dikembangkan untuk menemukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya "mempunyai hubungan" dengan akar-akar persamaan kuadrat yang diketahui. Perhatikan algoritma atau langkah-langkah berfikir berikut ini.

1. Persamaan kuadrat yang sudah diketahui
2. Temukan nilai x_1 + x_2 dan $x_1 \,.\, x_2$ dari persamaan kuadrat yang sudah diketahui
3. Misal α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat yang akan dicari. Nyatakan hubungan yang ada antara α dan β dengan x_1 dan x_2
4. Selanjutnya, temukan nilai $\alpha + \beta$ dan $\alpha \,.\, \beta$
5. Substitusikan nilail $\alpha + \beta$ dan $\alpha \,.\, \beta$ ke dalam $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha \,.\, \beta = 0$
6. Diperoleh persamaan kuadrat baru

Contoh 2.23

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya:

a) 7 dan –5

b) $\frac{3}{4}$ dan $\frac{1}{2}$

Penyelesaian:

a) $x_1 = 7$ dan $x_2 = -5$

$x_1 + x_2 = 2$

$x_1\, x_2 = -35$

Substitusikan ke rumus $x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \,.\, x_2 = 0$ diperoleh

$x^2 - (2)\, x + (-35) = 0$

$x^2 - 2x - 35 = 0$

Jadi, persamaan kuadrat yang memiliki akar-akar 7 dan –5 adalah

$x^2 - 2x - 35 = 0$.

b) $x_1 = \frac{3}{4}$ dan $x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 + x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$x_1\, x_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Substitusikan ke rumus $x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \,.\, x_2 = 0$ diperoleh

$x^2 - (\frac{5}{4})\, x + (\frac{3}{8}) = 0$ kalikan seluruhnya dengan 8

$8x^2 - 10x + 3 = 0$

Jadi, persamaan kuadrat yang memiliki akar-akar $\frac{3}{4}$ dan $\frac{1}{2}$ adalah

$8x^2 - 10x + 3 = 0$.

Objek berpikir (Otak) adalah Fenomena alam semesta dan manusia. Kerja otak menghasilkan Iptek

Contoh 2.24

1. Persamaan kuadrat yang sudah diketahui

2. Temukan nilai $x_1 + x_2$ dan $x_1 . x_2$ dari persamaan kuadrat yang sudah diketahui

3. Misal α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat yang akan dicari. Nyatakan hubungan yang ada antara α dan β dengan x_1 dan x_2

4. Selanjutnya, temukan nilai $\alpha + \beta$ dan $\alpha . \beta$

5. Substitusikan nilail $\alpha + \beta$ dan $\alpha . \beta$ ke dalam $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha . \beta = 0$

Tentukan persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya 3 kurangnya dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x + 12 = 0$

Penyelesaian:

a) Misalkan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 2x + 12 = 0$ adalah x_1 dan x_2, maka:

$x_1 + x_2 = -2$

$x_1 \, x_2 = 12$

b) Misalkan persamaan kuadrat baru (*yang akan kita cari*) adalah α dan β maka terdapat hubungan sebagai berikut:

$\alpha = x_1 - 3$

$\beta = x_2 - 3$

c) Menemukan jumlah akar-akar α dan β

$\alpha + \beta = (x_1 - 3) + (x_2 - 3)$

$\alpha + \beta = (x_1 + x_2) - 6$ dimana $x_1 + x_2 = -2$

$\alpha + \beta = (-2) - 6$

$\alpha + \beta = -8$

d) Menemukan hasil kali akar-akar x_1 dan x_2

$\alpha \, \beta = (x_1 - 3)(x_2 - 3)$

$\alpha \, \beta = x_1 \, x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9$

$\alpha \, \beta = x_1 \, x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9$

dimana $x_1 + x_2 = -2$ dan $x_1 \, x_2 = 12$ sehingga:

$\alpha \, \beta = 12 - 3(-2) + 9$

$\alpha \, \beta = 12 + 6 + 9$

$\alpha \, \beta = 27$

e) Substitusikan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat baru dalam rumus $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 . x_2 = 0$ diperoleh:

$x^2 - (-8)\,x + 27 = 0$

$x^2 + 8x + 27 = 0$

6 Temukan persamaan kuadrat baru

Jadi, persamaan kuadrat barunya adalah

$x^2 + 8x + 27 = 0$

CARA LAIN: Kajilah cara berikut ini untuk menjawab contoh 2.24 dengan cara yang berbeda

a) Misalkan:

x = simbol umum untuk akar-akar persamaan kuadrat yang sudah diketahui, yaitu $x^2 + 2x + 12 = 0$

y = simbol umum untuk akar persamaan kuadrat baru (yang dicari)

b) Akar-akar persamaan kuadrat baru 3 kurangnya dari persamaan kuadrat yang sudah diketahui, sehingga memiliki hubungan:

$y = x - 3$

c) Nyatakan x dalam y:

$x = y + 3$

d) Substitusikan $x = y + 3$ dalam $x^2 + 2x + 12 = 0$ diperoleh:

$(y + 3)^2 + 2(y + 3) + 12 = 0$

$(y^2 + 6y + 9) + 2y + 6 + 12 = 0$

$y^2 + 8y + 27 = 0$

e) Ubahlah variabel y ke dalam variabel x diperoleh:

$y^2 + 8y + 27 = 0$

$x^2 + 8x + 27 = 0$

Inilah persamaan baru yang kita cari!

Investigasi

Dalam kelompok belajarmu selidikilah kebenaran aturan-aturan berikut ini.

1. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **n lebihnya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

   $ax^2 + (b - 2na)\,x + (n^2 a - nb + c) = 0$

2. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **n kurangnya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah
$ax^2 + (b + 2na)\,x + (n^2 a + nb + c) = 0$

3. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **n kalinya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $ax^2 + nbx + n^2 c = 0$

4. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\frac{1}{n}$ **kalinya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $n^2 a\, x^2 + nbx + c = 0$

5. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **kebalikan** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $a + bx + cx^2 = 0$

6. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **berlawanan** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $ax^2 - bx + c = 0$

Latihan 2.1

Menyusun Persamaan Kuadrat

1. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya.
   a) 3 dan 7
   b) 2 dan 9
   c) –7 dan 9
   d) 6 dan –3
   e) –5 dan –7
   f) –8 dan –17

2. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya.
   a) 3 dan $\frac{1}{4}$
   b) 5 dan $\frac{1}{3}$
   c) 5 dan $-\frac{1}{2}$
   d) –7 dan $\frac{1}{5}$
   e) $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{3}$
   f) $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{4}$
   g) $\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{5}$
   h) $-\frac{1}{7}$ dan $-\frac{1}{4}$

3. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya.
   a) $2-\sqrt{2}$ dan $2+\sqrt{2}$
   b) $7-\sqrt{3}$ dan $7+\sqrt{3}$
   c) $3+\sqrt{5}$ dan $3-\sqrt{5}$
   d) $4+\sqrt{17}$ dan $4-\sqrt{17}$

4. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 3x - 7 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya lima lebihnya dari akar persamaan kuadrat tersebut.

5. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 8x + 15 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua kali dari akar persamaan kuadrat tersebut.

6. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 3x - 5 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya berlawanan dari akar persamaan kuadrat tersebut.

7. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 7x - 9 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya tiga kalinya akar persamaan kuadrat tersebut.

8. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 3x - 7 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya berkebalikan dari akar persamaan kuadrat tersebut.

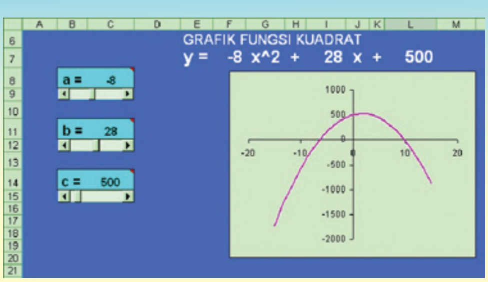
9. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 3x - 12 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya lima kurangnya dari akar persamaan kuadrat tersebut.

10. Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 5x - 7 = 0$. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya sepertiga dari akar persamaan kuadrat tersebut.

Proyek

KELAKUAN GRAFIK FUNGSI KUADRAT

Tahukah kamu kalau nilai-nilai a, b, dan c pada fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ disinyalir sebagai faktor penentu "sifat atau kelakuan" pada grafiknya? Sekarang, gunakan software seperti Equation grapher, Graphmatica ---*yang bisa kamu*



download lewat internet---untuk menyelidiki pengaruh nilai-nilai a, b, dan c terhadap "*kelakuan*" grafiknya. Selidikilah persoalan-persoalan berikut ini.

1. Apa perbedaan antara grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 12x + 35$ dengan $y = -x^2 - 12x + 35$? Sketsalah grafiknya. Dapatkah kamu menarik kesimpulannya?
2. Apa perbedaan antara ketiga grafik fungsi kuadrat berikut ini
   $y = x^2 - x - 12$
   $y = x^2 - x$ dan
   $y = x^2 - x + 12$
3. Apa perbedaan antara ketiga grafik fungsi kuadrat berikut ini
   $y = x^2 - 16$
   $y = x^2 + 4x - 12$ dan
   $y = x^2 - 4x - 12$

Ilmu Pengetahuan dan teknologi tidak akan mampu menyelesaikan permasalahan manusia kecuali harus ada hal lain, yaitu agama, moral dan akhlak

(*Robert Einstein*)

K. Grafik Kuadrat - Bentuk Titik Belok

JIKA kamu telah melakukan investigasi grafik animasi interaktif fungsi kuadrat dalam bentuk titik belok $y = a\,(x - b)^2 + c$, maka kamu akan menemukan hubungan antara fungsi kuadrat dalam bentuk titik belok dengan grafiknya.

Sumber: www.thomasvilletourisme.com

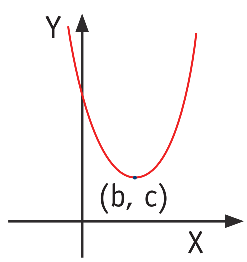
$$y - c = a\,(x - b)^2$$

dilatasi y

Terlepas dari tanda positif atau negatif pada bilangan a, semakin besar bilangan itu grafik semakin pipih.

pergeseran horisontal

Absis pada titik belok

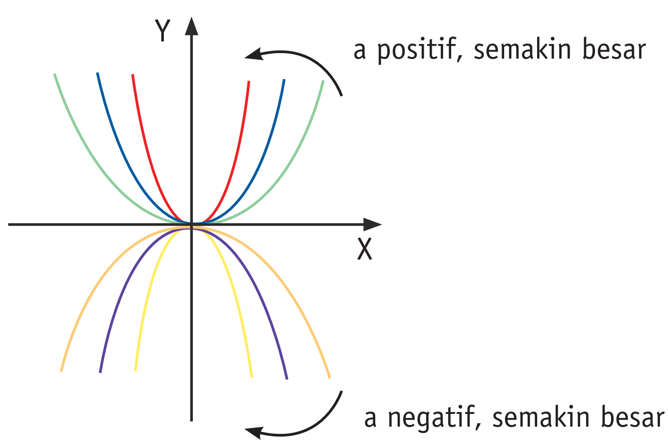


Pergeseran Vertikal

Ordinat pada titik belok
Nilai minimum dari y untuk bentuk grafik $\cup$.
Nilai maksimun dari y untuk bentuk grafik $\cap$.

Jika a *positif* grafik Membuka ke atas,

Jika a *negatif* grafik Membuka ke bawah



Contoh 2.25

Untuk grafik $y = -3(x + 2)^2 - 5$.

a) Nyatakan titik beloknya
b) Nyatakan lebar grafik sebagai S jika lebarnya sama dengan lebar grafik $y = x^2$, sebagai LP jika lebih pipih dari lebar grafik $y = x^2$, LL jika lebih lebar dari lebar grafik $y = x^2$
c) Nyatakan apakah grafiknya adalah jenis minimum ($\cup$) ataukah jenis maksimum ($\cap$). Hitung nilai maksimum atau minimum dari y
d) Temukan titik potong dengan sumbu y
e) Sket grafiknya (*titik potong dengan sumbu x tidak diminta*)

Penyelesaian:

a) Bandingkan $y = -3(x + 2)^2 - 5$ dan $y = a (x - b)^2 + c$ diperoleh
$a = -3$, $-b = 2$ maka $b = -2$, $c = -5$
Titik beloknya $(b, c) = (-2, -5)$

b) $a = -3$, tanpa memperhatikan tanda negatifnya berarti 3. Ini artinya grafik dilakukan penyempitan 3 kali dari lebar grafik $y = x^2$. Jadi grafik lebih pipih (LP)

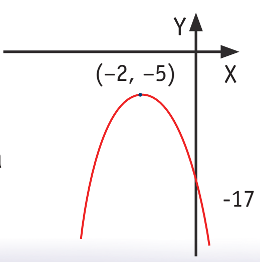
c) Karena nilai $a = -3$ (*negatif*) berati grafik menghadap ke bawah ($\cap$) dan tergolong grafik jenis maksimum. Adapun nilai maksimumnya adalah $(a, b) = (-2, -5)$

d) Titik potong dengan sumbu y ditemukan dengan cara mengganti nilai x dengan 0 pada persamaan.

$$y = -3(x + 2)^2 - 5$$
$$y = -3(0 + 2)^2 - 5$$
$$y = -12 - 5$$

$y = -17$, adakah cara lain?

e) Gunakan informasi di atas untuk melukis grafiknya



Contoh 2.26

Sketlah grafik $y = 2x^2 + 20x + 53$.

Penyelesaian:

a) Diubah dulu dalam bentuk titik belok

$y = 2x^2 + 20x + 53$

$y = 2(x^2 + 10x) + 53$

Diubah dalam kuadrat sempurna $(\frac{1}{2} \cdot 10)^2 = 5^2 = 25$, yaitu tambah dengan 25 dan kurangi 25.

$y = 2(x^2 + 10x + 25 - 25) + 53$

$y = 2(x^2 + 10x + 25) - 50 + 53$

$y = 2(x + 5)^2 + 3$

b) Bandingkan dengan $y = a(x - b)^2 + c$ diperoleh:

$a = 2$, artinya grafik menghadap ke atas dan lebih pipih (LP) dari grafik $y = x^2$

$-b = 5$ maka $b = -5$

$c = 3$

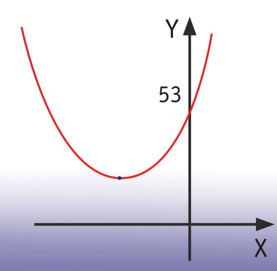
Titik belok $(b, c) = (-5, 3)$

c) Titik potong dengan sumbu y ditentukan dengan mengganti x dengan 0

$y = 2x^2 + 20x + 53$

$y = 53$

d) Gunakan informasi tersebut untuk mensket grafik.



Latihan 2.J

Grafik Fungsi Kuadrat-Bentuk Titik Belok

1. Tentukan titik belok dari tiap-tiap fungsi kuadrat berikut ini:

a) $y = (x - 5)^2$

b) $y = (x + 7)^2 + 3$

c) $y = (x - 2)^2 - 7$

d) $y = (x - 1)^2 + 8$

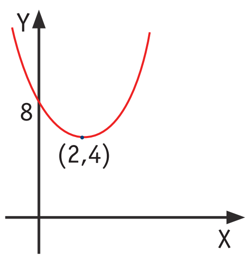
e) $y = 2(x + 3)^2 - 4$

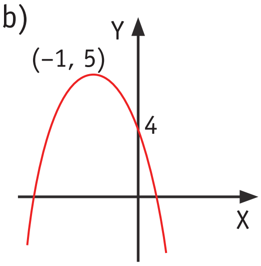
f) $y = 6(x - 2)^2 + 2$

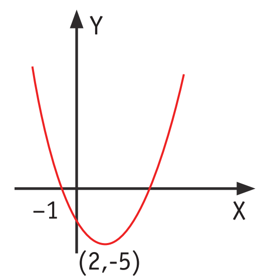
g) $y = -3(x - 4)^2 - 9$
h) $y = -4(x + 6)^2 - 1$
i) $y = -(x - 7)^2 - 3$
j) $y = -(x - 4)^2 + 8$

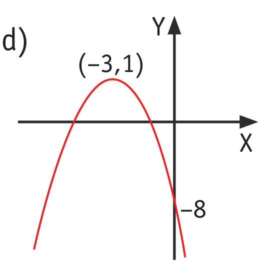
2. Gambarlah grafik fungsi kuadrat
a) $y = (x - 4)^2 + 2$
b) $y = (x - 2)^2 - 3$
c) $y = (x + 5)^2 - 8$
d) $y = (x - 1)^2 - 1$
e) $y = 2(x + 5)^2 - 9$
f) $y = (x - 4)^2 + 4$
g) $y = (x + 1)^2 - 12$
h) $y = -7(x - 3)^2 + 3$
i) $y = -(x - 8)^2 - 9$
j) $y = (1 - x)^2 + 20$

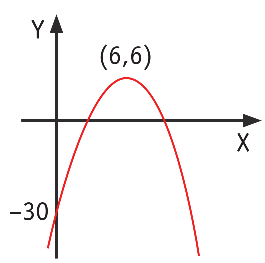
3. Tentukan persamaan fungsi kuadrat dari sejumlah grafik berikut ini:

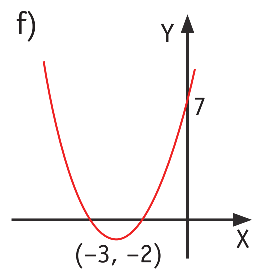
a)


b)


c)


d)


e)


f)


4. Ubahlah fungsi kuadrat berikut dalam titik belok, nyatakan koordinat titik belok dan nilai maksimum atau minimum untuk y.
a) $y = x^2 - 4x + 9$
b) $y = x^2 - 6x + 17$
c) $y = x^2 - 12x + 37$
d) $y = x^2 + 8x + 13$
e) $y = x^2 - 4x - 5$
f) $y = x^2 + 7$
g) $y = x^2 + 18x + 0$
h) $y = 2x^2 - 12x + 22$
i) $y = x^2 + 12x + 15$

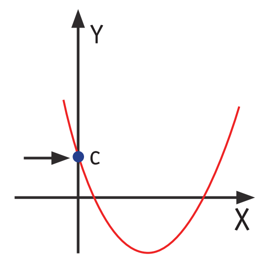
L. Grafik Fungsi Kuadrat - Metode Titik Potong

PADA bagian ini kita akan memikirkan grafik fungsi kuadrat dari bentuk $y = ax^2 + bx + c$. Ketika kita berbicara tentang *sketsa grafik*, itu berarti kita menggambar diagram yang menunjukkan karakter utama grafik – bukan gambar skala grafik yang sebenarnya semisal memakai kertas berpetak ataupun komputer.

Untuk mensketsa grafik fungsi kuadrat, karakter-karakter utama grafik berikut perlu ditemukan.

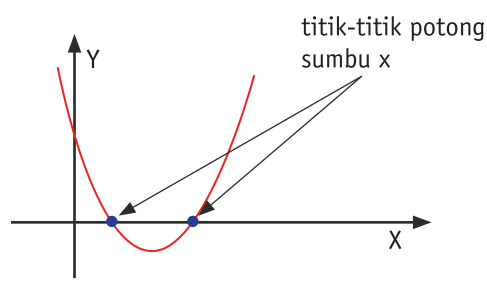
1. Titik potong dengan sumbu y

Titik potong sumbu y ditemukan dengan cara mensubstitusikan $x = 0$ ke dalam persamaan, kemudian temukan nilai untuk y. Nilainya tidak lain adalah c, dari bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$



2. Titik potong dengan sumbu x jika ada

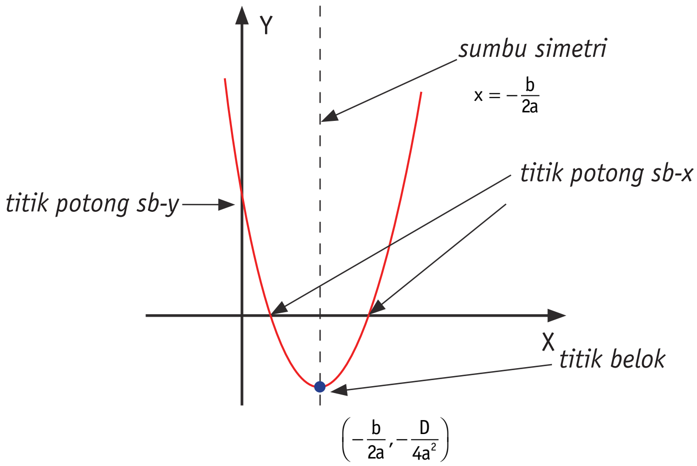
Titik potong sumbu x ditemukan dengan cara mensubstitusikan $y = 0$ ke dalam persamaan. Katakanlah bentuk pemfaktorannya $y = (x - p)(x - q)$. Lalu substitusikanlah $x = 0$ dalam persamaan sehingga $0 = (x - p)(x - q)$. Supaya bernilai benar $x = p$ atau $x = q$.



Kalbu yang sakit harus segera diobati, dipupuk, disiram agar segar kembali. Kalbu yang hidup harus selalu dijaga, disiram, dipupuk, dan digosok agar bertambah cemerlang

3. Koordinat titik belok

Perhatikan bentuk fungsi kuadrat umum $y = ax^2 + bx + c$, dan lengkapkanlah kuadrat sempurna sebagai berikut:



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

Bandingkan dengan fungsi kuadrat titik belok $y = a(x - p)^2 + q$ diperoleh:

$-p = \frac{b}{2a}$ maka $p = -\frac{b}{2a}$ dan $q = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = -\frac{D}{4a^2}$

karena $D = b^2 - 4ac$

Titik beloknya $(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a^2}\right)$

Titik belok fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a^2}\right) \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

Contoh 2.27

Sketlah grafik dari fungsi kuadrat $y = x^2 - 2x - 24$

Penyelesaian:

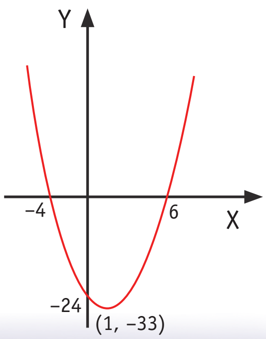
a) Tentukan titik potong dengan sumbu y jika $x = 0$
$y = x^2 - 2x - 24$
$y = -24$

b) memotong sumbu x jika $y = 0$
$0 = x^2 - 2x - 24$
$(x - 6)(x + 4) = 0$
$x = 6$ atau $x = -4$

c) Lengkapkan kuadrat sempurna pada fungsi
$y = x^2 - 2x - 24$
$y = x^2 - 4x + (- 1)^2 - (-1)^2 - 32$
$y = (x - 1)^2 - 1 - 32$
$y = (x - 1)^2 - 33$

d) Bandingkan dengan grafik fungsi kuadrat bentuk titik belok $y = a(x - b)^2 + c$ diperoleh $- b = -1$ maka $b = 1$ dan $c = -33$.
Jadi titik belok $(b, c) = (1, -33)$

e) Nilai $a = 1$ maka grafik menghadap ke atas sama lebarnya dengan grafik $y = x^2$



Latihan 2.K

Grafik Fungsi Kuadrat-Metode Titik Potong

1. Temukan dimana grafik memotong sumbu y pada sejumlah fungsi kuadrat berikut!
   a) $y = x^2 + 9x + 2$ b) $y = -3x^2 + 6x - 4$ c) $y = 4x^2 + 2x$
   d) $y = 6 - x^2$ e) $y = 5x + 2 - 4x^2$ f) $y = 1 - x - x^2$

2. Tentukan perpotongan dengan sumbu x
   a) $y = (x - 1)(x - 6)$ b) $y = (x - 3)(x + 2)$
   c) $y = (x + 5)(x + 1)$ d) $y = (x - 4)(x - 5)$
   e) $y = (x + 7)^2$ f) $y = x(x - 2)$
   g) $y = (3 - x)(4 - x)$ h) $y = (x + 5)(5 - x)$
   i) $y = -x(x + 8)$ j) $y =-3(2 - x)(x + 10)$
   k) $y = 2(x + 6)(x - 6)$ l) $y = -(x + 9)^2$

3. Tentukan perpotongan dengan sumbu x
   a) $y = (2x - 5)(x + 1)$ b) $y = (3x + 8)(x - 6)$
   c) $y = (7x + 2)(2x - 1)$ d) $y = (-3x + 1)(x + 2)$
   e) $y = (x - 9)(4x - 9)$ f) $y = -(x + 1)(6 - 5x)$
   g) $y = (9x - 1)(3x - 1)$ h) $y = (2x + 3)(4x + 1)$
   i) $y = 3x(x + 4)$ j) $y = (Ax + a)(Bx + b)$

4. Dengan menggunakan formula kuadratik, tentukan perpotongan dengan sumbu x
   a) $y = 4x^2 - 2x + 3$ b) $y = -x^2 + 7x - 7$
   c) $y = -2x^2 - 9x - 1$ d) $y = 10 - 3x + 3x^2$

5. Sketlah grafik fungsi kuadrat berikut, tunjukkan perpotongan dengan sumbu x dan y-nya serta titik beloknya.
   (*Petunjuk*: faktorkan terlebih dahulu)
   a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 + 2x + 1$
   c) $y = x^2 + 6x + 8$ d) $y = x^2 + 12x + 35$
   e) $y = x^2 - 8x + 12$ f) $y = x^2 + 2x - 63$
   g) $y = x^2 + 3x + 2$ h) $y = x^2 - 5x + 6$
   i) $y = x^2 -11x - 12$ j) $y = x^2 + 14x + 49$
   k) $y = x^2 - 16x + 64$ l) $y = x^2 + 8x - 153$

6. Sketlah grafik fungsi kuadrat berikut, tunjukkan semua perpotongan dengan sumbu x dan y-nya serta titik beloknya.

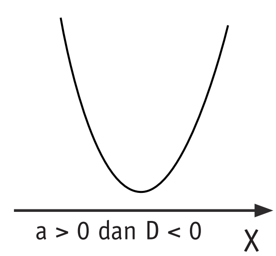
a) $y = 3x^2 + 2x - 8$
b) $y = 5x^2 + 18x - 8$
c) $y = 3x^2 - 4x - 15$
d) $y = 4x^2 - 8x + 3$
e) $y = 8x^2 - 10x + 3$
f) $y = 7x^2 + 18x - 9$
g) $y = 15x^2 + 48x + 9$
h) $y = 9x^2 - 2x - 7$
i) $y = 2x^2 + x - 28$
j) $y = 3x^2 + 5x + 2$
k) $y = 2x^2 - 3x - 9$

7. Sketlah grafik berikut:

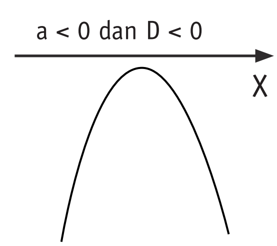
a) $y = -x^2 - 8x + 33$
b) $y = -x^2 + 2x + 3$
c) $y = -x^2 - 18x - 45$
d) $y = -x^2 + 18x - 81$
e) $y = -4x^2 + 12x - 5$
f) $y = -8x^2 - 6x + 5$

M. Grafik Fungsi Kuadrat - Definit Positif dan Negatif

APABILA sebuah grafik fungsi kuadrat seluruhnya berada di atas sumbu x atau untuk setiap nilai x maka y selalu positif, fungsi $y = ax^2 + bx + c$ disebut *definit positif*. Secara matematika, akan terjadi definit positif apabila $a > 0$ dan $D < 0$.



Sebaliknya sebuah grafik fungsi kuadrat akan seluruhnya berada di bawah sumbu x atau untuk setiap nilai x maka y negatif, fungsi $y = ax^2 + bx + c$ disebut *definit negatif*. Akan terjadi definit negatif apabila $a < 0$ dan $D < 0$.



Contoh 2.28

Sketlah grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + x + 9$.

Penyelesaian:

a) Pada fungsi kuadrat $y = x^2 + x + 9$ dimana $a = 1$, $b = 1$ dan $c = 9$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 1^2 - 4(1)(9)$$
$$D = 1 - 36 = -35$$

Oleh karena $a > 0$ dan $D < 0$, maka fungsi ini definit positif. Artinya seluruh grafik fungsi kuadrat posisinya berada di atas sumbu x

b) Perpotongan dengan sumbu y substitusikan $x = 0$ pada

$$y = x^2 + x + 9$$
$$y = 9$$

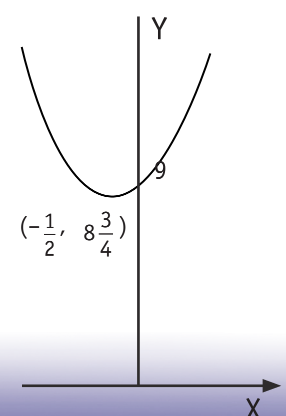
c) Titik belok grafik fungsi

$$y = x^2 + x + 9$$
$$y = (x + \frac{1}{2})^2 + 8\frac{3}{4}$$

bandingkan dengan $y = (x - b)^2 + c$

diperoleh $-b = \frac{1}{2}$ maka $b = -\frac{1}{2}$ dan $c = 8\frac{3}{4}$

Titik belok $(b, c) = (-\frac{1}{2},\ 8\frac{3}{4})$



Latihan 2.L

Grafik Fungsi Kuadrat-Definit Positif dan Negatif

Diantara fungsi berikut, manakah yang definit positif dan definit negatif? Seketlah grafiknya.

a) $y = x^2 + 3x + 6$

b) $y = x^2 - 3x + 5$

c) $y = -x^2 + x - 4$

d) $y = 2x^2 + x + 15$

e) $y = -3x^2 + 2x - 5$
f) $y = (x + 3)^2 - (x - 1) + 5$
g) $y = (-x + 2)(x + 5) - 20$
h) $y = (2x + 1)(1 - x) - 11$
i) $y = -(2x + 3)^2 + (10x - 4) + 5$
j) $y = -(x + 1)(x - 2) - 7$

N. Menentukan Fungsi Kuadrat

Fenomena 1:

Jika diketahui titik belok fungsi kuadrat adalah (p, q) dan kurva melalui titik tertentu (x_1, y_1) maka persamaan fungsi kuadrat adalah:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Untuk menemukan nilai a, selanjutnya substitusikan titik (x_1, y_1) ke persamaan fungsi kuadrat $y = a(x - p)^2 + q$.

Fenomena 2:

Jika diketahui kurva fungsi kuadrat memotong sumbu x di dua titik yaitu $(\alpha, 0)$ dan $(\beta, 0)$ serta kurva melewati titik (x_1, y_1) maka persamaan fungsi kuadrat tersebut adalah:

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Untuk menemukan nilai a substitusikan titik (x_1, y_1) ke persamaan fungsi kuadrat $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

Fenomena 3:

Untuk menemukan persamaan grafik fungsi kuadrat yang melalui tiga titik sembarang (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), maka masing-masing titik disubstitusikan ke bentuk umum fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$. Dari proses ini ditemukan 3 persamaan linier. Lalu temukan nilai a, b, dan c. Substitusikan nilai-nilai itu ke $y = ax^2 + bx + c$.

Contoh 2.29

Tentukan grafik fungsi kuadrat yang titik beloknya (2, –2) dan melalui titik (–1, 7).

Penyelesaian:

a) Titik belok (b, c) = (2, –2) maka b = 2 dan c = –2
Substitusikan ke bentuk umum fungsi kuadrat titik belok
$y = a(x - b)^2 + c$ diperoleh:
$y = a(x - 2)^2 - 2$

b) Selanjutnya temukan nilai a. Kurva $y = a(x - 2)^2 - 2$ melalui (–1, 7) maka substitusikan titik yang dilalui (–1, 7) ke $y = a(x - 2)^2 - 2$.
$7 = a\ (-1 - 2)^2 - 2$
$7 = a\ (-3)^2 - 2$
$7 = 9a - 2$
$a = 1$

c) Substitusikan a = 1 ke $y = a\ (x - 2)^2 - 2$
$y = 1(x - 2)^2 - 2$
$y = x^2 - 4x + 4 - 2$
$y = x^2 - 4x + 2$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $y = x^2 - 4x + 2$.

Contoh 2.30

Tentukan persamaan parabola yang memotong sumbu x di (–2, 0) dan (4, 0) serta melalui titik (–3, 7)

Penyelesaian:

a) Memotong sumbu x di (–2, 0) dan (4, 0) maka $\alpha = -2$ dan $\beta = 4$ lalu substitusikan pada rumus fungsi kuadrat memotong sumbu x di dua tempat $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ diperoleh:
$y = a(x - (-2))(x - 4)$
$y = a(x + 2)(x - 4)$

b) Untuk menemukan nilai a substitusikan titik yang dilalui kurva yaitu $(-3, 7)$ ke dalam $y = a(x + 2)(x - 4)$ diperoleh:

$$7 = a(-3 + 2)(-3 - 4)$$
$$7 = a(-1)(-7)$$
$$7 = 7a$$
$$a = 1$$

c) Substitusikan $a = 1$ ke $y = a(x + 2)(x - 4)$ akan ditemukan fungsi kuadrat yang dimaksud.

$$y = 1(x + 2)(x - 4)$$
$$y = x^2 - 2x + 8$$

Jadi fungsi kuadratnya $y = x^2 - 2x + 8$

Contoh 2.31

Tentukan persamaan parabola yang grafiknya melalui $A(1, -3)$, $B(2, 1)$, dan $C(-2, -3)$.

Penyelesaian:

a) Substitusikan $A(1, -3)$, $B(2, 1)$, dan $C(-2, -3)$ pada bentuk umum $y= ax^2 + bx +c$

Untuk $(1, -3)$ diperoleh $-3 = a + b + c$ .... i)

Untuk $(2, 1)$ diperoleh $1 = 4a + 2b + c$ .... ii)

Untuk $(-2, -3)$ diperoleh $-3 = 4a - 2b + c$ .... iii)

b) Eliminasi (ii) dan (iii)

$$\begin{array}{l} 4a + 2b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = -3 \quad - \\ \hline 4b = 4 \\ \quad b = 1 \end{array}$$

c) Eliminasi (i) dan (ii):

$$\begin{array}{l} a + b + c = -3 \\ 4a + 2b + c = 1 \quad - \\ \hline 3a + b = 4 \end{array}$$

.... iv)

d) Substitusikan $b = 1$ ke (iv):

$3a + b = 4$

$3a + 1 = 4$

$3a = 3$; $a = 1$

e) Untuk $a = 1$ dan $b = 1$ substitusikan ke (i) diperoleh:

$a + b + c = -3$

$1 + 1 + c = -3$

$c = -5$

f) Nilai $a = 1$, $b = 1$ dan $c = -5$ disubstitusikan ke persamaan umum fungsi kuadrat

$y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2 + x - 5$

Jadi fungsi kuadrat yang melalui titik A(1, –3), B(2, 1), dan C(–2, –3) adalah $y = x^2 + x - 5$

Maka tanyakanlah olehmu kepada orang-orang yang berilmu jika kamu tiada mengetahui
(An-Nahl: 43)

Latihan 2.M

Menentukan Fungsi Kuadrat

1. Tentukan persamaan parabola yang melalui:
   a) titik belok P(2, –1) dan titik A(–1, 8)
   b) titik belok P(3, 4) dan titik B(0, –9)
   c) titik belok P(–2, –5) dan titik C(1, 3)
   d) titik belok P(–3, 7) dan titik D(–2, 2)

2) Tentukan persamaan parabola melalui titik-titik berikut:
   a) A(–3, 0), B(4, 0), C(6, 8)
   b) D(3, 0), E(5, 0), F(0, –5)

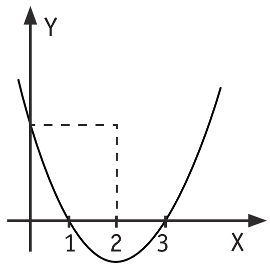
c) P(-3, 0), Q(-7,0), R(1, −9)
d) A(−5, 0), B(1, 0), C(3, 5)

3) Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang berharga nol untuk $x = 2$ dan $x = 3$ serta fungsi berharga 2 untuk $x = 4$.

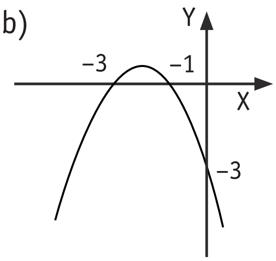
4) Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang memotong sumbu x di R(−3, 0) dan S(5, 0) jika nilai minimumnya 9.

5) Tentukan fungsi kuadrat dari sket berikut ini:

a)



b)



O. Fungsi Kuadrat dalam Kehidupan

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ banyak sekali peranannya dalam memecahkan sejumlah permasalahan sehari-hari yang terkait. Berikut adalah beberapa contohnya.

Contoh 2.32

Dalam setiap minggu, suatu pabrik menjual x barang dengan harga $H(x) = 200 - x$ per unit. Adapun ongkos produksi x barang tersebut adalah $O(x) = 5x + 20$. Tentukan banyaknya barang yang harus dijual agar keuntungan sebesar mungkin. (Catatan: semua harga dalam ratus ribu rupiah).

Penyelesaian:

a) Misal K = adalah keuntungan yang diperoleh dalam 1 minggu (dalam ratus ribu rupiah)

Keuntungan = (Banyaknya barang × Harga Jual) – Ongkos

$K(x) = x\ H(x) - O(x)$

$K(x) = x\ (200 - x) - (5x + 20)$

$K(x) = -x^2 + 200x - 5x - 20$

$K(x) = -x^2 + 195x - 20$

b) Pada fungsi kuadrat $K(x) = -x^2 + 195x - 20$ nilai $a = -1$, $b = 195$ dan $c = -200$. Diskriminan (D) dapat dihitung:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (195)^2 - 4(-1)(-20) \\ &= 38025 - 80 = 37945 \end{aligned}$$

c) Banyaknya barang dan keuntungan maksimum dicapai pada titik ekstrim (titik belok maksimum) yaitu:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a^2}\right) = \left(-\frac{195}{2(-1)}, -\frac{37945}{4(-1)}\right) = (97\frac{1}{2}, 9486,25)$$

Secara matematis banyaknya barang yang harus dibuat adalah $97\frac{1}{2}$ buah dan keuntungan yang dicapai adalah 9486.25 ratus ribu rupiah.

d) Bagaimana dalam kehidupan sehari-hari? Banyak barang yang dibuat harus dalam bentuk bilangan bulat bukan pecahan yaitu 97 buah atau 98 buah. Lalu bagaimana keuntungannya? Substitusikan nilai itu pada $K(x) = -x^2 + 195x - 20$

Untuk x = 97 maka K(97) = -(97)2 + 195(97) – 20 = 9486

Untuk x = 98 maka K(98) = -(98)2 + 195(98) – 20 = 9486

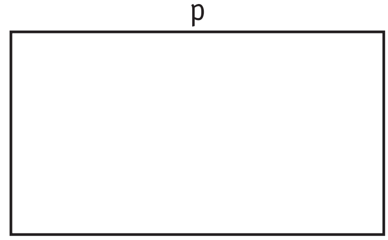
Apa artinya? Keuntungan maksimum yang bisa dicapai adalah sebesar Rp948.600.000,00 dengan per minggu dengan memproduksi barang sebanyak 97 buah atau 98 buah. Mengapa demikian?

Contoh 2.33

Pak Ali memiliki pagar kawat yang panjangnya 200 m. Dengan pagar itu, ia ingin membuat kebun untuk penyemaian bunga anggrek. Dapatkah kamu membantu Pak Ali berapa panjang dan lebar kebun yang bisa dibuat agar memilki luas terbesar (maksimum).

Penyelesaian:

a) Modelkan terlebih dahulu
   p = panjang kebun
   l = lebar kebun
   K = 2p + 2l = 200
   p + l = 100
   p = 100 – l .... i)



b) Misalkan L = luas kebun anggrek yang akan dibuat
   L = p × l .... ii)

c) Substitusikan (i) ke (ii) diperoleh:
   $L = (100 - l) \times l$
   $L = 100l - l^2$

d) $L = 100l - l^2$ merupakan fungsi kuadrat,
   dimana a = –1, b = 100, c = 0
   D = b2 – 4ac = (100)2 – 4(–1)(0) = 10.000

   $(\text{lebar}, L_{mak}) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a^2}\right)$

   $(\text{lebar}, L_{mak}) = (50{,}2500)$
   l = 50 maka p = 100 – l = 100 – 50 = 50

   Jadi, luas maksimum kebun anggrek yang bisa dibuat adalah 2.500 m^2 dengan ketentuan p = 50 m dan l = 50 m.

Investigasi

LUAS MAKSIMUM

DALAM bagian ini kamu akan melakukan investigasi untuk menemukan luas maksimum secara riil, tidak hanya sekedar menyelesaikan permasalahan luas maksimum dengan rumus titik belok. Oleh karena itu sediakan sejumlah batang korek api (minimal 60 batang korek) dan lakukan aktivitas berikut ini dalam kelompok belajarmu. Sertakan hasil ini dalam portofoliomu.

1. Ambil 12 batang korek api. Susunlah bangun persegipanjang sehingga terbentuk bangun yang memiliki luas terbesar (*maksimum*).

   Petunjuk: Mulailah penyelidikanmu ini untuk lebar bangun 1 batang korek api, 2 batang korek api dan seterusnya. Catatlah hasilmu dalam tabel seperti berikut:

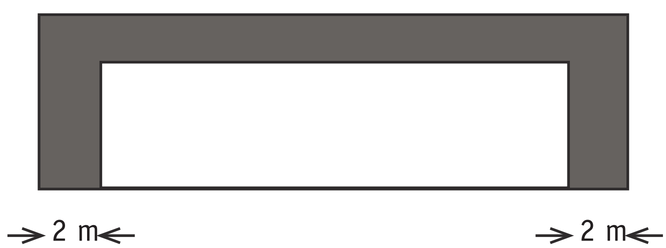
l	1	2	3	...	n
P					
L					

2. Lakukan hal yang sama untuk 16, 20, 24, dan 60 batang korek api. Bagaimana kesimpulanmu?
3. Ambil 80 batang korek api. Lakukan aktivitas seperti di atas. Berapakah luas maksimumnya? Dapatkah kamu mengkajinya dengan menggunakan kaidah fungsi aljabar untuk luas maksimum ini?
4. Ambil 12 batang korek api dan susunlah persegi panjang dimana salah satu sisinya adalah dinding kelasmu. Berapakah luas maksimumnya?
5. Lakukan hal yang sama dengan nomor 4 untuk 16, 20, 24, dan 60 batang korek api. Bagaimana kesimpulanmu? Dapatkah kamu mengkajinya dengan menggunakan kaidah fungsi aljabar untuk luas maksimum ini?

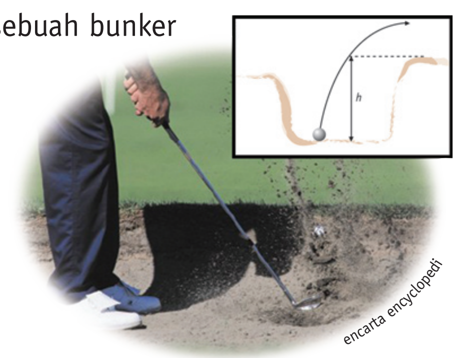
Soal-soal Kontekstual

1. Pak Hasan memiliki pagar kawat yang panjangnya 200 m. Dengan pagar itu, ia ingin membuat kebun untuk penyemaian bunga anggrek. Salah satu sisi kebunnya adalah tembok rumahnya. Dapatkah kamu membantu Pak Hasan untuk menemukan berapa panjang dan lebar kebun agar memiliki luas maksimum.

2. Suatu lapangan yang berbentuk persegi panjang, panjangnya dua kali lebarnya. Pada tepi sebelah luar dari tiga sisi lapangan tersebut dibuat jalur jalan yang lebarnya 2 meter. Jika luas seluruh jalan (bagian yang diarsir pada gambar) 128 m^2. Berapakah luas lapangan tersebut?



3. Sebuah bola golf dipukul dari dasar sebuah bunker seperti ditunjukkan oleh gambar di samping. Ketinggian h meter bola di atas tanah dinyatakan dengan rumus $h = 10t - 5t^2 - 1$, dimana t detik adalah waktu bola terbang.
   a. Berapa kedalaman bunker?
   b. Kapan bola berada di sejajar dengan bibir bunker?
   c. Kapan bola berada pada ketinggian 4 meter?



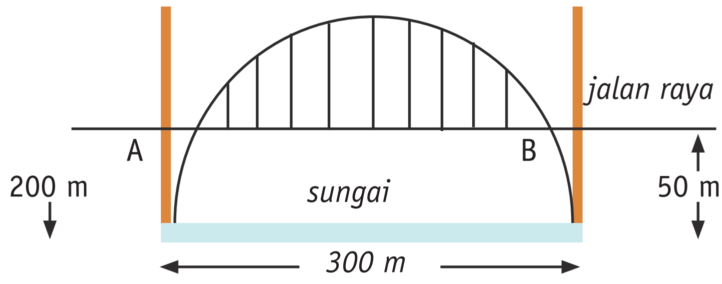
4. Luas permukaan tangki pengangkut semen dari perusahaan tertentu dinyatakan dengan $4\pi r^2 + 24\pi r$, dimana r adalah jari-jari tangki. Jika luas permukaan tangki 60 m^2, tentukan jari-jari tangki tersebut.

5. Jarak komet d, dari salah satu bulan di Jupiter ditentukan dengan persamaan $d = 47{,}9t^2 + 0{,}03t - 908{,}7$ dengan t adalah banyaknya jam sejak komet tampak pada tanggal 28 Juni 2001. Kapan komet akan mencapai bulan tersebut?

Sumber: www.thunderblots.info

7. Seorang perenang melompat dari papan lompat dengan lintasan yang dapat dinyatakan sebagai h = -0,5d2 + 2d + 5, dengan h adalah ketinggian perenang di atas air pada jarak d dari papan lompat. Hitunglah panjang d, yaitu lintasan horisontal sejak ia melompat dari papan lompat sampai ia menyentuh air.

8. Konstruksi sebuah jembatan adalah sebagai berikut.

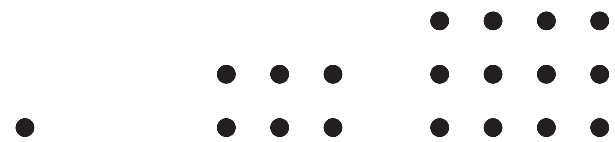


Jarak horisontalnya adalah x meter kaki lengkungan. Dan tinggi lengkungan adalah h meter di atas permukaan sungai. Lengkungan itu mengikuti kaidah $h = \frac{-2}{225}x^2 + \frac{8}{3}x$. Sepuluh tiang dipasang antara jalan raya dan lengkungan.

Hitunglah berapa jarak antara masing-masing tiang penyangga?

9. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan persamaan $h(t) = -5t^2 + 600t$, dimana h ketinggian dalam meter dan t waktu dalam detik. Tentukanlah tinggi maksimum peluru tersebut?

10. Diagram berikut menunjukkan gagasan bilangan persegi panjang



$w = 1$	$w = 1$	$w = 1$
$N = 1$	$N = 1$	$N = 1$

Rumus hubungan antara banyaknya titik dan lebar persegi panjang adalah $N = w(w + 1)$, dimana w menyatakan lebar persegi dan N menyatakan banyaknya titik.

a. Berapa banyaknya titik jika lebar persegi panjang tersebut 6 titik?

b. Berapa lebar persegi panjang jika banyaknya titik 272?

P. Matematika dalam Dunia Kerja

GAPURA LENGKUNG ST. LOUIS MISSOURI

Eero Saarinen (1910 – 1961) adalah seorang arsitektur dan desainer Amerika ternama di pertengahan abad 20. Saarinen lahir pada tanggal 10 Agustus 1910 di Kirkkonummi Finlandia. Anak dari seorang arsitek Eliel Saarinen. Keluarganya berimigrasi ke Amerika tahun 1923. Eero Saarinen lulus dari Universitas Yale pada jurusan arsitektur pada tahun 1934.

Sumber: www.retrorepublic.co.uk

Sumber: trouble.philadelphiaweekly.com

Gapura St. Louis untuk mengenang peranan St. Louis dan sejarah ekspansi Jefferson

Tahun 1948 ia mulai membangun gapura St. Louis dan baru selesai di tahun 1964. Stainless steel adalah bahan yang paling dominan dalam pembuatan gapura tersebut. Ia menggunakan aturan matematika dalam membuat gapura itu, yaitu: $y = -\frac{2}{95}(x - 95)^2 + 190$ dimana y adalah tinggi dan x adalah panjang horisontal jembatan. Dapatkah kamu menghitung berapa lebar dan tinggi maksimum jembatan itu?

Inspirasi Pagi .....

Tahun 1954, adalah atlit Inggris Roger Bannister, di Oxford Inggris, orang yang pertama yang berlari sejauh satu mil kurang dari 4 menit. Sebelum ia mencapai keberhasilan ini, para atlit dan dokter-dokter olah raga meyakini bahwa berlari satu mil dalam waktu 4 menit "mustahil" dilakukan oleh manusia. Seorang dokter dengan serius mengatakan bahwa jika seorang manusia lari cepat maka jantungnya akan pecah karena terlalu dipaksa.

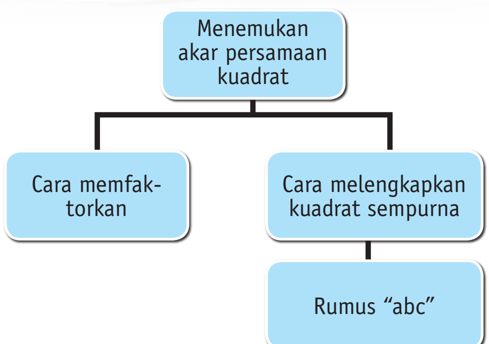
Sumber: encarta encyclopedi

Roger Bannister tidak mau terhalang oleh ramalan ini. Iapun berlari lebih cepat dari siapapun dalam sejarah. Setelah ribuan atlet berlatih selama puluhan tahun tanpa memecahkan rekor 4 menit ini. Pada tanggal 6 Mei 1954, Bannister berhasil melakukannya, menakjubkan dunia, dengan waktu 3 menit 59,4 detik.

Masih banyak orang mengatakan bahwa hal itu sebagai sebuah kebetulan. Bannister adalah manusia super dan tak seorangpun dapat melakukannya lagi. Namun, segera setelah itu, rekornya dipecahkan oleh John Landy dari Australia dengan kecepatan 3 menit 58 detik, pada bulan Agustus 1954 di Vancouver, Canada. (*Sumber: Quantum Learning - Kaifa*)

Rangkuman

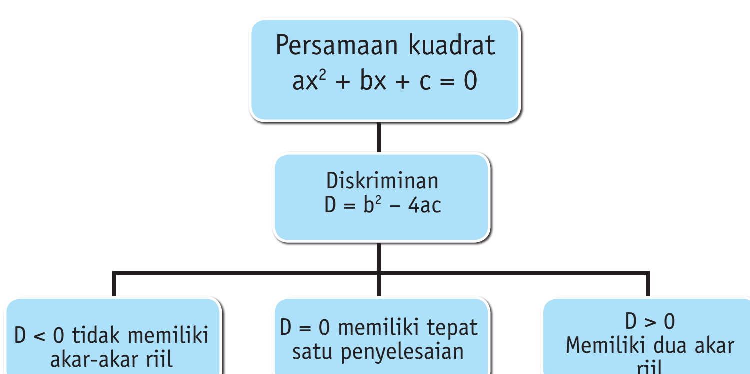
1.



2. Jika $ax^2 + bx + c = o$ maka akar-akar persamaan kuadratnya adalah:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.



4. Untuk sembarang persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

5. Untuk sembarang persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

6. Untuk sembarang persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku:
   a) $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$
   b) $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$
   c) $x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{-b^3 + 3abc}{a^3}$
   d) $x_1^4 + x_2^4 = \dfrac{b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c}{a^4}$

7. JIika diketahui kedua akar persamaan kuadrat yaitu x_1 dan x_2 maka persamaan kuadratnya adalah $x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \,.\, x_2 = 0$

8. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya n lebihnya dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah
$ax^2 + (b - 2na)\, x + (n^2\, a - nb + c) = 0$

9. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **n kurangnya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah
$ax^2 + (b + 2na)\, x + (n^2\, a + nb + c) = 0$

10. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **n kalinya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $ax^2 + nbx + n^2 c = 0$

11. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\mathbf{\frac{1}{n}}$ **kalinya** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $n^2 ax^2 + nbx + c = 0$

12. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **kebalikan** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $a + bx + cx^2 = 0$

13. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya **berlawanan** dari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $ax^2 - bx + c = 0$

14. Titik belok fungsi kuadrat bentuk $y - c = a\,(x - b)^2$ adalah (b, c)

15. Titik belok fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a^2}\right)$ dimana $D = b^2 - 4ac$

16. Grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ membuka ke atas jika $a > 0$

17. Grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ membuka ke bawah jika $a < 0$

18. Sumbu simetri dari fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah $x = \frac{-b}{2a}$

19. Nilai maksimum atau minimum dari fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah $-\frac{D}{4a^2}$

20. Fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dikatakan definit positif (seluruh grafiknya berada di atas sumbu x) apabila $a > 0$ dan $D < 0$

21. Fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dikatakan definit positif (seluruh grafiknya berada di atas sumbu x) apabila $a > 0$ dan $D < 0$

22. Jika diketahui titik belok fungsi kuadrat adalah (p, q) dan kurva melalui titik tertentu (x_1, y_1) maka persamaan fungsi kuadrat adalah:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Untuk menemukan nilai a substitusikan titik (x_1, y_1) ke persamaan fungsi kuadrat $y = a(x - p)^2 + q$.

23. Jika diketahui kurva fungsi kuadrat memotong sumbu x di dua titik yaitu $(\alpha, 0)$ dan $(\beta, 0)$ serta kurva melewati titik (x_1, y_1) maka persamaan fungsi kuadrat tersebut adalah:

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Sedang, untuk menemukan nilai a substitusikan titik (x_1, y_1) ke persamaan fungsi kuadrat $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

24. Untuk menemukan persamaan grafik fungsi kuadrat yang melalui tiga titik sembarang (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), maka masing-masing titik disubstitusikan ke bentuk umum fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$. Dari proses ini ditemukan 3 persamaan linier. Lalu temukan nilai a, b, dan c. Substitusikan nilai-nilai itu ke $y = ax^2 + bx + c$.

Ujilah dirimu

Soal Pilihan Ganda

1. Himpunan penyelesaian dari $5x^2 + 4x + 12 = 0$ adalah ....

   a) $\{-2, \frac{5}{6}\}$
   b) $\{2, -\frac{5}{6}\}$
   c) $\{2, \frac{5}{6}\}$
   d) $\{-2, -\frac{6}{5}\}$
   e. $\{-2, \frac{6}{5}\}$

2. Akar-akar dari $2x^2 - 3x - 9 = 0$ adalah x_1 dan x_2
   Nilai dari $x_1^2 + x_2^2 = ...$

   a) $11\frac{1}{4}$
   b) $6\frac{3}{4}$
   c) $2\frac{1}{4}$
   d) $-6\frac{3}{4}$
   e) $-11\frac{1}{4}$

3. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 8x + c = 0$ adalah x_1 dan x_2
   Jika $x_2 = 3x_1$ maka nilai c sama dengan ....

   a. 6
   b. 8
   c. 10
   d. 12
   e. 15

4. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 24 = 0$ adalah x_1 dan x_2
   Nilai terbesar dari $(6x_1 - 2x_2) = ...$

   a. 54
   b. 36
   c. 34
   d. 28
   e. 20

5. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Jika $x_1^2 - 2x_1 x_2 + x^2 = 8a$, maka nilai a adalah ....

   a. 2
   b. 4
   c. 6
   d. 8
   e. 10

6. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 5 dan –2 adalah ....
   a. $x^2 + 3x + 10 = 0$
   b. $x^2 + 3x - 10 = 0$
   c. $x^2 - 3x + 10 = 0$
   d. $x^2 - 3x - 10 = 0$
   e. $x^2 - 10x + 3 = 0$

7. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 dan –4 adalah ....
   a. $x^2 - 7x + 12 = 0$
   b. $x^2 - 7x - 12 = 0$
   c. $x^2 - x + 12 = 0$
   d. $x^2 + x + 12 = 0$
   e. $x^2 + x - 12 = 0$

8. Jika nilai diskriminan persamaan kuadrat $2x^2 - 9x + c = 0$ adalah 121, maka nilai c adalah ....
   a. –8
   b. –5
   c. 2
   d. 5
   e. 8

9. Persamaan kuadrat $x^2 + (p + 1)x + 2p - 1 = 0$ mempunyai dua akar sama maka p memenuhi adalah ....
   a. – 5 atau – 1
   b. $p \leq 1$ atau $p \geq 5$
   c. $1 \leq p \leq 5$
   d. 1 atau 5
   e. $1 < p < 5$

10. Persamaan kuadrat $(m - 1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar real, maka nilai adalah ....
    a. $-1 \leq m \leq 2$
    b. $-2 \leq m \leq 1$
    c. $1 \leq m \leq 2$
    d. $m \leq -2$ atau $m \geq 1$
    e. $m \leq -1$ atau $m \geq 2$

11. Persamaan kuadrat $4x^2 + (p - 14)x + (7 + p) = 0$ mempunyai akar-akar yang saling berkebalikan. Nilai p yang memenuhi adalah....
    a. 3
    b. 2
    c. 1
    d. –2
    e. –3

12. Persamaan kuadrat $mx^2 + (m - 5)x - 20 = 0$ akar-akarnya saling berlawanan. Nilai m adalah ....
    a. 4
    b. 5
    c. 6
    d. 8
    e. 12

13. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 4 = 0$ adalah p dan q
Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3p dan 3q adalah ....
a. $x^2 - 3x + 6 = 0$
b. $3x^2 - 3x + 6 = 0$
c. $x^2 - 3x + 18 = 0$
d. $x^2 + 3x - 18 = 0$
e. $x^2 + 3x + 18 = 0$

14. Persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 4 = 0$ adalah p dan q. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $p - 2$ dan $q - 2$ adalah ....
a. $x^2 - 9x + 18 = 0$
b. $x^2 + 9x - 18 = 0$
c. $x^2 + x + 2 = 0$
d. $x^2 - x + 2 = 0$
e. $x^2 - x - 2 = 0$

15. Persamaan kuadrat yang akar-akanya dua kali dari akar persamaan kuadrat $x^2 + 8x + 10 = 0$ adalah ....
a. $x^2 + 16x + 20 = 0$
b. $x^2 + 16x + 40 = 0$
c. $x^2 + 16x + 80 = 0$
d. $x^2 + 16x + 120 = 0$
e. $x^2 + 16x + 160 = 0$

16. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $6x^2 + 5x + 1 = 0$, maka persamaan kuadrat yang akar-akarnya kebalikan dari akar-akar persamaan tersebut adalah ....
a. $x^2 - 5x - 6 = 0$
b. $x^2 - 5x + 6 = 0$
c. $x^2 - 6x + 5 = 0$
d. $x^2 + 5x + 6 = 0$
e. $x^2 + 6x + 5 = 0$

17. Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - x - 2 = 0$ adalah p dan q. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(p + 1)$ dan $(q + 1)$ adalah:
a. $3x^2 + 5x + 2 = 0$
b. $3x^2 - 5x + 2 = 0$
c. $3x^2 - x + 2 = 0$
d. $3x^2 - x - 4 = 0$
e. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

18. Persamaan sumbu simetri dari grafik fungsi $f(x) = 4 + 3x - x^2$ adalah ...
a) $x = -1\frac{1}{2}$
b) $x = -\frac{3}{4}$
c) $x = \frac{3}{4}$
d) $x = 1\frac{1}{3}$
e) $x = 1\frac{1}{2}$

19. Grafik fungsi kuadrat yang persamaannya adalah $y = 6 + px - 5x^2$ memotong sumbu x. Salah satu titik potongnya adalah (–2, 0), maka p sama dengan ....
    a. –13
    b. –7
    c. 6
    d. 7
    e. 13

20. Gambar di samping merupakan sebagian dari kurva sebuah parabola. Bentuk fungsinya adalah ....
    a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 6x$
    b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$
    c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$
    d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$
    e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x$

Soal Uraian

21. Tentukan fungsi kuadrat yang mempunyai maksimum (1, 3) dan melalui titik (0,0)!
22. Tentukan nilai k agar fungsi $f(x) = x^2 + (k - 1)x + 9$ menyinggung sumbu x!
23. Sebuah saluran air yang berbentuk segi empat dan bagian atasnya terbuka akan dibuat dari seng yang lebarnya 60 cm. Tentukanlah ukuran saluran air itu agar luas penampangnya maksimum
24. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + px + 1 = 0$ maka temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah
    $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ dan $x_1 + x_2$