1

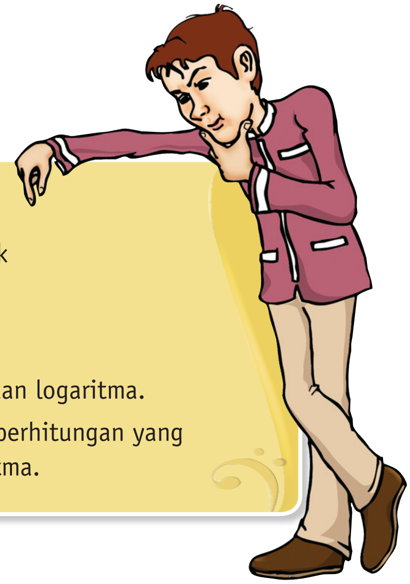
BENTUK PANGKAT, AKAR, DAN LOGARITMA

"PERUMPAMAAN (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. Dan Allah Maha Luas (kurnia-Nya) lagi Maha Mengetahui."

(Q.S: Al-Baqarah : 261)

Sumber: imagegoogle.co.id

Ada tujuh pekarangan, setiap pekarangan ditanami tujuh pohon durian. Setiap pohon durian memiliki tujuh cabang. Setiap cabang menghasilkan tujuh buah durian. Berapa banyak buah durian seluruhnya? Dapatkah kamu menyatakan banyak seluruh durian dalam bentuk yang lebih sederhana?



Standar Kompetensi

Memecahkan masalah yang berkaitan dengan bentuk pangkat, akar, dan logaritma

Kompetensi Dasar

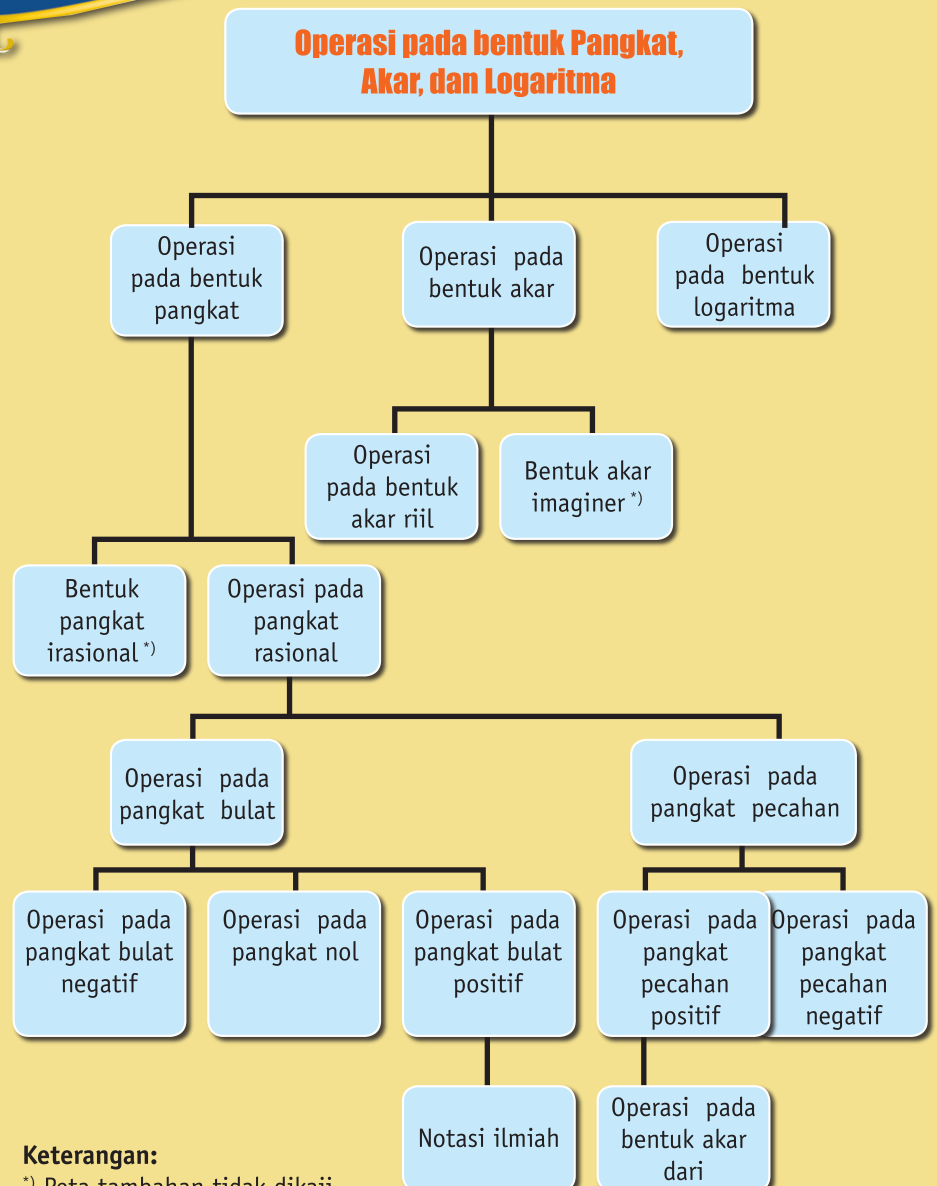
1. Menggunakan aturan pangkat, akar, dan logaritma.
2. Melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan yang melibatkan pangkat, akar, dan logaritma.

Indikator

Setelah mempelajari pokok bahasan dalam bab ini, kamu diharapkan mampu:

1. Mengubah bentuk pangkat negatif ke pangkat positif dan sebaliknya.
2. Mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat dan sebaliknya.
3. Melakukan operasi aljabar pada bentuk pangkat, dan akar.
4. Menyederhanakan bentuk aljabar yang memuat pangkat rasional.
5. Merasionalkan bentuk akar.
6. Mengubah bentuk pangkat ke bentuk logaritma dan sebaliknya.
7. Melakukan operasi aljabar dalam bentuk logaritma.
8. Menentukan syarat perpangkatan, penarikan akar, dan logaritma.
9. Menyederhanakan bentuk aljabar yang memuat bentuk pangkat, akar, dan logaritma.
10. Membuktikan sifat-sifat sederhana tentang bentuk pangkat, akar, dan logaritma.

Peta Konsep



Keterangan:
*) Peta tambahan tidak dikaji

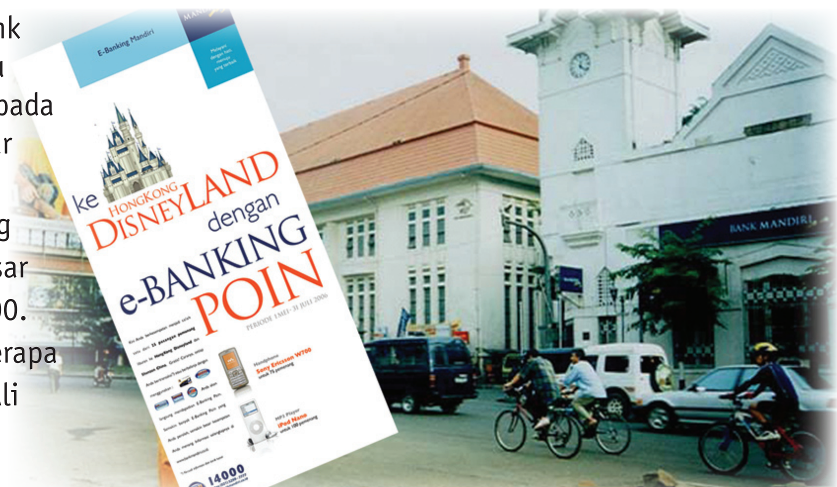
Kata Kunci

Pangkat positif	Pangkat negatif	Bentuk akar
Bentuk pangkat	Pangkat rasional	Bentuk logaritma

Pada waktu di SMP/MTs, kamu sudah mempelajari bentuk bilangan berpangkat dan logaritma. Misalnya kamu menjumpai bentuk-bentuk seperti 3^7, 2^3 dan log 3.

Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan 3^7 itu? Benar, bentuk 3^7 tidak lain adalah sebagai bentuk sederhana dari perkalian panjang $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Kehadiran bentuk bilangan berpangkat dalam aritmatika berfungsi untuk menuliskan kembali bentuk perkalian beruntun ---*yang panjang*--- ke bentuk yang lebih sederhana. Dengan bentuk bilangan berpangkat yang sederhana ini, diharapkan dapat memberikan kemudahan dalam melakukan operasi hitung. Adapun logaritma sangat membantu, untuk menemukan nilai x (pangkat) dari persamaan $3^x = 11$. Coba sekarang kamu perhatikan ilustrasi berikut ini!

Sebuah bank memberikan suku bunga majemuk pada penabung sebesar 1,2% per tahun. Pak Ali menabung di bank itu sebesar Rp200.000.000,00. Tahukah kamu berapa besar uang Pak Ali setelah 4 tahun?



Sumber: images.google.co.id

Kuis Apersepsi

Sudah siapkah kamu berpetualang di belantara “Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma“ ini? Untuk mengukur apakah kamu termasuk orang yang sudah siap atau tidak, kamu bisa menguji dirimu sendiri lewat kuis apersepsi ini. Kamu siap?

1. Bentuk 3^5 senilai dengan....
   a. 15   c. 81
   b. 54   d. 243

2. Bentuk $2^3 \times 2^2$ senilai dengan....
   a. 2   c. 2^6
   b. 2^5 d. 2^9

3. Bentuk $\sqrt{81} + \sqrt{36}$ senilai dengan ...
   a. 15 c. 25
   b. 20 d. 30

4. Bentuk ab(a + b) sama dengan...
   a. $a^2b + ab^2$ c. $a^2b + b$
   b. $a + ab^2$ d. $a^2b^2 + ab$

5. Bentuk a^3 senilai dengan....
   a. a + a + a c. a × 2a
   b. a + 2a d. a × a × a

A. Sejarah Aritmatika

Sumber: www.tacomacc.edu

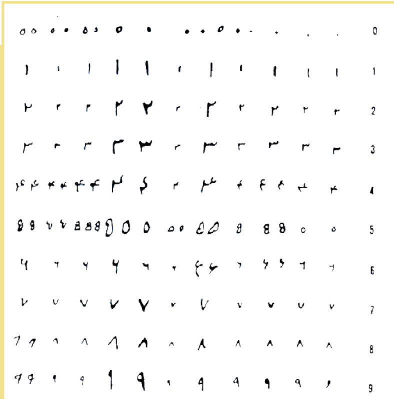
Abu Abdullah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi
(780 – 850 M/3 H)

Tahukah kamu, apa aritmatika itu? Kapan aritmatika mulai ada? Untuk menjawabnya, perlu kita telusuri kembali fakta sejarah kaum muslimin di abad pertengahan. Aritmatika adalah cabang ilmu matematika yang berkaitan dengan hitungan. Dalam bahasa Arab aritmatika sering dikenal dengan nama ilmu "***al-Hisab***".

Adapun ruang lingkup kajiannya adalah melakukan proses perhitungan atas benda-benda yang didapati dalam kehidupan kita sehari-hari. Perhitungan tersebut meliputi proses penjumlahan, pengurangan, perkalian serta pembagian.

Untuk kepentingan perhitungan tersebut, para ahli matematika menciptakan satu set simbol bilangan yang merunjuk pada "kuantitas" tertentu. Misalnya, simbol 1 memiliki nilai tertentu, yang tentunya akan berbeda dengan simbol 2, 3 dan seterusnya. Simbol-simbol inilah yang kita sebut dengan "angka".

Dengan nilai tetap dari tiap-tiap angka tersebut, kita dengan mudah dapat menjumlahkan bilangan tertentu, dari sekelompok benda. Misalnya 52 ekor kambing ditambah dengan 47 ekor kambing akan sama dengan 99 ekor kambing, tanpa harus mendatangkan dan menghitung satu persatu secara riil 99 ekor kambing tersebut dihadapan kita.



Perkembangan angka Arab
Sumber: Islamic Science
An Illustrated Study

Kapan sistem bilangan desimal itu mulai ada? Sejarah kelahiran bilangan desimal, tidak bisa dilepaskan dari kisah kemenangan bangsa Arab setelah menguasai Alexandria pada tahun 641 M.

Mulai saat itu, bangsa Arab tetap mempertahankan dan mengembangkan matematika Yunani, untuk berabad-abad lamanya. Mereka membawa gagasan Yunani ke Eropa Barat setelah menduduki Spanyol pada tahun 747 M. Ketika itu, negara-negara barat masih tenggelam dalam tahun-tahun kegelapan atau yang sering dikenal dengan istilah "***the dark age***".

Di samping itu, bangsa Arab juga banyak mendapatkan pengaruh pemikiran matematika para ilmuwan Hindu di India, seperti Brahmagupta (598 – 660 M) dan Arya-Bhata (475 – 550 M).

Dari pengaruh Yunani dan India tersebut, maka bangsa Arab telah mewarisi simbol dari 1 sampai 9, yang biasa digunakan dalam perhitungan sehari-hari saat itu. Setelah para ilmuwan muslim memahami gagasan aritmatika Yunani dan Hindu, mereka mulai mengembangkan cara-cara mereka sendiri. Namun dalam perkembangannya, aritmatika mengalami kompleksitas yang tidak mudah, ketika harus menghitung jumlah yang tidak sedikit, seperti satu juta, milyar dan sebagainya. Oleh karena itu, para ilmuwan Islam berusaha keras untuk menciptakan sistem bilangan yang dapat digunakan untuk kepentingan tersebut. Muncullah sebuah sistem bilangan desimal yang memanfaatkan simbol nol sebagai tanda kelipatan sepuluh, seribu dan sebagainya.

Lalu siapakah penemu angka nol itu? Sebuah sumbangan yang sangat cerdas untuk aritmatika dibuat oleh **Abu Abdullah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi** (780 – 850 M) --- *seorang ahli matematika muslim kelahiran Khwarizm Kheva, sebuah kota di sebelah selatan sungai Oxus Uzbekistan* -- yang telah menciptakan angka nol atau "*sifr*" untuk pertama kalinya pada tahun 830 M, dalam sebuah karyanya yang terkenal yaitu ***Al-Maqala fi Hisab al-Jabr wa al-Muqabalah*** (*The Book of Summary in the Proces of Calculation for*

Compulsion and Equation). Mulai saat itu, lahirlah satu sistem bilangan desimal baru yang dilengkapi dengan simbol nol, sebagai tanda kelipatan sepuluh, kelipatan seratus, kelipatan seribu, kelipatan sejuta dan seterusnya, sebagaimana yang kita gunakan sekarang ini.

Aritmatika, selanjutnya, mendapat tempat yang luas dari para filosuf atau ilmuwan muslim pada saat itu. Misalnya saja, oleh Ibnu Sina dalam bukunya yang berjudul ***"al-Syifa"***, ia telah mengabadikan aritmatika dalam bukunya tersebut dengan judul ***"al-Hisab"***.

Tahukah Kamu?

Perangko ini dibuat pada tanggal 6 september 1983 di Uni Soviet untuk mengenang kelahiran al-Khwarizmi's yaitu ulang tahun yang ke sekitar 1200.

Sumber: www-cs-staff.stanford.edu

B. Perkalian Beruntun

Sebelum kamu mempelajari tentang bentuk pangkat, akar, dan logaritma, marilah kita kaji firma Allah ta’ala dalam surah Al-Baqarah ayat 261 berikut ini.

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمۡوَٰلَهُمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتۡ
سَبۡعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ سُنۢبُلَةٖ مِّاْئَةُ حَبَّةٖۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُۚ
وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ٢٦١

Artinya:

Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir: seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. Dan Allah Maha Luas (kurnia-Nya) lagi Maha Mengetahui.

Dalam ayat tersebut, orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah ta’ala, balasannya digambarkan dalam bahasa arimatika sebagai bentuk perkalian beruntun 1 × 7 × 100 ----*hanya Allahlah yang Maha Tahu maksud yang sesunguhnya*----

Lalu apa yang terjadi jika perkalian beruntun itu menggunakan bilangan yang sama? Misalnya, perkalian beruntun 5 buah bilangan yang sama, yaitu 2 × 2 × 2 × 2 × 2? Perkalian ini dapat dinyatakan ke dalam bentuk bilangan berpangkat yaitu 2^5. Dapatkah kamu menuliskan bentuk berpangkat dari perkalian beruntun 4 buah abjad yang sama, yaitu a × a × a × a? Benar, bentuk perpangkatannya tidak lain adalah a^4. Mudah bukan? Bisakah kamu memberikan contoh yang lain?

Contoh 1.1

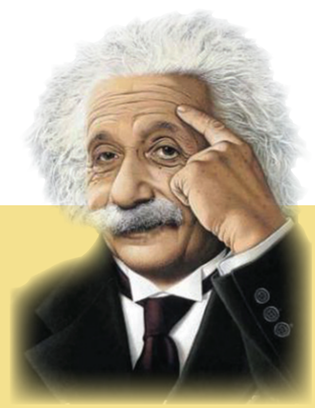
Nyatakanlah perkalian beruntun berikut ini ke dalam bentuk perpangkatan!

a) $5 \times 5 \times 5$
b) $7 \times 7 \times 3$
c) $k \times k \times k \times k \times k$
d) $10 \times 10 \times 10 \times 2 \times 2$
e) $a \times b \times a \times b \times a$

Penyelesaian:

a) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$
b) $7 \times 7 \times 3 = 7^2 \times 3$
c) $k \times k \times k \times k \times k \times k \times k = k^7$
d) $10 \times 10 \times 10 \times 2 \times 2 = 10^3 \times 2^2$
e) $a \times b \times a \times b \times a = a \times a \times a \times b \times b = a^3 \times b^2$

C. Bentuk Pangkat


Albert Einstein
(1879 – 1955 M)

Sumber: www.gak.nk.de

1. Pangkat Bulat Positif

Dari kajian di atas, kamu tentu tahu bahwa $4 \times 4 \times 4$ itu dapat dinyatakan sebagai 4^3. Angka 4 pada bentuk 4^3 selanjutnya disebut *bilangan pokok* atau *absis*, sedangkan angka 3 pada bentuk 4^3 disebut *pangkat* atau *eksponen*. Contoh lain, misalnya $b \times b \times b \times b \times b$ sama dengan b^5. Dalam bentuk perpangkatan b^5 maka b disebut *bilangan pokok*, sementara angka 5 disebut *pangkat*.

Tahukah kamu bahwa gagasan penggunaan bentuk bilangan berpangkat, telah lama dipahami oleh manusia dalam menyederhanakan bentuk perhitungan? Tengoklah, **Albert Einstein** (1879 – 1955) --*seorang ahli fisika Amerika kelahiran Jerman*-- memunculkan pemikiran bahwa massa dan energi sebanding.

Jika massa m (*kilogram*) dari sebuah substansi, diubah seluruhnya ke dalam bentuk energi E (*joules*) maka oleh Albert Einstein, hal tersebut diformulasikan secara matematis sebagai:

$$E = m \times c^2$$

Ia mencoba menunjukkan bahwa massa dari suatu benda meningkat pada saat kecepatannya meningkat, c adalah kecepatan cahaya. Perhatikan bentuk perpangkatan c^2 dalam rumus tersebut, c disebut basis atau bilangan pokok, sedangkan angka 2 disebut pangkat atau eksponen.

Jika c menyatakan kecepatan cahaya, tahukah kamu berapakah kecepatan cahaya itu? Kecepatan cahaya adalah sekitar 300.000.000 m/detik. Angka tersebut dapat dituliskan sebagai perkalian beruntun adalah sebagai berikut:

$$3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \text{ m/detik}$$

adalah jika kecepatan ini dinyatakan sebagai bentuk bilangan berpangkat yaitu 3×10^8 km/detik. Umumnya, para ahli fisika lebih menyukai menggunakan bilangan berpangkat 3×10^8 m/detik ini, daripada bilangan 300.000.000 m/detik dalam perhitungannya. Mengapa?

Teka-teki

Teka-teki ini ditulis oleh Ahmes (1700 SM) dalam buku aritmatika kuno 'Papyrus' buku tersebut sampai saat ini masih tersimpan di Museum London teka-tekinya sebagai berikut:

Ada tujuh rumah, dalam setiap rumah terdapat tujuh kucing, setiap kucing memakan tujuh tikus, setiap tikus memakan tujuh apel, setiap apel memiliki tujuh biji. Berapakah jumlah objek semuanya?

(*Petunjuk: Banyaknya obyek yang dimaksud adalah banyaknya rumah ditambah banyaknya kucing, ditambah lagi banyaknya tikus, dan seterusnya*).

Contoh 1.2

Nyatakanlah perkalian beruntun berikut ini ke dalam bentuk perpangkatan! Tentukan bilangan pokok dan pangkatnya.

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3$

b) $m \times m \times m \times m \times m$

Penyelesaian:

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$
Bilangan pokok = 3
Pangkat = 4

b) $m \times m \times m \times m \times m = m^5$
Bilangan pokok = m Pangkat = 5

Contoh 1.3

Buktikan bahwa setiap pernyataan aritmatika berikut ini benar! Dapatkah kamu menarik kesimpulan umumnya?

a) $2^2 \times 2^3 = 2^5$

b) $\frac{2^5}{2^2} = 2^3$

c) $(2^3)^2 = 2^6$

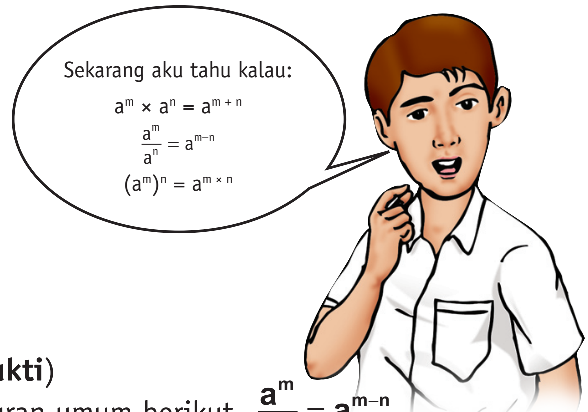
d) $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^3$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Penyelesaian:

a) $2^2 \times 2^3 = 2^5$
Ruas kiri = $2^2 \times 2^3$
Ruas kiri = $(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$
Ruas kiri = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
Ruas kiri = 2^5
Ruas kiri = ruas kanan (**terbukti**)
Hasil ini menggambarkan aturan umum berikut.
$a^m \times a^n = a^{m+n}$

b) $\dfrac{2^5}{2^2} = 2^3$



Ruas kiri = $\dfrac{2^5}{2^2}$

Ruas kiri = $\dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2}$

Ruas kiri = $2 \times 2 \times 2$

Ruas kanan = 2^3

Ruas kiri = ruas kanan (**terbukti**)

Hasil ini menggambarkan aturan umum berikut $\boldsymbol{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$.

c) $(2^3)^2 = 2^6$

Ruas kiri = $(2^3)^2$

Ruas kiri = $(2^3) \times (2^3)$

Ruas kiri = $(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

Ruas kiri = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Ruas kiri = 2^6

Ruas kiri = ruas kanan (**terbukti**)

Hasil ini menggambarkan aturan umum berikut $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \times n}}$.

d) $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^3$

Ruas kiri = $(2 \times 3)^2$

Ruas kiri = $(2 \times 3) \times (2 \times 3)$

Ruas kiri = $2 \times 3 \times 2 \times 3$

Ruas kiri = $2 \times 2 \times 3 \times 3$

Ruas kiri = $2^2 \times 2^3$

Ruas kiri = ruas kanan (**terbukti**)

Hasil ini menggambarkan aturan umum berikut
$\boldsymbol{(a \times b)^m = a^m \times b^m}$.

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2^2}{3^2}$

Ruas kiri = $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

Ruas kiri = $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}$

Ruas kiri = $\frac{2 \times 2}{3 \times 3}$

Ruas kiri = $\frac{2^2}{3^2}$

Ruas kiri = ruas kanan (**terbukti**)

Hasil ini menggambarkan aturan umum berikut $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Contoh 1.4

Sederhanakanlah perhitungan berikut ini:

a) $\frac{(2^3 \times 2)^7}{2^3}$

b) $\frac{a^7 \times b^5 \times c^4}{(a^2 \times b \times c)^3}$

Penyelesaian:

a) $\frac{(2^3 \times 2)^7}{2^3} = \frac{(2^4)^7}{2^3} = \frac{2^{28}}{2^3} = 2^{(28-3)} = 2^{25}$

b) $\frac{a^7 \times b^5 \times c^4}{(a^2 \times b \times c)^3} = \frac{a^7 \times b^5 \times c^4}{a^6 \times b^3 \times c^3}$

$= a^{(7-6)} \times b^{(5-3)} \times c^{(4-3)}$

$= a \times b^2 \times c$

Empat hal untuk dicamkan dalam kehidupan; Berpikir jernih tanpa bergegas atau bingung, Mencintai setiap orang dengan tulus, Bertindak dalam segala hal dengan motif termulia, Percaya kepada Tuhan tanpa ragu sedikitpun. (*Helen Keller*)

2. Pangkat Bulat Negatif dan Nol

Pada bagian 1, pangkat yang dibahas berupa bilangan positif. Kira-kira hasilnya seperti apa ya, kalau sebuah bilangan dipangkatkan dengan *"nol"*? Bagaimana jika sebuah bilangan dipangkatkan dengan *"bilangan bulat negatif"*? Untuk itu perhatikan dan pikirkan dengan cermat sejumlah contoh berikut.

Contoh 1.5

Sederhanakan perhitungan $\frac{2^3}{2^5}$

Penyelesaian:

Cara 1: Menuliskan faktor-faktor dari bentuk perpangkatan

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2}$$

Cara 2: Menggunakan aturan perpangkatan bilangan bulat

Gunakan aturan $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ sehingga:

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{(3-5)} = 2^{-2}$$

Dari hasil yang didapat pada cara 1 dan 2, diperoleh hubungan berikut:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

Hasil tersebut menggambarkan aturan umum berikut.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Contoh 1.6

Sederhanakan perhitungan $\dfrac{2^3}{2^3}$

Penyelesaian:

Cara 1: Menuliskan faktor-faktor dari bentuk perpangkatan

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2} = 1$$

Cara 2: Menggunakan aturan perpangkatan bilangan bulat

Gunakan aturan $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ sehingga:

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{(3-3)} = 2^0$$

Dari hasil pada perhitungan cara 1 dan 2, kita temukan satu hubungan bahwa $2^0 = 1$.

Untuk diingat

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

b) $a^m : m^n = a^{m-n}$

atau $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

d) $(ab)^m = a^m b^m$

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

f) $a^0 = 1$

g) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ dimana $a \neq 0$

Latihan 1.A

Bentuk pangkat

1. Dengan menggunakan aturan-aturan pangkat, sederhanakan pernyataan-pernyataan berikut, berikan jawabanmu dalam pangkat positif.

a) $x^3 \times x^4 \times x^5$

b) $x^2 \times x^3 \times x^4$

c) $3a^{-2} b^{-3} \times 2a^4 b^{-1}$

d) $2x^{-5} y^{-2} \times 3x^2 y^{-3}$

e) $\dfrac{15m^3 n^4 p^7}{5m^2 n^2 p}$

f) $\dfrac{12x^2 y^5 p^2}{4x^4 y^4 z}$

g) $\dfrac{8c^4 d^2}{3c^3 d^{-2}}$

h) $\dfrac{15b^3 c^4}{3bc^{-4}}$

i) $\dfrac{4g^{-3} h^{-5}}{12g^{-5} h^5}$

j) $\dfrac{7m^{-2} n^{-3}}{14m^{-4} n^2}$

k) $(3x^2 b^3)^4$

l) $(2a^4 b^2)^3$

m) $(a^2 y^{-3})^{-2}$

n) $(x^3 b^{-5})^{-4}$

o) $\left(\dfrac{3a^3 b^4}{a^{-5}}\right)^{-1}$

p) $\left(\dfrac{3a^3 b^4}{a^{-5}}\right)^{-1}$

q) $\dfrac{(-2a^3 b^2)^3}{(3ab^{-1})^2} \times \dfrac{6a^2 b^{-1}}{(a^{-2} b)^4}$

r) $\dfrac{(-3x^2 y^3)^2}{(2x^{-1} y)^3} \times \dfrac{4x^4 y^{-3}}{(x^{-1} y)^3}$

s) $\dfrac{6a^3 b^{-2}}{(-4a^2 b)^2} : \dfrac{12a^{-3} b^{-2}}{8a^{-2} b^{-1}}$

t) $\dfrac{7a^{-5} b^2}{(-2a^3 b)^3} : \dfrac{21a^{-3} b^2}{4a^{-1} b}$

2. Sederhanakanlah pernyataan-pernyataan berikut. Nyatakanlah jawabanmu ke dalam bentuk pangkat positif dengan bilangan basis terkecil.

a) $\dfrac{8 \times 2^{-5} \times 3^{-5}}{9 \times 2^{-7} \times 81}$

b) $\dfrac{16 \times 3^{-1} \times 32}{2^{-7} \times 9}$

c) $(-3 \times 2^{-5})^2$

d) $(2^4 \times 5)^{-1}$

e) $\left(\dfrac{8 \times 3^5}{2^{-7} \times 9}\right)^{-2}$

f) $\left(\dfrac{27 \times 2^{-5}}{64 \times 3^{-5}}\right)^{-1}$

3. Sederhanakan

a) $\dfrac{a^{3x} \times a^{-y}}{a^{2x} \times a^{3y}}$

b) $\dfrac{b^{-2x} + b^{3y}}{b^{x} \times b^{-2y}}$

c) $\dfrac{7a^{2m} \times 3a^{-n}}{42a^{5n-6n}}$

d) $\dfrac{3b^{3x} \times 2b^{-y}}{24b^{2x-3y}}$

e) $\dfrac{12^{n}}{4^{n}}$

f) $\dfrac{12^{n}}{4^{n}}$

g) $\dfrac{6^{2-x} \times 2^{-x}}{3^{x-1}}$

h) $\dfrac{4^{1-x} \times 6^{-x}}{3^{2-x}}$

Problem Solving

PAPAN CATUR

Tahukah kamu, berapa banyaknya *persegi* yang terdapat pada sebuah papan catur?

Sumber: www.ideum.com

Seandainya dibuat sebuah papan catur yang berukuran 15 × 15 satuan, dapatkah kamu menghitung berapa banyaknya persegi yang ada? Deskripsikan bagaimana kamu bisa menemukan jawaban itu!

3. Notasi Ilmiah (*Scientific Notation*)

Sebelum mengkaji lebih jauh apa itu notasi ilmiah, marilah kita simak percakapan si Mat dan Si Dul berikut ini.

Apa Notasi Ilmiah itu?

Si Dul : Aduh, aku lagi pusing banget nih Mat.

Si Mat : Memangnya ada apa Dul?

Si Dul : Bayangin deh Mat..., guru fisikaku ngasih soal dengan perhitungan yang rumit. Aku nggak bisa nih.

Si Mat : Kayak apa soalnya?

Si Dul : Nih, tak bacakan soalnya ya.... Berapakah energi yang dipancarkan oleh sebuah substansi seberat 0,000002 kg, yang bergerak dengan kecepatan cahaya, yaitu 300 000 000 m/detik? Males nih Mat, terlalu banyak angka nolnya.

Si Mat : Aduh Dul..., begitu saja kok repot. Kan angka-angka itu bisa disederhanakan dulu dalam bentuk "*notasi ilmiah*", lalu dikalikan, dan jangan lupa kamu mesti "hafal" aturan perhitungan pada bentuk perpangkatan.

Si Dul : Notasi ilmiah itu apa sih Mat?

Si Mat : Nih lihat catatanku ini!

Untuk diingat

Sebuah bilangan dikatakan dalam bentuk standar (*standard form*) atau notasi ilmiah (*scientific notation*) apabila dituliskan dalam bentuk berikut

$$\mathbf{A \times 10^n \text{ dengan } a \leq A < 10,\ A \in R,\ n \in B}$$

Si Dul : Kerjakan sekalian deh Mat.

Si Mat : Aduh, dasar pemalas. Nih perhatikan! Pertama kita perlu mengubah bilangan 0,000002 kg, ke dalam bentuk notasi ilmiah, menjadi 2×10^{-6} kg. Kecepatan cahaya 300 000 000 m/det menjadi 3×10^{8} m/det. Mengapa?

Si Dul : Nggak tahu deh Mat!

Si Mat : Begini, nilai A yang bisa dibuat dari angka 0,000002 itu adalah 2, sebab $1 \leq A < 10$. Untuk menjadi angka 2, kita mesti menggeser koma ke kanan sebanyak 6 kali. Banyaknya pergeseran inilah yang nantinya sebagai nilai n. **Tapi ingat!** *Pergeseran ke kanan menghasilkan pangkat negatif*. sehingga nilai n adalan –6. Jadi 0,000002 sama dengan 2×10^{-6}. Sudah jelas belum?

Si Dul : Lalu bagaimana caranya kok angka 300 000 000 menjadi 3×10^{8}?

Si Mat : Nilai A yang bisa dibuat dari angka 300 000 000 itu adalah 3, sebab $1 \leq A < 10$. Untuk menjadi 3. kita mesti menggeser koma ke kiri sebanyak 8 kali. Banyaknya pergeseran inilah yang nantinya sebagai nilai n. Pergeseran ke kiri menghasilkan pangkat positif. Sehingga, nilai n pada bentuk $A \times 10^{n}$ adalah 8. Jadi, 300 000 000 sama dengan 3×10^{8}

Si Dul : Sekarang saya sudah jelas. Selanjutnya, akan kumasukkan ke formulanya Einstein, dan kuhitung dengan aturan-aturan pada bentuk perpangkatan. Kamu cek ya Mat.

$E = m \times c$

$E = 2 \times 10^{-6} \times (3 \times 10^{8})^{2}$ joule

$E = 2 \times 10^{-6} \times 3^{2} \times 10^{16}$ joule

$E = 2 \times 9 \times 10^{-6} \times 10^{16}$ joules

$E = 18 \times 10^{10}$ joules

Si Mat : Perhitunganmu benar Dul. Kau sekarang hebat.

Contoh 1.7

Tuliskan dalam bentuk notasi ilmiah:

a) 5730

b) 29840000000

c) 0,00000489

Penyelesaian:

a) $5730 = 5{,}730 \times 10^{3}$

b) $29840000000 = 2{,}984 \times 10^{10}$

c) $0{,}00000489 = 4{,}89 \times 10^{-6}$

Suatu peradaban akan bangkit ketika manusia didominasi oleh *ilmu Illahiyah* dan *nilai-nilai mulia*. Peradaban akan stagnan, ketika manusia terlalu dipenuhi oleh pikiran materialistik dan benda-benda. Peradaban akan hancur dan lumat, ketika manusia di dalamnya terlalu dijejali oleh nafsu serakah (Malik bin Nabi)

TIPS

Teknologi dalam Matematika

BILANGAN EKSPONEN DALAM KALKULATOR

BANYAK jenis kalkulator yang memiliki fasilitas untuk menyajikan sebuah bilangan ke dalam bentuk notasi ilmiah. Ketika kamu menggunakan kalkulator untuk melakukan perhitungan, barangkali kamu pernah menemukan bentuk hasil perhitungan sebagai berikut.

2	.	5	8		0	5

Ini berarti bilangan $2{,}58 \times 10^5$

Untuk memasukkan bilangan pada kalkulator ke bentuk notasi ilmiah, maka gunakanlah tombol EXP.

Jadi, untuk memasukkan bilangan $2{,}58 \times 10^5$ kita tekan

2 . 5 8 EXP 5

Beberapa kalkulator akan mengubah bilangan bentuk notasi ilmiah menjadi sebuah bilangan desimal biasa.

2 . 5 8 EXP 5

Akan muncul dilayar sebagai bilangan 258000

Contoh 1.8

Gunakan kalkulator untuk menghitung volume benda luar angkasa yang memiliki ukuran panjang, lebar, dan tinggi masing-masing $1{,}6 \times 10^5$ km, $3{,}25 \times 10^8$ km, dan $4{,}753 \times 10^4$ km.

Penyelesaian:

$V = p \times l \times t$

$V = 1{,}6 \times 10^5 \times 3{,}25 \times 10^8 \times 4{,}753 \times 10^4$

Pada kalkulator:

1	.	6	EXP	5	×	3	.	2	5	EXP
5	×	4	.	7	3	5	EXP	4	=	

$= 2.47156 \times 10^{18}$

Volumenya kira-kira $2{,}47 \times 10^{18}$ km^3

Latihan 1.B

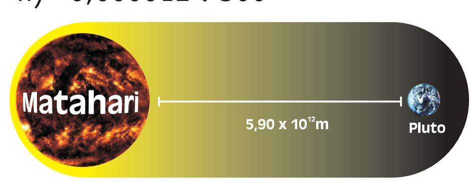
Notasi Ilmiah

1. Tulislah tiap-tiap bilangan berikut ini dalam notasi ilmiah:
   a) 25,7
   b) 15264
   c) 130000000
   d) 4,3
   e) 2
   f) 0,0047
   g) 0,000000000072
   h) 13570000000000

2. Tulislah ke dalam bilangan dasar biasa:
   a) $1{,}5 \times 10^4$
   b) $8{,}96 \times 10^8$
   c) $8{,}7 \times 10^{-5}$
   d) $4{,}30^2 \times 10^{-9}$
   e) 6×10^0
   f) $2{,}5 \times 10^5$

3. Hitunglah dan nyatakan hasilnya dalam notasi ilmiah:
   a) $4{,}56 \times 10^3 \times 1{,}2 \times 10^5$
   b) $5{,}3 \times 10^{-2} \times 5{,}0 \times 10^{-5}$
   c) $(2{,}3 \times 10^2) : (1{,}1 \times 10^4)$
   d) $(9{,}6 \times 10^{-5}) : (1{,}2 \times 10^7)$
   e) 573000×1100
   f) $0{,}00069 \times 0{,}00000009$
   g) $1540 : 110$
   h) $0{,}000612 : 300$

4. Jarak matahari ke Pluto adalah sekitar $5{,}90 \times 10^{12}$ m. Berapa kilometer jarak ini? Tuliskan jawabanmu ke dalam bilangan dasar biasa.



5. Massa dari planet Merkuri adalah sekitar 3×10^{23} kg. Berapa gram berat ini? Tuliskan jawabanmu ke dalam bilangan dasar biasa.

6. Setiap menit tubuh perlu mengganti sekitar 115 000 000 sel darah merah. Nyatakan ke dalam notasi ilmiah banyaknya sel darah merah yang diganti selama 1 jam.
7. Suara merambat pada kecepatan sekitar 1400 meter per detik di dalam air. Nyatakan dalam notasi ilmiah waktu yang diperlukan oleh suara untuk merambat dalam kolam renang sejauh 50 meter.

4. Pangkat Rasional

Tahukah kamu, apa yang dimaksud dengan bilangan rasional? Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk pecahan $\frac{m}{n}$ dimana m dan n adalah bilangan bulat dan $n \neq 0$. Oleh karena itu bentuk perpangkatan rasional adalah bentuk perpangkatan dengan pangkat atau *eksponennya* berupa bilangan rasional atau pecahan.

Untuk memahami "kelakuan" pangkat rasional, perhatikan sejumlah contoh dan investigasi berikut.

Contoh 1.9

Temukan nilai dari bilangan berpangkat rasional berikut.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $81^{\frac{1}{2}}$

Penyelesaian:

a) Ubahlah bilangan pokok menjadi bentuk perpangkatan dengan bilangan pokok terendah. Lalu gunakan hukum-hukum perpangkatan

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\times\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

b) Lakukan seperti bagian (a)

$$64^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6\times\frac{1}{3}} = 2^2 = 4$$

Latihan 1.C

Pangkat Rasional

1. Temukan nilai dari masing-masing perpangkatan berikut ini!

   a) $9^{\frac{1}{2}}$ c) $27^{\frac{1}{3}}$ e) $125^{\frac{1}{3}}$ g) $256^{\frac{1}{4}}$

   b) $16^{\frac{1}{2}}$ d) $81^{\frac{1}{4}}$ f) $243^{\frac{1}{5}}$ h) $32^{\frac{1}{5}}$

2. Temukan nilai dari:

   a) $9^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{4}}$

   b) $25^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{2}{3}}$

   c) $32^{\frac{2}{5}} \times 81^{\frac{3}{4}}$

   d) $\dfrac{243^{\frac{1}{4}}}{9^{\frac{1}{2}}}$

   e) $\dfrac{125^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}}}{81^{\frac{1}{4}}}$

   f) $\dfrac{(256 \times 9)^{\frac{1}{2}}}{\left(27^{\frac{1}{3}} + 16^{0}\right)}$

3. Sederhanakan!

   a) $m^{\frac{1}{2}} \times m^{\frac{3}{4}}$

   b) $a^{\frac{3}{8}} : a^{\frac{1}{4}}$

   c) $\dfrac{p^{\frac{3}{5}} \times p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{10}}}$

   d) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} \times y^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{1}{2}} \times y^{-\frac{2}{5}}}$

   e) $\dfrac{p^{\frac{1}{4}} \times q^{\frac{2}{3}} \times r^{-\frac{3}{5}}}{p^{\frac{1}{2}} \times q^{-\frac{1}{3}} \times r^{-\frac{8}{5}}}$

4. Jika nilai x = 4, y = 27 dan z = 9 maka hitunglah nilai dari:

   $$\frac{x^{\frac{1}{4}} \times y^{\frac{2}{3}} \times z^{-\frac{3}{5}}}{x^{-\frac{7}{4}} \times y^{-\frac{1}{3}} \times z^{-\frac{13}{5}}}$$

5. Sederhanakan!

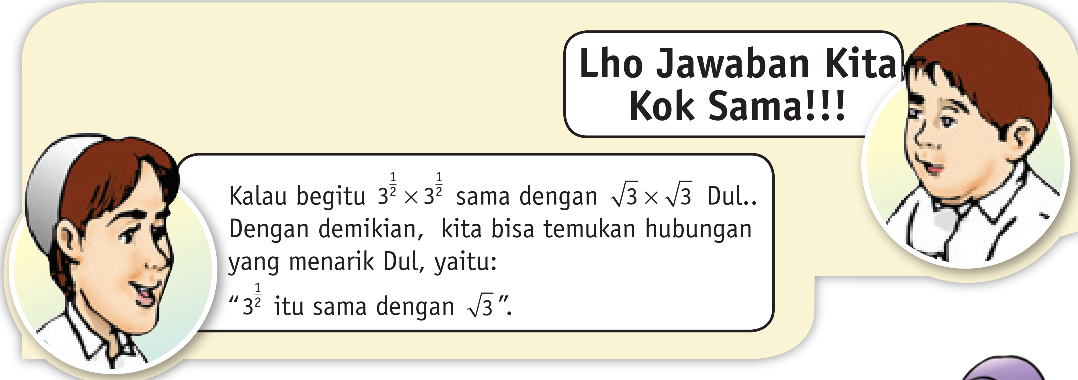
   $$\frac{2^{n} + 2^{n-2}}{2^{n}}$$

2. Menyatakan ke dalam bentuk akar

Bagaimana bentuk akarnya?

Mat...., aku suka dengan persoalan $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ini karena aku pernah menghadapi persoalan $\sqrt{4} \times \sqrt{4}$. Kita tahu kan, kalau $\sqrt{4}$ = 2, sehingga $\sqrt{4} \times \sqrt{4}$ dapat aku selesaikan sebagai 2 x 2 = 4. Tapi Mat...., aku juga temukan "*cara lain*" yaitu $\sqrt{4} \times \sqrt{4} = \sqrt{4 \times 4} = \sqrt{16} = 4$. Eh... ternyata, hasilnya juga sama kan Mat. Nah.., sekarang aku gunakan cara terakhirku ini. Lihat $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9} = 3$. Jadi "$\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ = 3".

Kalau aku sih gampang Dul..... Kan sudah ada rumusnya $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Jadi $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$. Aku juga sudah dapat jawabnya Dul.., yaitu "$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ = 3".



Sudah Tahukah Kamu

$\sqrt{3}$ sebenarnya berasal dari $\sqrt[2]{3}$, yang dibaca "*akar dua dari tiga*". Namun, dalam konsensus matematika cukup dituliskan sebagai $\sqrt{3}$, cukup dibaca "akar tiga". Jadi $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3}$.

Sekarang, mari kita lakukan investigasi seperti yang dilakukan oleh si Mat dan si Dul, pada persoalan berikut ini.

Investigasi

Temukan hasil perhitungan dari $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}$ dan $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$? Adakah sesuatu yang menarik dari kedua perhitungan tersebut? Mari kita coba! Kalau diselesaikan berdasarkan aturan perpangkatan maka

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})} = 5^1 = 5$$

Apabila diselesaikan dengan cara mengalikan bilangan-bilangan yang berada di bawah tanda akar diperoleh

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5$$

Lihat kedua perhitungan tersebut, hasilnya "sama" kan!

Ini berarti bahwa: $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5}$

Oleh karenanya dapat diambil kesimpulan $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

Sekarang mari kita temukan hubungan yang menarik antara bentuk *pangkat pecahan* dan *bentuk akarnya*. Perhatikan kembali hasil eksplorasi di atas, yaitu $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = \sqrt[2]{2}$ dan $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$. Dapatkah kamu temukan bentuk akar dari sejumlah bentuk perpangkatan, seperti $3^{\frac{1}{4}}$ dan $7^{\frac{1}{5}}$? Lalu, bisakah kamu temukan aturan umumnya?

Untuk diingat

Untuk setiap $a \in R$ bukan negatif, $n \in B^{+}$ maka berlaku:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Menyatakan ke dalam bentuk akar

Mengapa harus menyatakan ke dalam bentuk akar?

Mat.., lalu bagaimana bentuk akarnya jika diketahui bilangan berpangkatnya $5^{\frac{2}{3}}$

Aku punya ide..Dul. Ubah dulu pangkat dari $5^{\frac{2}{3}}$ menjadi bentuk perkalian yaitu $5^{2\cdot\frac{1}{3}}$atau $(5^2)^{\frac{1}{3}}$. Kita kan sudah tahu, kalau bentuk $a^{\frac{1}{n}}$ dapat dinyatakan sebagai $\sqrt[n]{a}$.
Jadi, pada $(5^2)^{\frac{1}{3}}$, anggap saja $a = 5^2$ dan $n = 3$ maka bentuk $\sqrt[n]{a}$ nya adalah $\sqrt[3]{5^2}$. Dari sini dapat kita tarik kesimpulan bahwa:
"$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$" Mudah bukan?

Anak-anak, dapatkah kamu menyatakan bentuk-bentuk perpangkatan seperti $7^{\frac{2}{5}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, dan $b^{\frac{m}{n}}$ ke dalam bentuk akar dengan cepat?

Untuk diingat

Untuk setiap $a \in R$ bukan negatif, $n \in B^{+}$, dan $m \in B$ maka berlaku

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Untuk meningkatkan pemahaman dan kemampuanmu, selanjutnya cermati dan pahami contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1.10

Ubahlah ke dalam bentuk akar dengan bilangan pokok terkecil!

a) $5^{\frac{7}{3}}$ b) $81^{\frac{1}{3}}$ c) $64^{\frac{a}{b}}$

Penyelesaian

a) $5^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{5^7}$

b) $81^{\frac{1}{3}} = (3^4)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4}$ **INGAT** : $(a^m)^n = a^{m \times n}$

c) $64^{\frac{a}{b}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6a}{b}} = \sqrt[b]{2^{6a}}$

Sesungguhnya Allah tidak mengangkat ilmu di tengah-tengah manusia. Allah menghilangkan ilmu dengan mencabut nyawa para ulama. Ketika tidak ada lagi orang yang alim, manusia mengangkat pimpinan yang bodoh, mereka ditanya dan menjawab tanpa ilmu, sehingga mereka sesat dan menyesatkan

(*Imam Bukhari dan Muslim*)

Contoh 1.11

Sederhanakan dan nyatakan hasilnya ke dalam bentuk akar dengan bilangan pokok terkecil!

a) $25^{\frac{3}{2}} \times 125^{\frac{5}{2}}$

b) $\dfrac{2^{\frac{2}{5}} \times 8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$

Penyelesaian

a) $$25^{\frac{5}{2}} \times 125^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{5}{2}} \times (5^3)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 5^5 \times 5^{\frac{9}{2}}$$

INGAT : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$$= 5^{(5+\frac{9}{2})}$$

$$= 5^{\frac{19}{2}} = \sqrt[2]{5^{19}}$$

b) $$\frac{2^{\frac{2}{5}} \times 8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{2}{5}} \times (2^3)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2^{\frac{7}{5}}$$

INGAT : $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$= \sqrt[5]{2^7}$$

Latihan 1.D

Pangkat Rasional

1. Temukan nilai dari:

a) $243^{-\frac{1}{2}}$

b) $32^{-\frac{1}{5}}$

c) $\left(\dfrac{25}{9}\right)^{-1,5}$

d) $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-2,5}$

e) $\left(\dfrac{-8}{27}\right)^{-\frac{5}{3}}$

f) $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

2. Sederhanakan setiap pernyataan berikut ini, nyatakan jawabanmu ke dalam pangkat positif.

a) $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}$

b) $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}$

c) $b^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{4}} \times c^{\frac{1}{2}}$

d) $y^{\frac{1}{3}} \times z^{-\frac{1}{5}} \times y^{\frac{1}{2}} \times z$

e) $2x^{-\frac{1}{2}}\ y^{\frac{1}{3}} \times 3x^{\frac{1}{4}}\ y^{-\frac{1}{6}}$

f) $5a^{-\frac{1}{4}}\ b^{-\frac{1}{2}} \times 2a^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{1}{2}}$

g) $\dfrac{x\,y}{x^{\frac{3}{4}}\ y^{\frac{3}{2}}}$

h) $\dfrac{a^{\frac{3}{5}} b^{-\frac{2}{5}}}{ab^{-\frac{4}{5}}}$

i) $\dfrac{9x^{-\frac{3}{4}} \times 2x^{\frac{1}{2}}}{6x^{-\frac{1}{4}}}$

j) $\dfrac{12x^{\frac{1}{3}} \times 2x^{-\frac{2}{3}}}{9x^{-\frac{1}{3}}}$

k) $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

l) $\left(\dfrac{x^{-4}}{y^{-6}}\right)^{-\frac{1}{4}}$

m) $(2a^{2}\ b^{-1})^{3} \times (\frac{1}{2}a^{8}\ b^{7})^{\frac{1}{4}}$

n) $(3ab^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{3}a^{\frac{1}{4}}\ b^{-3})^{\frac{1}{3}}$

3. Sederhanakan dan nyatakan jawabanmu dalam pangkat positif dengan bilangan basis terkecil.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[5]{2}$

c) $\dfrac{8^{\frac{4}{3}} \times 32^{\frac{1}{5}}}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{27^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{20^{\frac{1}{2}}\ 10^{\frac{1}{4}}}{20^{-\frac{1}{2}}}$

f) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}}\ 6^{-\frac{3}{2}}}{18^{\frac{3}{2}}}$

4. Sederhanakan setiap pernyataan berikut.

a) $x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{1}{3}})$

b) $a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - 2a^{-\frac{1}{2}})$

c) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$

d) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^{2}$

5. Nyatakanlah berikut ini dalam trinomial, dan sederhanakan.

a) $2^{2x} + 2 \times 2^{x} + 1$

b) $3^{2x} - 6 \times 3^{x} + 9$

c) $\dfrac{3^{2x} + 5 \times 3^{x} + 6}{3^{3x} + 3}$

d) $\dfrac{2^{2x} - 2^{x} - 12}{2^{x} - 4}$

e) $\dfrac{a + 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$

f) $\dfrac{x - 2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$

Ilmu adalah barang yang hilang dari umat Islam, dimanapun ia mendapatkannya, ia pantas untuk memilikinya (anynomous)

5. Persamaan Berpangkat

DISKUSIKAN permasalahan berikut ini dalam kelompok belajarmu:

Problem Solving

MELIPAT KERTAS

AMBIL selembar kertas. Lipat di bagian tengah kemudian lipat di bagian tengah sekali lagi. Berapa banyak ruas kertas yang terbentuk dari melipat sebanyak dua kali berturut-turut tersebut? Jika diharapkan akan diperoleh sebanyak 512 ruas kertas, berapa kali kita harus melipatnya?

Lukiskan hubungan tersebut dalam sebuah grafik.

Sumber: Byolojiegitim.yyu.edu.tr

DALAM kondisi tertentu pertumbuhan sebuah koloni bakteri mathobacillus dalam medium tertentu dimodelkan sebagai $N = 500 \times 2^{0,1t}$ dengan N adalah banyaknya bakteri dan t adalah waktu yang diperlukan dalam hari. Jika banyaknya bakteri adalah 8000. Berapa hari sejumlah bakteri tersebut telah berkembang biak?

Banyaknya bakteri N = 8000, disubstitusikan ke persamaan berpangkat

$$N = 500 \times 2^{0,1t}$$

diperoleh:

$800 = 500 \times 2^{0,1t}$

$500 \times 2^{0,1t} = 8000$

$2^{0,1t} = \dfrac{8000}{500}$

$2^{0,1t} = 16$

$2^{0,1t} = 2^4$ (basis bernilai sama maka pangkatpun senilai)

$0,1t = 4$ (kedua ruas dikalikan 10)

$t = 40$

Jadi, bakteri tersebut akan berkembang menjadi sebanyak 8000 dalam waktu 40 hari.

Contoh 1.12

Temukan nilai x untuk persaman berpangkat berikut ini.

a) $2^{-x} = 64$ b) $5^x \times 25^{2x-1} = 125$ c) $16^x = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{4}{3}}}{4^{-\frac{3}{2}}}$

Penyelesaian

a) $2^{-x} = 64$

$2^{-x} = 2^6$ (pangkat bernilai sama)

$-x = 6$

$x = -6$

b) $5^x \times 25^{2x-1} = 125$

$5^x \times (5^2)^{2x-1} = 5^3$ (menyamakan basis)

$5^x \times 5^{4x-1} = 5^3$

$5^{5x-2} = 5^3$ (jumlahkan pangkatnya)

$5x - 2 = 3$ (pangkatnya bernilai sama)

$x = 1$

c) $16^x = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{4}{3}}}{4^{-\frac{3}{2}}}$

$(2^4)^x = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{-\frac{4}{3}}}{(2^2)^{-\frac{3}{2}}}$

$(2^4)^x = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-4}}{2^{-3}}$

$2^{4x} = 2^{-\frac{1}{2}}$

$4x = -\dfrac{1}{2}$

$x = -\dfrac{1}{8}$

Latihan 1.E

Persamaan Berpangkat

1. Temukan nilai x dari persamaan berpangkat berikut.

a) $5^x = 25$

b) $3^{3x} = 243$

c) $49^x = 7$

d) $125^x = 5$

e) $27^x = \sqrt{3}$

f) $16^x = \sqrt{3}$

g) $3^{3x} \times 9^{-2x+1} = 27$

h) $2^{-4x} x 4^{3x-2} = 16$

i) $4^x \times 8^{x-2} = 2^{-x}$

j) $5^{3x} \times 125^{x+1} = 5^{-2x}$

k) $16^x = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}}$

l) $27^x = \dfrac{3^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{3}{2}}}{27^{-1}}$

m) $2^{2x} - 3 \times 2^x + 2 = 0$

2. Temukan nilai x:

a) $x^4 = 256$

b) $x^7 = 128$

c) $x^{-2} = 81$

d) $x^{-3} = 27$

e) $x^{\frac{1}{2}} = 3$

f) $x^{\frac{1}{3}} = 5$

g) $x^{\frac{3}{5}} = 8$

h) $x^{\frac{2}{3}} = 16$

i) $(x-3)^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}27^{-\frac{1}{4}}$

j) $(x+1)^{\frac{4}{5}} = 81^{-\frac{1}{5}}16^{-1}$

Soal-soal kontekstual

3. Diameter dari sebuah pohon tumbuh sesuai dengan formula:

   $D = A\ 10^{0,04t}$, dengan D cm adalah diameter setelah pengukuran pertama dan A cm adalah diameter ketika pertama kali diukur.

   a) Kapan pohon itu memiliki diameter 25 cm?

   b) Setelah berapa tahun pohon memiliki diameter lebih dari 30 cm?

Sumber: www.umaine.edu

D. Bentuk Akar

DISKUSIKAN dalam kelompok belajarmu permasalahan berikut ini:

SOCRATES seorang ilmuwan Yunani dalam dialog dengan Plato yang berjudul "Menon" dikisahkan ia telah berhasil mengungkap hubungan antara panjang sisi, panjang diagonal dan luas pada beberapa persegi khusus yang telah disusunnya secara unik.

Semula Socrates melukis persegi dengan panjang 1 satuan (yaitu persegi ABCD). Kemudian, ia membangun persegi baru dimana salah satu sisinya adalah panjang diagonal persegi sebelumnya, yaitu BD. Sehingga terciptalah persegi BDFE. Dari diagonal pada persegi BDFE, ia bangun lagi sebuah persegi baru DEGH dan seterusnya.

Setelah itu, Socrates melakukan perhitungan dan mencari hubungan antara panjang sisi, panjang diagonal, dan luas pada masing-masing persegi. Nah, sekarang kamu yang melakukan EKSPLORASI hubungan antara ketiga hal tersebut. Daftar hasil pehitunganmu dalam sebuah tabel. Dapatkah kamu menyimpulkannya?

HIMPUNAN bilangan rasional Q, berisi bilangan-bilangan yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk pecahan $\frac{m}{n}$ dengan $m, n \in B, n \neq 0$.
Himpunan bilangan irrasional, Q′, berisi bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pecahan.

Contoh: $\sqrt{2} = 1,4142135... \in Q'$ sebab bilangan ini bilangan desimal tak tentu yang tidak memiliki perulangan

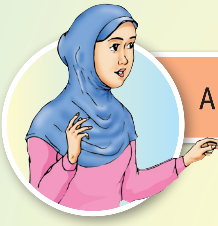
$\sqrt{9} = 3 \in B$

$1,7532... \in Q'$

$23,1717171... \in Q$

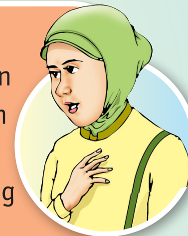
Bilangan Rasional

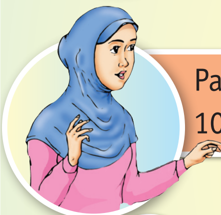
Bagaimana membuktikan bilangan rasional?



Angka 17

Betul Nisa. Oleh karena yang berulang dua bilangan, yaitu 1 dan 7 maka dalam proses membuktikan nanti bilangan itu perlu dikalikan dengan 100. Bagaimana kalau yang berulang *tiga* bilangan.





Pasti *dikalikan* 1000

Nisa..., sekarang perhatikan uraianku di kertas ini! Mula-mula bilangan tersebut dimisalkan dengan x. Kita dapat persamaan

i) $x = 23{,}17171717\ldots$ .... (i)

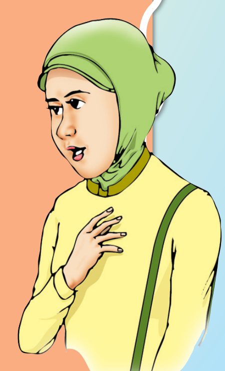
Oleh karena yang berulang dua angka, maka kalikan persamaan (i) dengan 100 pada kedua ruasnya, hingga diperoleh persamaan (ii)

$x = 23{,}17171717\ldots \quad (\ \times 100)$

$100x = 2317{,}17171717\ldots$ ....(ii)

Kurangi persamaan (ii) dengan (i), kemudian temukan bentuk $\frac{a}{b}$ nya.

$$\begin{array}{rl} 100x & = 2317{,}171717\ldots \\ x & = 23{,}17171717\ldots \ - \\ \hline 99x & = 2294 \\ x & = \dfrac{2294}{99} \end{array}$$



Nah..Nisa, sekarang kita sudah tahu bahwa bentuk lain dari 23,1717... adalah $x = \frac{2294}{99}$.

Kalau nggak percaya ambil kalkulator, bagilah 2294 dengan 99. *Alhamdulillah*... aku bisa jawab pertanyaanmu. Kalau nggak malu deh...

Investigasi

Anak-anakku, siapa di antara kamu yang bisa membuktikan bahwa 3,222222..., 42,575757... dan 14,327327327..., adalah bilangan-bilangan rasional. Acungkan jari dan cepat kerjakan di papan tulis!

Investigasi

TAHUKAH KAMU, APA YANG DITEMUKAN OLEH LEONHARD EULER?

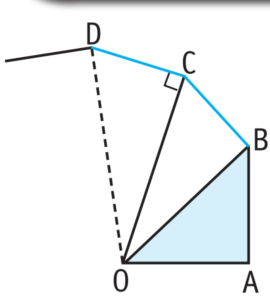
Sumber: www.usna.edu

Berikut adalah bilangan hasil eksplorasi matematikawan **Leonhard Euler** (1707 – 1783). Dia melakukan perhitungan terhadap sejumlah bilangan yang ia susun sebagai berikut.

$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}+\ldots\right)$$

Hitunglah menggunakan kalkulator. Bandingkan hasil ini dengan bilangan yang diperoleh dengan cara tekan angka   lalu tombol e^x pada kalkulator *scientific*.

Bilangan ini disebut bilangan *e* (huruf depan nama *Euler*) sebagai penghargaan atas temuannya tersebut. Apakah bilangan tersebut termasuk bilangan rasional atau irrasional? Mengapa? Diskusikan dengan teman-temanmu!



Nah sekarang, kamu lakukan proses pencarian dan penyeleksian beberapa "*bilangan bentuk akar*" yang merupakan bagian dari bilangan *irrasional*. Mula-mula kamu buat sebuah segitiga, dimana dua sisi yang saling tegak lurus memiliki panjang 1 satuan. Kemudian hitunglah panjang sisi miringnya OB dengan menggunakan dalil *Phytagoras*. Dari sisi miring segitiga itu, kamu buat sebuah garis yang tegak lurus dengan panjang 1 satuan, yaitu BC. Lalu bentuklah sebuah segitiga baru OBC, dan menghitung panjang sisi miringnya, yaitu OC. Demikian pula seterusnya.

Ulangi proses tersebut untuk titik-titik D, E, F, dan G. Kamu akan menemukan bentuk menarik yang akan mengingatkan pada bentuk rumah atau cangkang kerang. Benarkah kerang mendesain rumahnya dengan '*aturan matematis ini*'. Selidikilah!

Perhatikan perhitungan panjang sisi miring OB, OC, OD, OE dan seterusnya.

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$OE = \sqrt{OD^2 + DE^2} = \sqrt{(\sqrt{4})^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

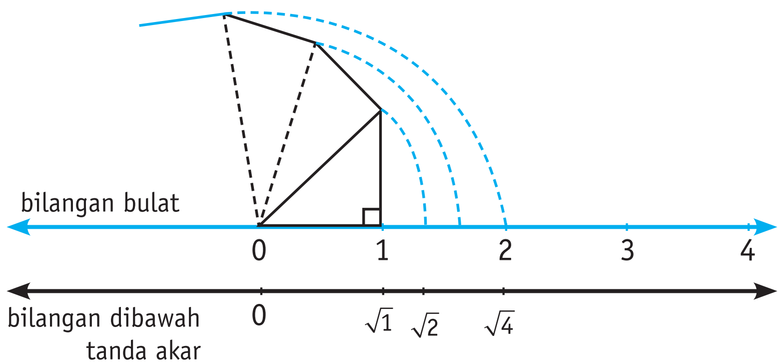
$$OF = \sqrt{OE^2 + EF^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$$

$$OG = \sqrt{OF^2 + FG^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7}$$

Sekarang, yang menjadi masalah adalah mana di antara bilangan-bilangan $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ dan seterusnya, yang merupakan bilangan *irasional*. Untuk "mengeceknya" kali ini kita akan menggunakan cara yang lain. Bilangan-bilangan ini akan kita "*proyeksikan*" ke garis bilangan bulat. Kalau bilangan ini "*persis bertemu*" dengan bilangan bulat maka bilangan itu bilangan rasional.

Caranya, buatlah garis bilangan dengan interval 1 satuan. Letakkan O pada angka 0 dalam garis bilangan. Dari sejumlah panjang hipotenusa tersebut yaitu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, dan $\sqrt{7}$ kemudian jangkakan ke garis bilangan positif.

Namaku "$\sqrt{4}$", aku akan ketemu temanku bilangan "2" di garis bilangan bulat. Maka orang akan mengatakan aku bukan bentuk akar dan aku bilangan rasional.



Dari eksplorasi di atas, kita menemukan $\sqrt{4}$ bertemu dengan titik 2. Inilah bukti "geometris" $\sqrt{4}$ sama dengan 2, karenanya ia bukan bentuk akar melainkan bilangan rasional. Secara matematikapun kita bisa tunjukkan bahwa $\sqrt{4}$ bukan bentuk akar.

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$$

Dapatkah kamu menyebutkan akar-akar berapa sajakah yang akan bertemu "*persis*" dengan angka-angka pada garis bilangan bulat?

Contoh 1.13

Berikut ini manakah yang bilangan rasional? Buktikan!

a) 12,3740819352... b) 1,232323232323...

Penyelesaian:

a) Bilangan 12,3740819352... tidak memiliki bentuk perulangan sehingga bilangan ini tidak dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$.
Jadi bilangan 12,3740819352... merupakan bilangan irasional.

b) Bilangan 1,232323232323... adalah bilangan yang desimalnya mengalami perulangan. Perulangan dua angka dibelakang koma.

Misalkan $x = 1,232323232323...$

Maka $100\,x = 123,2323232323...$

Lakukan pengurangan:

$$\begin{array}{rl} 100x = & 123,2323232323... \\ x = & 1,232323232323... \\ \hline 99x = & 122 \end{array} \; -$$

$$x = \frac{122}{99}$$

Jadi bilangan 1,232323232323... dapat dinyatakan sebagai $\frac{122}{99}$ dimana 122 dan $99 \in B$. Jadi bilangan 1,23232323... adalah bilangan rasional.

Tahukah kamu, apa yang dimaksud dengan "akar"? Pengertian"akar" dalam matematika berasal dari bahasa Inggris "*surds*" yang mengacu pada kata "*absurd*", artinya *tidak dapat dipikirkan*. Dalam matematika bentuk akar (*surds*) itu lebih memiliki arti khusus sebagai sesuatu yang bukan tidak bisa difikirkan melainkan sebagai sesuatu yang tidak bisa dinyatakan sebagai pecahan (*ratio*) dari bilangan bulat. Jadi, ***bentuk akar adalah bilangan irasional***.

Untuk diingat

Bentuk akar adalah bilangan Irasional

"Ketika Saya tidak mempunyai persoalan khusus yang harus dipecahkan oleh pikiran saya, saya sering mengumpulkan dan menyusun kembali bukti-bukti dari teorema matematika dan fisika yang telah lama saya kenal. Tidak ada maksud dan tujuan lain; itu semua hanyalah kesempatan bagi saya untuk terus memenuhi kesenangan dan kebutuhan berpikir"

(*Albert Einstein*)

Bentuk-bentuk akar meliputi *akar dua dari*, *akar tiga dari dan akar-n dari* bilangan rasional positif. Dalam bagian ini akan mengkaji perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan bentuk akar.

1. Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Perhatikan dan fikirkan dengan cermat beberapa contoh berikut ini.

1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$
2) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$
3) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$
4) $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$
5) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$
6) $\sqrt{32} : \sqrt{2} = \sqrt{32 : 2} = \sqrt{16} = 4$
7) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
   $\sqrt{27}$ dinamakan bentuk akar penuh (entire surd)
   $3\sqrt{3}$ dinamakan bentuk sederhana akar (simplified surd)
8) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$
9) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

Untuk diingat

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ dimana $a, b \in B$ positif

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ dimana $a, b \in B$ positif

2. Penjumlahan dan Pengurangan

Perhatikan dan fikirkan dengan cermat beberapa contoh berikut ini.

1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ tidak dapat dijumlahkan
2) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$ dapat dikurangkan karena akar-akarnya sejenis
3) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = (5 + 2 - 1)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Khazanah

GOLDEN RATIO

Sebuah Bilangan Rasional yang Menakjubkan

Sumber: www.usna.edu

L Pisano Fibonacci
(1170 – 1240)

Tahukah kamu apa "*golden ratio*" itu? Dalam bahasa kita, golden ratio bisa disepadankan dengan rasio emas. Berapa besarkah rasio emas itu? Manusiakah yang melahirkan ratio emas ini ataukah Tuhanmu? Seorang matematikawan besar Italia, L Pisano Fibonacci (1170 – 1240) M), telah berhasil menguak "ratio emas" yang tersembunyi di balik sejumlah obyek jagat raya ini. Lewat desain barisan bilangan yang ia ciptakan, ia berhasil menguak kebesaran Dzat Yang Maha Mengetahui lewat konstanta illahiyah yang dikenal dengan nama "ratio emas" dalam penciptaan makhluk-makhluknya.

Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang? Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itu pun dalam keadaan payah.

(QS. Al-Mulk, 67: 3-4)

Masih ingatkah kamu bagaimana bentuk barisan Fibonacci ini? Benar, Fibonacci memulai penyusunan barisan ini dengan angka 0 dan 1. Kemudian, ia meneruskan kelahiran suku berikutnya dengan cara menjumlahkan dua angka sebelumnya. Lihatlah keindahan karyanya.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Angka Fibonacci memiliki satu sifat menarik. Jika kamu membagi satu angka dalam barisan tersebut dengan angka sebelumnya, maka akan kamu dapatkan sebuah angka hasil pembagian yang besarnya sangat mendekati satu sama lain. Bahkan, angka ini cenderung bernilai etap setelah angka ke-13 dalam deret tersebut. Mengapa bisa demikian? Angka ini, selanjutnya, dikenal sebagai “golden ratio” atau “rasio emas”.

233 / 144 = 1,618
377 / 233 = 1,618
610 / 377 = 1,618
987 / 610 = 1,618
1597 / 987 = 1,618
2584 / 1597 = 1,618

Dimanakah rasio emas bersembunyi? Jika antara pusar dan telapak kaki dianggap 1 unit maka tinggi seorang manusia setara dengan 1,618 unit. Beberapa rasio emas lain pada tubuh manusia rata-rata adalah:

1. Jarak antara ujung jari dan siku dibanding dengan jarak antara pergelangan tangan dan siku.
2. Jarak antara garis bahu dan unjung atas kepala dibanding dengan panjang kepala.
3. Jarak antara pusar dan ujung atas kepala dibanding dengan jarak antara garis bahu dan ujung atas kepala.
4. Jarak antara pusar dan lutut dibanding dengan jarak antara lutut dan telapak kaki.

Dan di bumi itu terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi orang-orang yang yakin. Dan (juga) pada dirimu sendiri. Maka apakah kamu tidak memperhatikan?

(Q.S. Adz Dzaariyaat,51 : 20 – 21)

Investigasi

Rasio Emas pada Cangkang Kerang Laut


Sumber: www.daytonartinstitute.org

Cangkang

Pakar keindahan asal Inggris William Charlton menjelaskan bagaimana orang-orang menyukai bentuk spiral dan telah menggunakannya selama ribuan tahun. Ia menyatakan bahwa kita menyukai bentuk spiral karena penglihatan kita dapat dengan mudah mengikuti bentuk tersebut.

Spiral yang didasarkan pada rasio emas memiliki rancangan paling tak tertandingi yang dapat kamu temukan di alam. Sejumlah contoh pertama yang dapat kita berikan adalah susunan spiral pada bunga matahari dan buah cemara. Ada lagi contoh yang merupakan penciptaan tanpa cela oleh Allah Yang Mahakuasa dan bagaimana Dia menciptakan segala sesuatu dengan ukuran. Proses pertumbuhan banyak makhluk hidup berlangsung pula dalam bentuk spiral logaritmik. Bentuk-bentuk lengkung spiral ini senantiasa sama dan bentuk dasarnya tidak pernah berubah berapapun ukurannya.

Cangkang-cangkang kebanyakan moluska tumbuh mengikuti bentuk spiral logaritmik. Sungguh tidak ada keraguan bahwa hewan-hewan ini tidak memahami perhitungan matematis paling sederhana sekalipun, apalagi bentuk spiral logaritmik. Jadi bagaimana makhluk-makhluk tersebut dapat mengetahui hal itu sebagai yang terbaik baginya untuk tumbuh? Bagaimana binatang-binatang ini, yang oleh sejumlah ilmuwan digambarkan sebagai makhluk "primitif," tahu bahwa spiral logaritmik adalah bentuk terbaik bagi mereka?

Mustahil pertumbuhan semacam ini terjadi tanpa adanya suatu pengetahuan atau kecerdasan. Pengetahuan tersebut ada tapi bukan pada moluska ataupun di alam itu sendiri, meskipun sejumlah ilmuwan menyatakan hal demikian. Sama sekali tidaklah masuk akal untuk berusaha menjelaskan hal tersebut sebagai suatu ketidaksengajaan. Rancangan ini hanya dapat dihasilkan oleh suatu kecerdasan dan pengetahuan mahatinggi, yang merupakan milik Allah Yang Mahakuasa, Pencipta segala sesuatu.

> *"Pengetahuan Tuhanku meliputi segala sesuatu. Maka apakah kamu tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) ?" (QS. Al An'aam, 6: 80)*

Nah, tugasmu sekarang temukan rasio emas pada benda-benda atau makhluk-makhluk hidup di sekitarmu. Presentasikan temuanmu ini di depan teman-teman sekelasmu. Semoga Allah membimbingmu.

Contoh 1.14

Sederhanakan $\sqrt{27}+\sqrt{12}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\sqrt{27}+\sqrt{12} &= \sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{4}\times\sqrt{3}\\ &= 3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Contoh 1.15

Uraikan dan sederhanakan!

a) $\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Hukum distributif memungkinkan kita untuk melakukan perkalian di luar kurung

$a(b + c) = ab + ac$

Penyelesaian:

a) $\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})$
$= 2\sqrt{5} + \sqrt{25}$
$= 2\sqrt{5} + 5$

b) $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
$= \sqrt{18} - \sqrt{12}$
$= \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 3}$
$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Dunia ini bagai sebuah cermin besar. Ia memantulkan gambaran diri anda kepada anda. Jika anda seorang yang mencintai, jika anda seorang yang ramah, jika anda seorang yang penolong, maka dunia akan menunjukkan rasa cinta, keramahan, dan penolongnya kepada anda

(Thomas Dreier)

Latihan 1.E

Perkalian pembagian bentuk akar

1. Sederhanakan!

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$
b) $\sqrt{7} \times \sqrt{6}$
c) $3\sqrt{2} \times 5\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{5} \times 5\sqrt{2}$
e) $(2\sqrt{5})^2$
f) $(3\sqrt{7})^2$
g) $\sqrt{8}$
h) $\sqrt{128}$
i) $2\sqrt{256}$
j) $\frac{1}{2}\sqrt{84}$
k) $\sqrt{12} \times \sqrt{72}$
l) $\sqrt{27} \times \sqrt{32}$
m) $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{32}$
n) $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{50}$
o) $-7\sqrt{27} \times 2\sqrt{32}$
p) $-2\sqrt{18} \times 3\sqrt{90}$
q) $\sqrt[3]{27}$
r) $\sqrt[3]{8}$
s) $\sqrt[3]{27 \times 2}$
t) $\sqrt[3]{8 \times 3}$
u) $\sqrt[3]{81}$
v) $\sqrt[3]{24}$
w) $\sqrt[3]{16}$
x) $\sqrt[3]{250}$

2. Sederhanakan!

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$
b) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$
c) $\dfrac{3\sqrt{24}}{4\sqrt{12}}$
d) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{5\sqrt{10} \times 2\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$
f) $\dfrac{2\sqrt{3} \times 7\sqrt{8}}{5\sqrt{2}}$

3. Sederhanakan!

a) $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
b) $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
c) $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
d) $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
e) $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$
h) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$
i) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$
j) $\sqrt{63} - \sqrt{28}$
k) $5\sqrt{54} + 2\sqrt{24}$
l) $3\sqrt{40} + 6\sqrt{90}$

f) $2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$
g) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$
m) $3\sqrt{48} - 7\sqrt{75}$
n) $5\sqrt{125} - 2\sqrt{180}$

4. Sederhanakan!
a) $3\sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{18}$
b) $2\sqrt{45} - 5\sqrt{20} + \sqrt{80}$
c) $\sqrt{25x} + \sqrt{9x} - 2\sqrt{x}$
d) $\sqrt{9y} + \sqrt{16y} - 5\sqrt{y}$
e) $\sqrt{y^2x} - \sqrt{4y^2x} + y\sqrt{x}$
f) $\sqrt{9y} + \sqrt{16y} - 5\sqrt{y}$

5. Uraikan dan sederhanakan!
a) $\sqrt{2}(5 + \sqrt{2})$
b) $\sqrt{7}(3 + \sqrt{7})$
c) $2\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 5)$
d) $3\sqrt{5}(2\sqrt{5} - 7)$
e) $\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{8})$
f) $\sqrt{3}(\sqrt{15} - \sqrt{27})$
g) $2\sqrt{x}(3\sqrt{x} - 1)$
h) $4\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 3)$
i) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{8})$
j) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$
k) $(2\sqrt{5} - 1)^2$
l) $(2\sqrt{3} - 7\sqrt{5})^2$
m) $(\sqrt{p + 3} + 1)^2$
n) $(\sqrt{x + 2} - 2)^2$

Investigasi

Dalam kelompok belajarmu lakukan eksplorasi terhadap sejumlah persoalan berikut ini.

1. Temukan:
a) $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$
b) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$
c) $\sqrt{12} \times \sqrt{12}$
d) $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$
e) $\sqrt{a - b}\sqrt{a - b}$
f) $\sqrt{xyz}\sqrt{xyz}$

2. Salinlah dan lengkapilah berikut ini.
Ketika bentuk akar sederhana dikalikan dirinya sendiri, hasilnya adalah

....

....

3. Temukan!

a) $2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

b) $3\sqrt{5} \times \sqrt{5}$

c) $5\sqrt{a-b}\ \sqrt{a-b}$

d) $9\sqrt{pqr}\ \sqrt{pqr}$

4. Temukan!

a) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

b) $(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{5})$

c) $(5\sqrt{2} + \sqrt{7})(5\sqrt{2} - \sqrt{7})$

d) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$

e) $(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-3})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a+3})$

f) $(\sqrt{x-5} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3})$

5. Salin dan lengkapi soal berikut ini!

Jika $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ dikalikan dengan sekawannya $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ maka hasilnya adalah

....

....

3. Merasionalkan Penyebut

PECAHAN yang memiliki penyebut berbentuk akar dipandang sebagai sesuatu yang "tidak rapi". Oleh karena itu, supaya bentuk pecahan menjadi "rapi", maka penyebut irasional itu perlu kita rasionalkan. Bagaimana caranya? Mari kita cermati dan kaji sejumlah contoh berikut ini.

Contoh 1.16

Nyatakan $\frac{8}{\sqrt{2}}$ ke dalam penyebut rasional.

Penyelesaian:

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Contoh 1.17

Nyatakan $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ ke dalam penyebut rasional.

Penyelesaian:

Karena $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = (3)^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$

$(3+\sqrt{3})$ dan $(3-\sqrt{3})$ disebut bentuk akar sekawan (*conjugate surds*)

$$\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Contoh 1.18

Sederhanakan $\frac{2}{\sqrt{2}+3} - \frac{1}{\sqrt{2}-3}$

Penyelesaian:

$$\frac{2}{\sqrt{2}+3} - \frac{1}{\sqrt{2}-3} = \frac{2(\sqrt{2}-3) - 1(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-6-\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2})^2-(3)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-9}{2-9} = \frac{\sqrt{2}-9}{-7}$$

$$= \frac{9-\sqrt{2}}{7}$$

Contoh 1.19

Jika $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ temukan $x - \frac{1}{x}$

Penyelesaian:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \text{ maka } \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Sehingga :

$$x - \frac{1}{x} = \frac{2-\sqrt{2}}{1} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2(2-\sqrt{2}) - 1(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{2} = \frac{2-3\sqrt{2}}{2}$$

Latihan 1.G

1. Nyatakan ke dalam bentuk penyebut rasional yang paling sederhana!

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$

c) $\frac{8+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{27}}{3\sqrt{48}}$

e) $\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

h) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

i) $\frac{3}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

j) $\frac{6\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$

k) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

l) $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{12}}{\sqrt{125}+\sqrt{27}}$

f) $\dfrac{1}{5-\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

m) $\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{32}}{\sqrt{18}-\sqrt{75}}$

n) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$

2. Sederhanakan,rasionalkan setiap penyebut sebelum menjumlahkan atau mengurangkan!

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-2}-\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-3}-\dfrac{3}{\sqrt{5}+2}$

e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}-\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

f) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}$

h) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+3}+\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}$

3. Sederhanakan!

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$

d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}$

4. Jika $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$, hitunglah:

a) $x+\dfrac{1}{x}$

b) $x-\dfrac{1}{x}$

c) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

d) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$

5. Jika $x=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}$, hitunglah:

a) $\dfrac{2x^2+10x+12}{x^2+3x}$

b) $\dfrac{3x^2+6x-9}{x^2-x}$

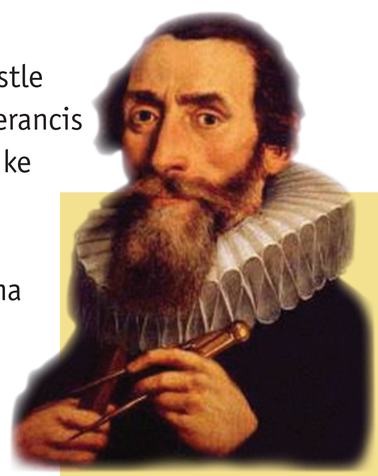
E. Bentuk Logaritma

Tahukah kamu bahwa kedua kata "*algoritma*" dan "*logaritma*" keduanya berasal dari nama matematikawan muslim "alkhowarizmi"?

Sebuah karya yang menggunakan angka India, yang pertama kalinya diterjemahkan dan digunakan di Barat berjudul al-jam' wa'l-tafriq bi hisab al-hind (*Addition and Subtraction in Indian Arithmetics*). Buku tersebut merupakan karya gemilang dari matematikawan muslim Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (780 – 850 M).

Buku yang aslinya memang telah hilang. Namun Alhamdulillah, bentuk terjemahan masih bisa ditemukan. Buku terjemahan Toledon itu selanjutnya diberi judul *Algorismi de numero indorum*. Buku ini memiliki pengaruh yang sangat kuat di Barat, dan kata "algorithm" serta "logarithm" –*yang diturunkan dari nama al-khwarizmi itu*– selanjutnya menjadi milik khasanah bahasa di Barat. Sedangkan nama Khwarizmi di Spanyol lebih populer dengan istilah guarismo.

John Napier adalah ahli matematika berkebangsaan Inggris, lahir di Merchiston Castle Eidenburg. Napier menyelesaikan sekolah di Perancis pada usia 13 tahun, kemudian ia melanjutkan ke Universitas St. Andrews di Scotland. Di tahun 1612 M, ia menemukan sebuah sistem yang diberi nama "logaritma" yang berasal dari nama khwarizmi itu. Sekarang temuannya itu, lebih dikenal dengan nama Logaritma Napier (*Napierian Logarithms*). Napier pernah membuat tabel yang diukir pada gading yang mirip tulang. Lalu, mereka menamainya dengan tulang Napier (Napier's Bones).



Sumber: epaper.tncvs.tn.edu

John Napier (1550-1617)

Oleh karena melihat bilangan basis yang digunakan dalam logaritma –*waktu itu*– kurang menyenangkan, maka Henry Briggs (matematikawan Inggris) membuat tabel umum logaritma (*The Table of Common Logarithms*) dengan bilangan basis 10 segera setelah itu.

Problem Solving

Menemukan Pangkat

Dapatkah kamu menemukan nilai x agar persamaan pada permasalahan-permasalahan berikut ini menjadi pernyataan yang benar.

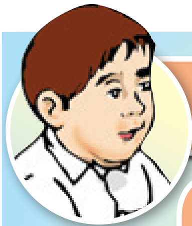
Masalah 1: $2^x = 4$
Masalah 2: $2^x = 7$
Masalah 3: $2^x = 8$

Petunjuk:
Dapatkah kamu menemukan nilai x untuk masalah 1 dan 3? Cukup mudah bukan? Hal yang sulit dipecahkan sekarang, adalah problem 2. Coba deh, kamu lakukan pemecahannya dengan cara:

1) temukan "dugaanmu" untuk nilai x pada masalah 2. Tentu saja nilai x-nya lebih besar dari nilai x pada masalah 1 dan lebih kecil dari nilai x pada problem 3. Mengapa? Kemudian gunakan kalkulator yang memiliki tombol x^y untuk mengecek dekat tidaknya nilai 2^x dengan angka 7 tersebut. Ulangi explorasimu untuk menemukan nilai x sehingga nilai 2^x semakin mendekati dengan 7.
2) kaidah logaritma yang dapat digunakan adalah
   $\log 2^x = \log 7$
   $x \cdot \log 2 = \log 7$ (*Gunakan tabel logaritma untuk menemukan nilai x*)

Menyatakan bentuk pangkat ke dalam bentuk logaritma

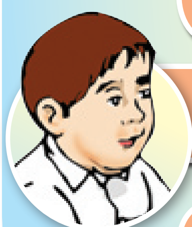
Mengapa perlu menyatakan bentuk pangkat ke dalam bentuk logaritma?



Bagaimana sih ... bentuk logaritma dari $5^x = 14$?

Oh itu.., begini Dul. Pada bentuk itu, angka 5 berperan sebagai basis. Oleh karena itu, angka 5 harus dituliskan dibagian "atas" sebelum log. Nah, setelah log "diikuti" hasil perpangkatannya, yaitu 14. Kemudian dipisahkan oleh tanda " = " dan diikuti dengan penulisan "pangkatnya" yaitu x.

Jadi $5^x = 14$ ekuivalen dengan $^5\log 14 = x$



Bagaimana kalau bentuk perpangkatannya $a^n = b$?

Kita analisis dulu, Dul. Basisnya a, hasilnya b, dan pangkatnya n. Maka bentuk $a^n = b$ dapat dituliskan dalam bentuk logaritma sebagai berikut

$$a^n = b \longrightarrow {}^a\log b = n$$

Hukum-hukum Logaritma

Untuk diingat

Bentuk $a^x = y$ dapat dinyatakan sebagai $x = {}^a\log y$ atau sebaliknya

dimana:

a : bilangan pokok (basis) logaritma dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ apabila a tidak ditulis berarti bilangan pokoknya 10

y : numerus, yaitu bilangan yang ditarik logaritmanya syarat $y > 0$

x : hasil logaritma atau identik dengan pangkat yang dicari

Berdasarkan kaidah di atas mari kita jelajahi beberapa "sifat" yang menarik dari aturan logaritma ini.

1. **Kita tahu bahwa $a^0 = 1$ maka ${}^a\log 1 = 0$**

   Artinya *log dari 1 sama dengan 0 untuk sembarang basis*

2. **Kita tahu bahwa $a^1 = a$ maka ${}^a\log a = 1$**

   Artinya *log dari a dengan basis a nilainya sama dengan 1, atau*

3. **Mengapa ${}^a\log 0$ tidak terdefinisi?**

   Bukti: Misal ${}^a\log 0 = x \Leftrightarrow a^x = 0$ dimana a > 1 dan $a \neq 1$. Dapatkah kamu menunjukkan sebuah nilai x agar perpangkatan itu bernilai 0? Tidak ada! Jadi alog 0 tidak terdefinisikan.

4. **${}^a\log (-3)$ tidak ada atau tidak didefinisikan**

   Bukti: Misal ${}^a\log(-3) = x \Leftrightarrow a^x = -3$ dimana a > 1 dan $a \neq 1$. Dapatkah kamu menemukan nilai untuk x. Tidak mungkin. Jadi ${}^a\log (-3)$ atau bilangan negatif yang lainnya tidak mungkin ada.

5. **${}^a\log mn = {}^a\log m + {}^a\log n$**

   Bukti:

   Misal $m = a^x \Leftrightarrow {}^a\log m = x$ ....(i)

   $n = a^y \Leftrightarrow {}^a\log n = y$ ....(ii)

   Maka :

   $mn = a^x \times a^y$

   $mn = a^{x+y} \Leftrightarrow {}^a\log n = y$ ....(iii)

   Substitusi (i) dan (ii) ke (iii) diperoleh:

   ${}^a\log mn = x + y$

   ${}^a\log mn = {}^a\log m + {}^a\log n$ (**terbukti**).

6. $^{a}\log \frac{m}{n} = {}^{a}\log m - {}^{a}\log n$

Bukti:

Misal $m = a^x \Leftrightarrow {}^{a}\log m = x$ ....(i)

$n = a^y \Leftrightarrow {}^{a}\log n = y$ ....(ii)

Maka :

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\frac{m}{n} = a^{x-y} \Leftrightarrow {}^{a}\log \frac{m}{n} = x - y$$ ....(iii)

Substitusi (i) dan (ii) ke (iii) diperoleh:

$^{a}\log \frac{m}{n} = x - y$

$^{a}\log \frac{m}{n} = {}^{a}\log m - {}^{a}\log n$ (**terbukti**).

7. $^{a}\log m^p = p \cdot {}^{a}\log m$

Bukti:

Misal $m = a^x \Leftrightarrow {}^{a}\log m = x$ ....(i)

$m^p = (a^x)a^{xp} \Leftrightarrow {}^{a}\log m^p = xp$ ....(ii)

Substitusikan (i) ke (ii) diperoleh:

$^{a}\log m^p = xp$

$^{a}\log m^p = ({}^{a}\log m)\ p$ atau

$^{a}\log m^p = p\ .\ {}^{a}\log m$ (**terbukti**).

Investigasi

AN LOGARITMA

Dalam grupmu buktikan kebenaran aturan logaritma berikut ini!

1) $^{a}\log b = \frac{{}^{a}\log b}{{}^{a}\log a}$

2) Jika $^{a}\log b = p$ maka $^{b}\log a = \frac{1}{p}$

3) $^{a}\log b \times {}^{b}\log c \times {}^{c}\log d = {}^{a}\log d$

Untuk diingat

1) ${}^{a}\log 1 = 0$
2) ${}^{a}\log 0$ tidak terdefinisi
3) ${}^{a}\log(-3)$ tidak terdefinisi
4) ${}^{a}\log a = 1$
5) ${}^{a}\log mn = {}^{a}\log m + {}^{a}\log n$
6) ${}^{a}\log \frac{m}{n} = {}^{a}\log m - {}^{a}\log n$
7) ${}^{a}\log m^{p} = p \cdot {}^{a}\log m$
8) ${}^{a}\log b = \frac{{}^{a}\log b}{{}^{a}\log a}$
9) Jika ${}^{a}\log b = p$ maka ${}^{b}\log a = \frac{1}{p}$
10) ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c \times {}^{c}\log d = {}^{a}\log d$

Contoh 1.20

Hitunglah!

a) ${}^{2}\log 1$

b) ${}^{5}\log 5$

Penyelesaian:

a) ${}^{2}\log 1 = 0$

Sebab logaritma dari 1 untuk sembarang basis sama dengan 0

b) ${}^{5}\log 5$

Jika bilangan (numerus) dan basis sama maka jawabnya sama dengan 1

Contoh 1.21

Tuliskan dalam bentuk pangkat!

a) ${}^{2}\log 8 = 3$

b) ${}^{x}\log 81 = 4$

Penyelesaian:

a) ${}^{2}\log 8 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3} = 8$

b) ${}^{x}\log 81 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^{4} = 81$

Contoh 1.22

Sederhanakan!

a) $^{10}\log 5 + {}^{10}\log 2$

b) $^{4}\log 20 - {}^{4}\log 5$

c) $^{5}\log \sqrt[5]{x}$

Penyelesaian:

a) $^{10}\log 5 + {}^{10}\log 2 = {}^{10}\log(5 \times 2) = {}^{10}\log 10 = 1$ (**Mengapa?**)

b) $^{4}\log 20 - {}^{4}\log 5 = {}^{4}\log \dfrac{20}{5} = {}^{4}\log 4 = 1$

c) $^{5}\log \sqrt[5]{x} = {}^{5}\log (x)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}\,{}^{5}\log x$

Contoh 1.23

Sederhanakan!

a) $^{3}\log 27 + {}^{3}\log 9 - {}^{3}\log 81$

b) $2 + {}^{10}\log 3$

Penyelesaian:

a) $^{3}\log 27 + {}^{3}\log 9 - {}^{3}\log 81$

$= {}^{3}\log 3^{3} + {}^{3}\log 3^{2} + {}^{3}\log 3^{4}$

$= 3 \cdot {}^{3}\log 3 + 2 \cdot {}^{3}\log 3 - 4 \cdot {}^{3}\log 3^{4}$ $\quad (\log a^{p} = p \cdot \log a)$

$= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 3 + 2 - 4 = 1$

b) $2 + {}^{10}\log 3 = 2 \cdot 1 + {}^{10}\log 3$ $\quad$ ($1 = {}^{10}\log 10$ **Mengapa?**)

$= 3 \cdot {}^{10}\log 10 + {}^{10}\log 3$ $\quad (p \cdot \log a = \log a^{p})$

$= {}^{10}\log 10^{2} + {}^{10}\log 3$ $\quad (\log a + \log b = \log(ab))$

$= {}^{10}\log(10^{2} \times 3) = {}^{10}\log 300$

Contoh 1.24

Temukan nilai x untuk pernyataan berikut. Berikan jawabanmu dalam tiga bilangan di belakang koma.

a) $5^x = 10$　　b) $2^{(x+1)} = 12$

Penyelesaian:

a) $5^x = 10$

$\log 5^x = \log 10$　　(**Catatan:** *jika bilangan basis tidak dituliskan berarti berbasis 10*)

$x. \log 5 = \log 10$

$x. \log 5 = \log 10$

$x = \dfrac{1}{\log 5} = 1{,}431$ (tiga angka di belakang koma).

b) $2^{(x+1)} = 12$

$\log 2^{(x+1)} = \log 12$

$(x + 1) \log 2 = \log 12$

$(x+1) = \dfrac{\log 12}{\log 2}$

$x + 1 = 3{,}585$

$x = 3{,}585 - 1 = 2{,}585$ (tiga angka dibelakang koma).

Latihan 1.G

Hukum-hukum Logaritma

1. Hitunglah!

a) ${}^{9}\log 1$　b) ${}^{e}\log 1$　c) ${}^{e}\log 7$　d) ${}^{4}\log 0$

e) ${}^{10}\log 3$　f) ${}^{10}\log 10$　g) ${}^{10}\log 100$　h) ${}^{5}\log 25$

2. Tulislah berikut ini dalam bentuk perpangkatan!

a) ${}^{2}\log 16 = 4$　b) ${}^{3}\log 27 = 3$　c) ${}^{x}\log 64 = 6$

d) ${}^{x}\log 25 = 2$　e) ${}^{2}\log 125 = x$　f) ${}^{10}\log 10000 = x$

g) ${}^{3}\log x = 8$　h) ${}^{7}\log \dfrac{1}{49} = -2$　i) ${}^{5}\log \dfrac{1}{5} = -1$

3. Tuliskan bilangan berikut ini ke dalam bentuk logaritma!
   a) $2^3 = 8$ b) $3^4 = 81$ c) $2^5 = 32$
   d) $4^3 = x$ e) $4^5 = x$ f) $5^x = 25$
   g) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ h) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ i) $x^4 = 16$
4. Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator!
   a) ${}^{10}\log 3$ b) ${}^{10}\log 5$ c) ${}^{10}\log 0{,}5$
   d) ${}^{10}\log 30$ e) ${}^{10}\log 50$ f) ${}^{10}\log 200$
5. Sederhanakan dan hitung tanpa menggunakan kalkulator!
   a) ${}^{6}\log 3 + {}^{6}\log 2$ b) ${}^{10}\log 5 + {}^{10}\log 7$ c) ${}^{10}\log 8 - {}^{10}\log 3$
   d) ${}^{3}\log 5 - {}^{3}\log 2$ e) ${}^{2}\log 32$ f) ${}^{3}\log 81$
   g) ${}^{3}\log \frac{1}{81}$ h) ${}^{5}\log \frac{1}{25}$
6. Sederhanakan!
   a) ${}^{2}\log \sqrt{x}$ b) ${}^{3}\log \sqrt[3]{x}$ c) $3\,{}^{3}\log \sqrt[3]{x}$
   d) $4\,{}^{4}\log \sqrt[4]{x}$ e) ${}^{2}\log \sqrt{\frac{x^4}{y^2}}$ f) $3\,{}^{3}\log \sqrt[5]{\frac{x^{15}}{y^{45}}}$
7. Sederhanakan!
   a) ${}^{4}\log 10 + {}^{4}\log 2 - {}^{4}\log 5$ b) ${}^{5}\log 10 + {}^{5}\log 2 - {}^{5}\log 4$
   c) ${}^{5}\log 25 + {}^{5}\log 125 - {}^{5}\log 625$ d) ${}^{5}\log 4 + {}^{5}\log \frac{1}{4}$
   e) $\frac{1}{2}\,{}^{10}\log 16 + {}^{10}\log 5^2$ f) $\frac{1}{2}\,{}^{10}\log 25 + {}^{10}\log 2$
   g) ${}^{3}\log 2 - {}^{3}\log 10 + {}^{3}\log 15$ h) ${}^{5}\log 4 - {}^{5}\log 8 + {}^{5}\log 10$
8. Sederhanakan!
   a) $4\,{}^{2}\log 12 - 4\,{}^{2}\log 6$ b) $3\,{}^{2}\log 3 - 3\,{}^{2}\log 6$
   c) $2 + 5\log 10 - 5\log 2$ d) $2 + {}^{5}\log 2 - 5\log 10$
   e) $1 + 2\log 5$ f) $3 + 3\log 2$
   g) $\frac{{}^{2}\log 64}{{}^{2}\log 8}$ h) $\frac{{}^{5}\log 125}{{}^{5}\log 25}$
   i) $\frac{{}^{a}\log \sqrt{x}}{{}^{a}\log x}$ j) $\frac{{}^{a}\log x^2}{{}^{a}\log x^3}$

9. Sederhanakan!

a) $5\,{}^{3}\log x + {}^{3}\log x^2 - {}^{3}\log x^7$

b) $3\,{}^{2}\log x + {}^{2}\log x^3 - {}^{2}\log x^6$

c) $3\,{}^{4}\log x - 5\,{}^{4}\log x^2 + 2\,{}^{3}\log x$

d) $4\,{}^{6}\log x - 5\,{}^{6}\log x + {}^{6}\log x$

e) ${}^{10}\log x^2 + 3\,{}^{10}\log x - 2\,{}^{10}\log x^7$

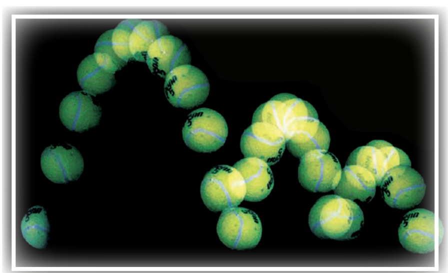
f) $4\,{}^{10}\log x - {}^{10}\log x + {}^{10}\log x^2$

g) ${}^{5}\log (x + 5) + {}^{5}\log (x + 1)^2$

h) ${}^{4}\log (x - 2)^3 - 2\,{}^{4}\log (x - 2)$

Soal-soal kontekstual

10. Selesaikanlah persoalan berikut ini dengan aturan logaritma!



Sumber: Maths Quest

Sebuah bola tenis dijatuhkan dari ketinggian 100 cm. Memantul dan pantulannya 80% dari ketinggian sebelumnya.
Ketinggian bola *h* cm setelah *n* kali memantul dirumuskan

$$h = A \times a^n$$

Dengan A ketinggian semula ketika dijatuhkan dan a persentasi ketinggian yang dicapai bola terhadap pantulan sebelumnya.

a) Berapa ketinggian bola setelah 5 kali memantul?

b) Berapa kali pantulan yang terjadi sebelum bola mencapai ketinggian kurang dari 1 cm?

11. Intensitas gempa bumi sering dilaporkan dengan skala Richter.

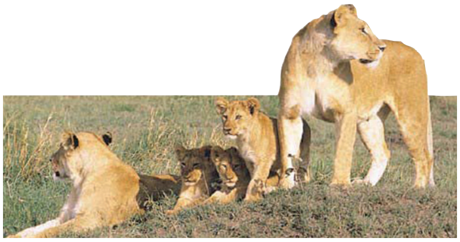
Sumber: Maths Quest

Jika besarnya R dinyatakan sebagai:

$$R = {}^{10}\log\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

dengan a adalah amplitudo pergerakan tanah dalam ukuran micron yang diterima oleh pos pengukur gempa, T adalah periode gelombang seismic dalam ukuran detik, dan B adalah adalah faktor alam yang memperlemah gelombang seismic dengan bertambahnya jarak dari pusat gempa (*epicentrum*). Temukan besarnya gempa bumi jika amplitudo pergerakan tanah adalah 10 micron, periode terjadinya gempa 1 detik dan faktor alam 6,8.

12. Banyaknya singa, S, di cagar alam liar dinyatakan dalam $S = 20(10^{0,1t})$, dengan t adalah banyaknya tahun sejak perhitungan dimulai. Dalam waktu yang sama banyaknya cetah, C, dinyatakan dalam $C = 25(10^{0,05t})$.



Sumber: Maths Quest

Tentukan:
   a. banyaknya singa ketika perhitungan baru dimulai
   b. banyaknya cetah ketika perhitungan baru dimulai
   c. temukan banyaknya singa dan cetah setelah 1 tahun
   d. temukan banyaknya singa dan cetah setelah 18 bulan
   e. binatang mana yang mencapai jumlah populasi 40 ekor pertama kalinya dan berapa lama waktu dibutuhkan?
   f. setelah berapa bulan jumlah kedua populasi tersebut sama dan berapa jumlah populasinya.

13. Harga emas H (puluhan ribu per ons) sejak tahun 1980 dapat dimodelkan dalam fungsi: $H = 400 + 50\ {}^{10}\log (5t + 1)$, dimana t adalah banyaknya tahun sejak 1980.
   a. Temukan harga emas per ons pada tahun 1980
   b. Temukan harga emas di tahun 1999
   c. Pada tahun berapakah harga emas melebihi 550 (puluhan ribu rupiah) per ons?

Sumber: Maths Quest

14. Populasi di sebuah kota, N, dimodelkan dengan fungsi $N = 15000(2^{0,01t})$ dengan t adalah banyaknya tahun sejak tahun 1980
   a. Temukan populasi di tahun 1980
   b. Temukan populasi di tahun 1985 dan 1990
   c. Dapatkah kamu memperkirakan berapa populasi di tahun 2005?
   d. Pada tahun berapakah populasi mencapai 20000

15. Berat bayi, W kg, t minggu setelah kelahiran dapat dimodelkan sebagai $W = 3\ {}^{10}\log (8t + 10)$.
   a. Temukan berat bayi ketika dilahirkan

b. Temukan berat bayi setelah

i) 1 minggu ii) 5 minggu iii) 10 minggu

c. Sketlah grafiknya

d. Kapan bayi mencapai berat 7 kg?

16. Tubuh senantiasa memiliki suhu tubuh lebih tinggi dari pada lingkungan sekitar. Hukum Newton tentang pendinginan dinyatakan dengan formula $\theta = \theta_0 e^{-kt}$, dengan θ adalah perbedaan antara suhu tubuh dan suhu lingkungan sekitar setelah t menit dan θ_0 perbedaan suhu tubuh mula-mula dengan suhu lingkungan sekitar. Jika suhu segelas kopi adalah 90^0 C di sebuah ruangan dengan suhu konstan 18^0 C dan mendingin mencapai suhu 65^0 setelah 10 menit. Temukan nilai k. Berikan jawabanmu dalam bentuk dua tempat desimal.

Sumber: images.google.co.id

17. Skala Ritcher digunakan untuk mengukur "kekuatan" dari gempa bumi. Rumus untuk skala Ritchter adalah

$$R = \frac{2}{3} \log K - 0{,}9$$

dimana R adalah nilai skala Richter yang menghasilkan K kilojoules (kJ) energi.

Sumber: encarta encyclopedi

a) Temukan nilai skala Richter untuk gempa bumi yang menghasilkan energi sebesar:

i) 1000 kJ iv) 10000 kJ

ii) 2000 kJ v) 100000 kJ

iii) 3000 kJ vi) 1000000 kJ

b. Apakah dua kali lipat energi yang dihasilkan akan menyebabkan dua kali lipat pula nilai skala Richter?

c. Hitunglah energi yang dihasilkan oleh suatu gempa bumi jika alat pendeteksi menunjukkan nilai:

i) 4 skala Richter iii) 6 skala Richter

ii) 5 skala Richter

d. Apa efeknya terhadap energi yang dihasilkan jika nilai skala Richter mengalami peningkatan sebesar 1?

e. Mengapa gempa bumi yang terukur dengan 8 skala Richter pengaruhnya lebih dahsyat dibanding jika terjadi pada 5 skala Richter?

18. Suhu, T (^{o}C), pada pendinginan segelas kopi dalam sebuah ruangan yang bersuhu 20^{o} C dapat dinyatakan dengan $T = 90(3^{-0,05t})$, dengan t banyaknya menit setelah dituangkan.
    a. Temukan suhu segelas kopi mula-mula
    b. Temukan suhu segelas kopi tersebut:
        i) 3 men0it setelah dituangkan
        ii) 6 menit setelah dituangkan
    c. Berapa lama waktu yang diperlukan sampai suhu mencapai separoh dari suhu mula-mula?

19. Luas hektar, N, dari hutan yang terbakar dalam waktu t jam dapat dinyatakan sebagai:

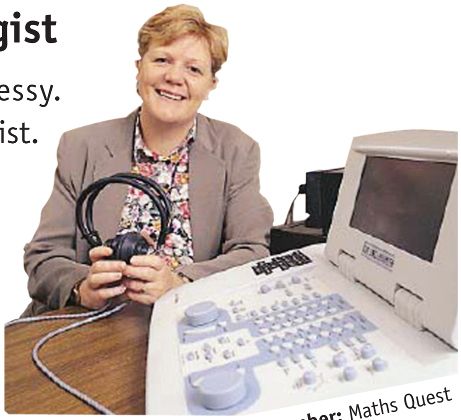
    $N = 40\ {}^{10}\log (500t + 1)$
    a. Tentukan luas lahan hutan yang terbakar setelah:
        i) 1 jam   iii) 10 jam
        ii) 2 jam
    b. Berapa lama waktu yang diperlukan sampai api melahap hutan seluas 155 hektar?

Sumber: Maths Quest

20. Setelah program daur ulang (recycling) diperkenalkan berat tumpukan sampah yang dibuang oleh rumah tangga setiap minggunya dapat dinyatakan sebagai $W = 80(2^{-0,015t})$, dengan W adalah berat dalam kg dan t menyatakan banyaknya minggu sejak program daur ulang diperkenalkan.
    a. Hitunglah berat tumpukan sampah buangan rumah tangga sebelum program daur ulang diperkenalkan.
    b. Hitunglah berat tumpukan sampah setelah program daur ulang diperkenalkan setelah:
        i) 10 minggu   ii) 40 minggu
    c. Berapa lama waktu yang diperlukan untuk berat timbunan sampah menjadi separohnya setelah program daur ulang diperkenalkan?
    d. Apakah model tersebut masih berlaku untuk 10 tahun ke depan? Jelaskan!

F. Matematika dalam Dunia Kerja

Alisson Hennessy - Audiologist



Sumber: *Maths Quest*

Nama saya adalah Alisson Hennessy. Saya adalah seorang ahli audiologist. Saya bekerja pada Bionic Ear Institute di Melbourne. Bagi saya audiologi adalah ilmu yang saya cintai dan lewat ilmu ini bermanfaat bagi orang lain.

Sebagian besar waktu hidup saya berada di klinik pendengaran. Orang datang ke klinik saya untuk menguji pendengarannya, konsultasi tentang kehilangan pendengarannya, dan untuk mencari dan menguji alat bantu dengar yang cocok untuk dirinya.

Saya menggunakan berbagai formula yang berbeda dalam merekomendasikan pembesaran suara (*amplification*) yang diperlukan alat bantu dengar klien berpendengaran lemah. Banyaknya pembesaran suara tergantung pada berbagai faktor, seperti pendengaran yang kehilangan frekuensi tertentu, pendengaran yang kehilangan frekuensi-frekuensi yang lainnya.

Salah satu formula yang saya gunakan untuk menghitung tingkat intensitas suara, yang diukur dalam satuan decibel adalah:

$$L = 10\ {}^{10}\log \frac{I}{I_o}$$

dengan L adalah tingkat intensitas suara dalam (dB), I intensitas suara dalam watt per meter persegi (W/m^2) dan I^o adalah intesitas suara baku yang merupakan ambang suara yang dapat didengar yang memiliki nilai $1{,}0 \times 10^{-12}$ W/m^2.

Untuk dapat memahami artikel-artikel pada jurnal dan materi-materi pemasaran yang dikirimkan oleh perusahaan alat bantu dengar, saya perlu memahami proses matematika. Matematika adalah bagian dari cara kerja saya. Penggunaannya adalah mengecek tingkat kehilangan pendengaran secara tepat dan memberikan layanan yang tepat untuk meningkatkan pendengaran. Untuk melakukan hal ini saya meluangkan waktu untuk berbicara dengan klien saya dan menguji pendengarannya. Jadi suksesnya pekerjaan saya banyak bergantung pada prinsip-prinsip sains dan proses matematika.

Pertanyaan:

Gunakan formula matematika untuk menghitung tingkat intensitas suara pada alat pengebor karang/batu (*jackhammer*) yang berjarak 10 meter dan memiliki tingkat intensitas suara $1{,}5 \times 10^{-3}$ W/m^2.

PADI PANDAN WANGI

Sumber: www.sciencedaily.com

Varietas padi baru pandan wangi dilepas oleh Balai Besar Penelitian Tanaman Padi Subang Jawa Barat tahun 1991. Teknisi BBPTP tersebut, **Dr. Aan A Daradjat** dan **Ir. Suwito MS** menjelaskan bahwa padi atau tanaman jenis ini termasuk kelompok jenis padi sawah yang memiliki ciri-ciri warna kaki hijau, warna batang hijau, warna daun telinga tidak berwarna, muka daun kasar, posisi daun tegak, daun bendera tegak, dan kerebahan kurang tahun. Varietas jenis pandan wangi ini termasuk tanaman padi yang memiliki anakan produktif yaitu antara 10 sampai 18 anakan (rata-rata 14 anakan) dari setiap bulir yang ditanamnya. Setiap anakan atau tangkainya biasanya menghasilkan bulir padi sekitar (pen: 126) bulir.

Terkait dengan varietas padi ini, teknisi BBPTP Subang tersebut menambahkan bahwa pandan wangi termasuk jenis yang rentan terhadap hama wereng coklat biotipe 2 dan 3, rentan terhadap penyakit hawar daun bakteri strain 4, dan rentan terhadap penyakit tungro. Dalam setiap Ha-nya mampu dihasilkan 7,4 ton GKG.

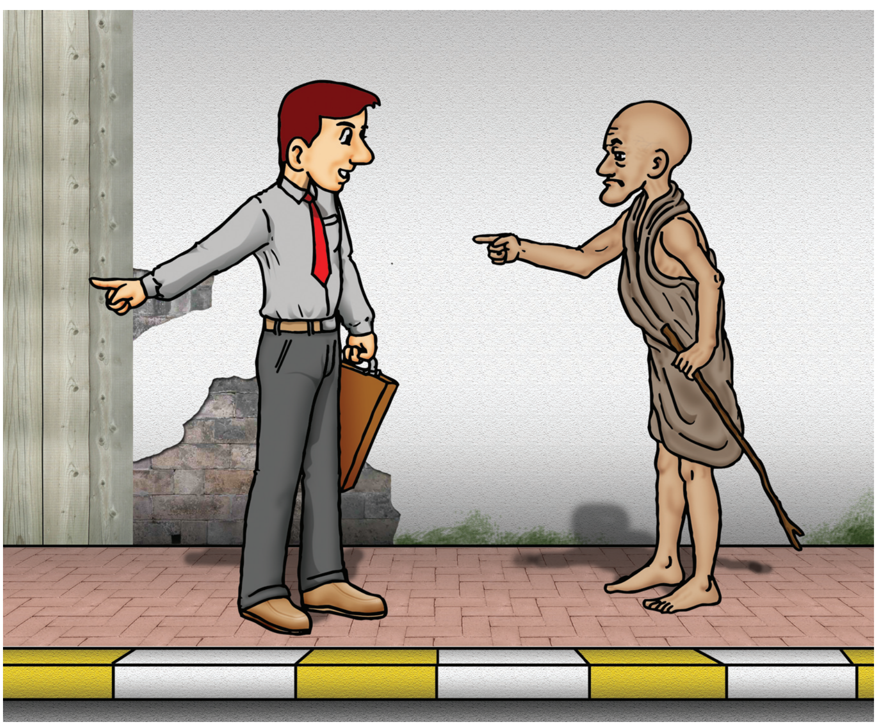
Bentuk gabahnya bulat dengan warna kuning emas. Bobot 1000 bulirnya adalah 29,7 gram (jika dibulatkan sekitar 30 gram). Tekstur nasi beras ini pulen dengan kadar amilosa sekitar 24,96%.

Pertanyaan:

Jika 1 ha sawah membutuhkan 6 kantong benih pandan wangi, yang setiap kantongnya memiliki berat sekitar 5 kg. Dapatkah kamu memperkirakan berapa bulir padi yang akan dihasilkan ketika panen?

Jelaskan perkiraanmu tersebut!

Inspirasi Pagi .....



Seorang eksekutif muda bertemu dengan seorang guru di sebuah jalan raya. Ia bertanya, "Guru, yang manakah jalan menuju sukses? "Sang guru terdiam sejenak. Tanpa mengucapkan sepatah kata, sang guru menunjuk ke arah sebuah jalan. Eksekutif muda itu segera berlari menyusuri jalan yang ditunjukkan sang guru. Ia tak mau membuang-buang waktu lagi untuk meraih kesuksesan. Setelah beberapa saat melangkah tiba-tiba ia berseru, “Ha! Ini jalan buntu!”

Benar, dihadapannya berdiri sebuah tembok besar yang menutupi jalan. Ia terpaku kebingungan, “Barangkali aku salah mengerti maksud sang guru.” Eksekutif muda itu berbalik menemui sang guru untuk menanyakan sekali lagi, “Guru, yang manakah jalan menuju sukses.” Sang guru menunjuk ke arah yang sama. Eksekutif muda itu berjalan ke arah itu lagi. Namun yang ditemuinya tetap saja sebuah tembok yang menutupi jalan. Ia merasa dipermainkan. Dengan penuh amarah ia menemui sang guru, “Guru, aku sudah menuruti petunjukmu.

Tetapi yang aku temui adalah sebuah jalan buntu. Aku tanyakan sekali lagi padamu, yang manakah jalan menuju sukses? Kau jangan hanya menunjukkan jari saja, tetapi bicaralah!”

Akhirnya sang guru berbicara, “Di situlah jalan menuju sukses. Hanya beberapa langkah saja di balik tembok itu.” Keberhasilan seringkali tak tampak karena ia bersembunyi di balik kesulitan. Cuma orang-orang yang mampu mendaki“tembok” itulah yang akan menemui keberhasilan. (*Anynomous*)

Rangkuman

1. Untuk $a, b \in R$, $a \neq 0$ dan m, n bilang an bulat positif
   a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   b) $a^m : a^n = a^{m-n}$
   atau $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   c) $(a^m)^n = a^{m \times n}$
   d) $(ab)^m = a^m b^m$
   e) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
   f) $a^0 = 1$
   g) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dimana $a \neq 0$

2. Sebuah bilangan dikatakan dalam bentuk notasi ilmiah (*scientific notation*) apabila dituliskan sebagai: $A \times 10^n$ dimana $1 \leq A < 10$, $A \in R$, $n \in B$

3. Untuk setiap $a \in R$ bukan negatif, $q \in B^+$ maka berlaku: $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$

4. Untuk setiap $a \in R$ bukan negatif, $p \in B$ bukan nol, dan $q \in B^+$ maka berlaku:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

5. Bilangan rasional, Q, berisi bilangan-bilangan yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk pecahan $\frac{m}{n}$ dengan $m,\ n \in B,\ n \neq 0$. Himpunan bilangan irrasional, Q', berisi bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pecahan.

6. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ dengan $a,\ b \in B$ positif

7. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dengan $a,\ b \in B$ positif

8. $a^x = y \Leftrightarrow x = {}^a\log y$
   dimana:
   a : *bilangan pokok* (*basis*) logaritma dengan a > 0 dan $a \neq 1$ apabila a tidak ditulis berarti bilangan pokoknya 10
   y : *numerus*, yaitu bilangan yang ditarik logaritmanya syarat y > 0
   x : *hasil logaritma* atau identik dengan *pangkat* yang dicari

9. Hukum-hukum logaritma

   1) ${}^a\log 1 = 0$
   2) ${}^a\log 0$ tidak terdefinisi
   3) ${}^a\log(-3)$ tidak terdefinisi
   4) ${}^a\log a = 1$
   5) ${}^a\log mn = {}^a\log m + {}^a\log n$
   6) ${}^a\log \frac{m}{n} = {}^a\log m - {}^a\log n$
   7) ${}^a\log m^p = p \cdot {}^a\log m$
   8) ${}^a\log b = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log a}$
   9) Jika ${}^a\log b = p$ maka ${}^b\log a = \frac{1}{p}$
   10) ${}^a\log b \times {}^b\log c \times {}^c\log d = {}^a\log d$

Ujilah dirimu

Soal Pilihan Ganda

1. Bentuk sederhana dari $2^3 \times (2^2)^3$ adalah ....
   a. 2^7
   b. 2^8
   c. 2^9
   d. 2^{12}
   e. 2^{18}

2. Nilai dari $(64)^{\frac{2}{3}} \cdot (125)^{\frac{1}{6}} \cdot \dfrac{1}{5^{\frac{1}{2}}}$ = ...
   a. 0,16
   b. 1,6
   c. 6,4
   d. 16
   e. 64

3. Nilai dari $\dfrac{125^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{2^3}$ adalah ....
   a. 1
   b. 2
   c. 4
   d. 8
   e. 16

4. Jika a = 27 dan b = 32, maka nilai dari $3(a^{-1}) \times 4b^{\frac{2}{5}}$ adalah ....
   a. –25
   b. –16
   c. 0
   d. 16
   e. 25

5. Bentuk $\dfrac{5a^{\frac{5}{2}}\sqrt{b}}{20b\sqrt{a}}$ bila dinyatakan dalam pangkat positif adalah ....
   a. $4a^2b$
   b. $\dfrac{a^2\sqrt{b}}{4}$
   c. $\dfrac{4a^2}{b}$
   d. $\dfrac{a^2}{2^2b^{\frac{1}{2}}}$
   e. $\dfrac{4\sqrt{b}}{a^2}$

6. Nilai dari $3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{72} = \ldots.$

a. $-8\sqrt{2}$
b. $2\sqrt{2}$
c. $-\sqrt{8}$
d. 0
e. 2

7. Dengan merasionalkan penyebut, bentuk sederhana dari $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ adalah ....

a. $3-\sqrt{2}$
b. $3+\sqrt{2}$
c. $21-7\sqrt{2}$
d. $21-\sqrt{2}$
e. $21+7\sqrt{2}$

8. Bentuk sederhana dari $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ adalah ....

a. $-\sqrt{2}$
b. $3\sqrt{2}$
c. $3-2\sqrt{2}$
d. $3+2\sqrt{2}$
e. $-3-2\sqrt{2}$

9. Jika ditentukan $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ dan $b = \sqrt{3} - \sqrt{5}$

maka nilai dari $a^2 - ab + b^2$ adalah ....

a. $2\sqrt{5}$
b. 20
c. $2\sqrt{3}$
d. 12
e. $-2\sqrt{5}$

10. Nilai x yang memenuhi persamaan $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ adalah ....

a. $2\sqrt{5}$
b. 20
c. $2\sqrt{3}$
d. 12
e. $-2\sqrt{5}$

11. Nilai x yang memenuhi persamaan $\dfrac{5}{3} \cdot 5^{(3-x)} \cdot 3^{(x-3)} = \sqrt[x]{\dfrac{625}{81}}$ adalah ....

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

12. Nilai x dari $8^{3x+2} = 0{,}125$ adalah ...
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 3

13. Penyelesaian dai persamaan $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{125}{5^{(4-x)}}}$ adalah ....
   a. -3
   b. -2
   c. $\frac{2}{3}$
   d. 2
   e. $2\frac{1}{3}$

Problem Solving

Mulailah dengan $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
Buktikan bahwa:
a) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$
b) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

14. Bentuk sederhana dari $\sqrt{8+\sqrt{60}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}$ adalah ....
   a. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
   b. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
   c. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$
   d. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$
   e. 0

15. Hasil dari $\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ adalah ....
   a. $2-\sqrt{2}$
   b. $-2-\sqrt{2}$
   c. $3-\sqrt{5}$
   d. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$
   e. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

16. Jumlah akar-akar perasamaan $2^{2x+1} - 5\cdot 2^{x} + 2 = 0$ adalah....
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

17. Himpunan penyelesaian persamaan $9^{3x} - 2.3^{3x+1} - 27 = 0$ adalah ....
   a. $\{\frac{2}{3}\}$
   b. $\{\frac{4}{3}\}$
   c. $\{\frac{8}{3}\}$
   d. $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$
   e. $\{\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\}$

18. Diketahui $2^x + 2^{-x} = 5$. Nilai $2^{2x} + 2^{-2x} = \ldots.$
    a. 23
    b. 24
    c. 25
    d. 26
    e. 27

19. Nilai dari $\log\ 24 - \log 2\sqrt{3} + 2\log\frac{1}{9} + \log 2\frac{1}{4}$ adalah ....
    a. $-1\frac{1}{2}$
    b. $-\frac{1}{2}$
    c. $\frac{1}{2}$
    d. 1
    e. $2\frac{1}{2}$

20. Nilai dari $\,^{3}\log 12 - 3^{3}\log 2 + ^{3}\log 9 - ^{3}\log\frac{1}{2} = \ldots.$
    a. 3
    b. 9
    c. 18
    d. 27
    e. 81

21. Diketahui $^{2}\log 3 = 1{,}6$ dan $^{2}\log 5 = 2{,}3$. Nilai $^{2}\log\frac{125}{9}$ adalah ....
    a. 10,1
    b. 6,9
    c. 5,4
    d. 3,7
    e. 3,2

22. Nilai $\dfrac{^{2}\log 36 \cdot {}^{7}\log 9 \cdot {}^{6}\log 49}{^{2}\log 18 - {}^{2}\log 6} = \ldots.$
    a. 2
    b. 4
    c. 6
    d. 8
    e. 12

23. Nilai dari $\dfrac{\log 5\sqrt{5} + \log\sqrt{3} + \log 45}{\log 15} = \ldots.$
    a. $3\frac{1}{2}$
    b. $2\frac{1}{2}$
    c. $1\frac{1}{2}$
    d. $3\frac{1}{3}$
    e. $4\frac{1}{5}$

24. Nilai dari $\dfrac{(^{3}\log 36)^2 - (^{3}\log 4)^2}{^{3}\log\sqrt{12}} = \ldots.$
    a. 6
    b. –8
    c. 5
    d. 8
    e. 4

25. Jika ${}^{a}\log 64 = \frac{3}{2}$ maka nilai a adalah:

a. 512
b. 96
c. $42\frac{2}{3}$
d. 16
e. 8

26. Diketahui ${}^{2}\log 3 = x$ dan ${}^{2}\log 25 = y$ maka ${}^{2}\log 45\sqrt{3}$ adalah ....

a. $\frac{1}{2}(5x + 2y)$
b. $\frac{1}{2}(5x + y)$
c. $5x + y$
d. $x\sqrt{x} + y$
e. $x^2\ y\sqrt{x}$

27. Jika ${}^{2}\log 5 = a$ dan ${}^{5}\log 7 = b$ maka ${}^{35}\log 40$ adalah ....

a. $\frac{a+3}{b+1}$
b. $\frac{a+3}{a(b+1)}$
c. $\frac{a+1}{ab+1}$
d. $\frac{a+3}{b(a+1)}$
e. $\frac{a+1}{b+1}$

28. Nilai x yang memenuhi persamaan ${}^{5}\log (3 - 2x) + {}^{5}\log (2 + x) = 1$ adalah ....

a. 4
b. -1 atau $\frac{1}{2}$
c. 1 atau $-\frac{1}{2}$
d. -2 atau $\frac{3}{2}$
e. 2 atau $-\frac{3}{2}$

29. Himpunan penyelesaian persamaan ${}^{3}\log (x - 2) + {}^{3}\log (x - 4) = 1$ adalah....

a. {–5, 1}
b. {–1, 5}
c. {1, 5}
d. {1}
e. {5}

30. Akar persamaan ${}^{2}\log(x^2 - 2x) = {}^{2}\log 3$ adalah x_1 dan x_2. Jika $x_1 > x_2$ maka nilai $x_1 - x_2$ adalah ....

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

Soal Uraian

31. Sederhanakan:

a) $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+....}}}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{14+2\sqrt{48}}-\sqrt{14-2\sqrt{48}}$

d) $\sqrt{4+\sqrt{33+12\sqrt{6}}}$

32. Tentukan nilai p dari persamaan berikut:

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3....}}}=p$

33. Hitung nilai x dari $\sqrt{8^{2x-1}\sqrt{32^{2-x}}}=\frac{1}{64^{\frac{1}{3}x-1}}$

34. Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a) $625\cdot(5^{x+3})^x=\frac{5\sqrt{5}}{5^{2x+1}}$

b) $5^{2x}+5^{1+x}+6=0$

c) $3^{2x+1}-8\cdot 3^x-3=0$

d) $9^x-12\cdot 3^x+27=0$

35. Sebuah persegi panjang panjangnya $(7-3\sqrt{2})$ cm dan panjang diagonalnya $(5+2\sqrt{3})$ cm. Hitunglah luasnya!

36. Tentukan nilai x dari:

a) ${}^2\log x + {}^2\log (x-2) = 3$

b) ${}^5\log (3-2x) + {}^5\log (2+x) = 3$