

CAPITULO I

VISCOSIDAD Y MECANISMO DEL TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La primera parte de este libro trata del flujo de fluidos viscosos. La propiedad física que caracteriza la resistencia al flujo de los fluidos sencillos es la *viscosidad*. Cualquiera que haya adquirido aceite lubricante de automóvil sabe que unos aceites son mas «viscosos» que otros, y que, además, la viscosidad varía con la temperatura. En este primer capítulo se estudian las viscosidades de gases y líquidos desde un punto de vista cuantitativo. Esta información será necesaria de forma inmediata en el Capítulo 2, para la resolución de problemas de flujo viscoso.

Se comienza en § 1.1 por establecer la ley de Newton de la viscosidad, presentando algunos valores numéricos, para indicar cómo varía esta con las condiciones y naturaleza del fluido. En § 1.2 se estudian brevemente los fluidos no-newtonianos, a los que no es aplicable la ley de la viscosidad de Newton. La influencia de la temperatura y la presión sobre la viscosidad de gases y líquidos se resume en § 1.3. Finalmente, en §§ 1.4 y 1.5 se estudia la viscosidad desde el punto de vista de los procesos moleculares, y se comparan los mecanismos del transporte de cantidad de movimiento en gases y líquidos.

§ 1.1 LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

Consideremos un fluido (líquido o gas) contenido entre dos grandes láminas planas y paralelas, de área A , separadas entre sí por una distancia muy pequeña y (véase Fig. 1.1-1). Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo, pero que al cabo del tiempo $t = 0$, la lámina inferior se pone en movimiento en la dirección del eje x , con una velocidad constante V . A medida que transcurre el tiempo el fluido gana cantidad de movimiento, y, finalmente se establece el perfil de velocidad en régimen estacionario, que se indica en la Fig. 1.1-1. Una vez alcanzado dicho estado estacionario de movimiento, es preciso aplicar una fuerza constante F para conservar el movimiento de la lámina inferior. Esta fuerza viene dada por la siguiente expresión (suponiendo que el flujo es laminar):

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y}$$

Es decir, que la fuerza por unidad de área es proporcional a la disminución de la velocidad con la distancia Y . La constante de proporcionalidad μ se denomina *viscosidad* del fluido.

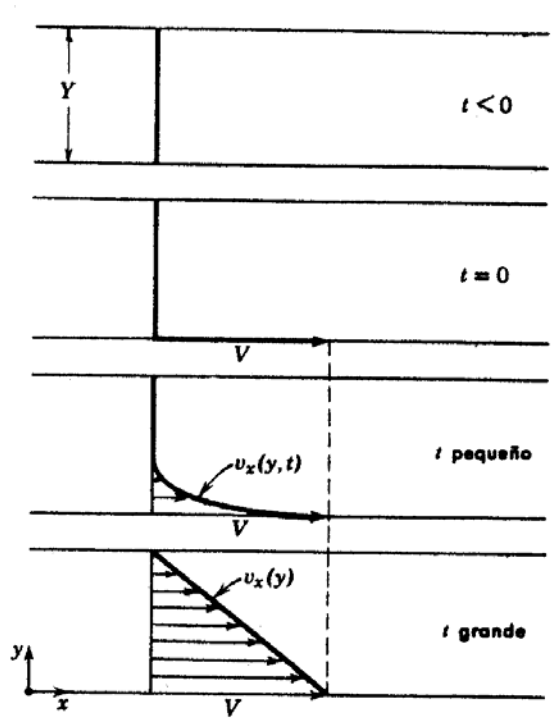


Fig. 1.1-1. Formación del perfil de velocidad en estado estacionario para un fluido contenido entre dos láminas.

Para la posterior utilización de la Ec. 1.1-1 es conveniente expresarla en una forma más explícita. El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección x sobre la superficie de un fluido, situada a una distancia constante y , por el fluido existente en la región donde y es menor, se designa por τ_{yx} , y el componente x del vector de velocidad del fluido, por V_x . Téngase en cuenta que V_x no es igual a $\partial v / \partial x$; en este no se utilizan subíndices para expresar la diferenciación de los componentes en la velocidad. De acuerdo con estos símbolos, la Ec. 1.1-1 queda de la siguiente forma¹

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (1.1 - 2)$$

La equivalencia entre estas dos ecuaciones resulta más evidente si se tiene en cuenta que la Ec. 1.1-1 puede expresarse así:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{O - V}{Y - O} \quad (1.1- 1a)$$

Es decir, que la fuerza de cizalla por unidad de área es proporcional al gradiente negativo de la velocidad local. Esta es la *ley de Newton de la viscosidad*, y los fluidos que la cumplen se denominan *fluidos newtonianos*. Todos los gases y la mayor parte de los líquidos sencillos, se comportan de acuerdo con la Ec. 1.1-2. Los fluidos que no obedecen a esta ley sencilla (esencialmente pastas, suspensiones y polímeros de elevado peso molecular) se estudian en § 1.2.

Resulta también conveniente interpretar la Ec. 1.1-2 en esta otra forma. En las inmediaciones de la superficie que se mueve, donde $y = 0$, el fluido adquiere una determinada cantidad de movimiento en la dirección del eje x . Este fluido comunica, a su vez, parte de su cantidad de movimiento a la «capa» adyacente de líquido, dando lugar a que se mantenga en movimiento en la dirección x . Por lo tanto, tiene lugar una transmisión de cantidad de movimiento x a través del fluido en la dirección y , y, por consiguiente, τ_{yx} , puede interpretarse también como la densidad del flujo² viscoso de cantidad de movimiento x en la dirección y . Esta interpretación está en íntima relación con la naturaleza de los procesos de transporte de cantidad de movimiento, y se corresponde con el tratamiento que se da más adelante para el transporte de materia y energía. Por otra parte, la densidad de flujo de cantidad de movimiento resulta más conveniente para considerar el signo de τ_{yx} .

De acuerdo con la Ec. 1.1- 2, se deduce que la densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento sigue la dirección del gradiente negativo de velocidad³; es decir, que sigue la dirección de velocidad decreciente. En otras palabras, la cantidad de movimiento va «cuesta abajo», en el sentido de que desciende de una región de velocidad alta a otra de baja velocidad, de la misma forma que un trineo se desliza desde un lugar elevado hasta otro más bajo, y el calor fluye de una zona caliente hacia otra más fría. El gradiente de velocidad puede considerarse, por consiguiente, como una «fuerza impulsora» del transporte de cantidad de movimiento.

En los párrafos que siguen nos referiremos a la ley de Newton de la Ec. 1.1.2, unas veces en términos de fuerzas (lo que pone de manifiesto la naturaleza esencialmente mecánica del tema que estamos considerando), y otras, en términos de transporte de cantidad de movimiento (con el fin de resaltar las analogías con el transporte de materia y energía). Este doble punto de vista no crea una dificultad especial, y en cambio, en algunos casos resulta extraordinariamente útil.

En algunas fórmulas que aparecen en los últimos capítulos del libro, resulta conveniente disponer de un símbolo para representar la viscosidad del fluido dividida por su densidad (masa por unidad de volumen), y con este fin vamos a definir ν que es la denominada *viscosidad cinemática*.

²La densidad de flujo representa la «velocidad de flujo por unidad de área». La densidad de flujo de cantidad de movimiento tiene, por tanto, las unidades de cantidad de movimiento por unidad de área y unidad de tiempo. El lector podrá comprobar que corresponde a una fuerza por unidad de área.

³Una ligera consideración de § 8.1 pone de manifiesto que el comportamiento es el mismo que en la conducción del calor, donde la densidad de flujo de calor es proporcional al gradiente negativo de temperatura.

$$\nu = \mu / \rho \quad (1.1 - 3)$$

Dedicaremos unas líneas a considerar las unidades de algunas magnitudes que ya hemos definido. El caso más sencillo corresponde al sistema cgs, para el cual⁴

$$\begin{aligned}\tau_{yx} [=] & \text{ dina cm}^{-2} \\ V_x [=] & \text{ cm seg}^{-1} \\ y [=] & \text{ cm}\end{aligned}\quad (1.1 - 4)$$

Puesto que los dos miembros de la Ec. 1.1. – 2 han de corresponderse, tanto en sus unidades como en el valor numérico, se pueden deducir las unidades de μ en el sistema cgs, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mu = - \tau_{yx} (dv_x / dy)^{-1} [=] & (\text{g}_m \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-2}) (\text{cm seg}^{-1} \text{ cm}^{-1})^{-1} \\ [=] & \text{ g}_m \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}\end{aligned}\quad (1.1 - 5)$$

Análogamente,

$$v = \mu / \rho [=] \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1} \quad (1.1 - 6)$$

La unidad $\text{g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$, en el sistema cgs, se denomina *poise*; la mayor parte de los datos de viscosidad están expresados en esta unidad o en centipoises ($1\text{cp} = 0,01 \text{ poise}$). La serie análoga de unidades en el sistema Giorgi es

$$\begin{aligned}\tau_{yx} [=] & \text{ newton m}^{-2} \\ V_x [=] & \text{ m seg}^{-1} \\ y [=] & \text{ m} \\ \mu [=] & \text{ kg}_m \text{ m}^{-1} \text{ seg}^{-1} \\ v [=] & \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}\end{aligned}\quad (1.1 - 7)$$

La consistencia de estas unidades viene dada por la Ec. 1.1–2. Pero, como habitualmente no se utiliza el newton como unidad de fuerza, es preferible expresar la Ec. 1.1-2 en esta otra forma:

$$g_c \tau_{yx} = - \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (1.1 - 8)$$

⁴ El símbolo $[=]$ debe de leerse “tiene las unidades de”,

en la que

$$\begin{aligned}\tau_{yx} [=] & \text{ kg}_f \text{ m}^{-2} \\ V_x [=] & \text{ m seg}^{-1} \\ y [=] & \text{ m} \\ \mu [=] & \text{ kg}_m \text{ m}^{-1} \text{ seg}^{-1} \\ g_c [=] & (\text{kg}_m / \text{kg}_f) (\text{m seg}^{-2}) \text{ o newton} / \text{kg}_f\end{aligned}\quad (1.1 - 9)$$

El valor numérico de g_c “el factor gravitacional de conversión”, expresado en estas unidades, vale 9,8067. Obsérvese que en la Ec. 1.1-8, $g_c \tau_{yx}$, tiene las unidades de newton m^{-2} , y que al dividir por g_c , se obtiene τ_{yx} expresado en $kg_f m^{-2}$.

Aquí se procederá de acuerdo con la Ec. 1.1- 2, y se sobreentenderá que las unidades utilizadas son las que se han indicado en las Ecs. 1.1-4 ó 1.1- 7. Sin embargo, sería conveniente que el lector utilizase fórmulas en uno y otro sistema, ya que ambos se emplean con frecuencia en la bibliografía técnica. En todos los cálculos prácticos es preciso realizar una minuciosa comprobación de la consistencia dimensional.

Ejemplo 1.1-1. Cálculo de la densidad de flujo de cantidad de movimiento

Teniendo en cuenta la Fig. 1.1-1, calcular la densidad de flujo de cantidad de movimiento en estado estacionario, τ_{yx} , expresada en $kg_f m^{-2}$, cuando la velocidad V de la lámina inferior, en la dirección positiva del eje x , es 0,3 m/seg, la distancia entre las láminas Y 0,0003 m, y la viscosidad del fluido μ 0,7 cp.

Solución. Puesto que se desea obtener τ_{yx} , en $kg_f m^{-2}$, pasaremos primeramente todos los datos a las unidades de kg_f -m-seg.

$$\begin{aligned}\mu &= (0,7 \text{ cp}) (1,0194 \times 10^{-4}) \\ &= 7,14 \times 10^{-5} \text{ kg}_f \text{ seg m}^{-2}\end{aligned}$$

Como el perfil de velocidad es lineal,

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{-0,3 \text{ m seg}^{-1}}{0,0003 \text{ m}} = -1000 \text{ seg}^{-1}$$

Substituyendo en la Ec. 1.1-2, queda

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= -\mu \frac{dv_x}{dy} = -(7,14 \times 10^{-5})(-1000) \\ &= 7,14 \times 10^{-2} \text{ kg}_f \text{ m}^{-2}\end{aligned}$$

Si se utiliza la Ec. 1.1-8, se convierte μ e la siguiente forma:

$$\mu = (0,7 \text{ cp})(10^{-3}) = 7 \times 10^{-4} \text{ kg}_m \text{ seg}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Substituyendo en la Ec. 1.1-8,

$$\tau_{yx} = -\frac{\mu dv_x}{g_c dy} = -\frac{7 \times 10^{-4}}{9,81}(-1000) = 7,14 \times 10^{-2} \text{ kg}_f \text{ m}^{-2}$$

que coincide con el resultado obtenido a partir de la Ec. 1.1-2.

En las tablas 1.1-1, 1.1-2 y 1.1-3, se presentan algunos datos experimentales de viscosidad de fluidos puros a 1 atm de presión. Obsérvese que, a temperatura ambiente, μ vale aproximadamente 1 cp para el agua y 0,02 cp para el aire. Véase también como para los *gases* a baja densidad, la viscosidad *aumenta* con la temperatura, mientras que en el caso de los *líquidos*, la viscosidad generalmente *disminuye* al aumentar la temperatura. Este diferente comportamiento frente a la temperatura se estudia en §1.4 y §1.5 desde un punto de vista molecular; aquí indicaremos tan sólo, que en el caso de los gases (en los que las moléculas recorren distancias grandes entre las colisiones), la cantidad de movimiento se transporta esencialmente por las moléculas que se desplazan libremente, mientras que en los líquidos (en los que las moléculas recorren solamente distancias muy cortas entre las colisiones), el mecanismo principal del transporte de cantidad de movimiento consiste en el choque efectivo de las moléculas.

TABLA 1.1-1
VISCOSIDADES DEL AGUA Y EL AIRE A 1 ATM DE PRESIÓN

Agua (líq.) ^a			Aire ^b	
Temperatura $T(^{\circ}\text{C})$	Viscosidad μ (cp)	Viscosidad cinemática $\nu \times 10^2 (\text{cm}^2 \text{seg}^{-1})$	Viscosidad μ (cp)	Viscosidad cinemática $\nu \times 10^2 (\text{cm}^2 \text{seg}^{-1})$
0	1,787	1,787	0,01716	13,27
20	1,0019	1,0037	0,01813	15,05
40	0,6530	0,6581	0,01908	16,92
60	0,4665	0,4744	0,01999	18,86
80	0,3548	0,3651	0,02087	20,88
100	0,2821	0,2944	0,02173	22,98

TABLA 1.1-2
VISCOSIDADES DE ALGUNOS GASES Y LÍQUIDOS A LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA

Gases			Líquidos		
Substancia	Temperatura $T(^{\circ}\text{C})$	Viscosidad μ (cp)	Substancia	Temperatura $T(^{\circ}\text{C})$	Viscosidad μ (cp)
i-C ₄ H ₁₀	23	0,0076	(C ₂ H ₅) ₂ O	20	0,245
CH ₄	20	0,0109 ^b	C ₆ H ₆	20	0,647
H ₂ O	100	0,0127	Br ₂	26	0,946
CO ₂	20	0,0146 ^b	C ₂ H ₅ OH	20	1,194
N ₂	20	0,0175 ^b	Hg	20	1,547
O ₂	20	0,0203 ^b	H ₂ SO ₄	25	19,15
Hg	380	0,0654	Glicerina	20	1069

En §§ 1.3, 1.4 y 1.5, se estudia el cálculo de viscosidades de gases y líquidos. Antes de esto, sin embargo, indicaremos brevemente los tipos de desviaciones conocidas que puede presentar la Ec. 1.1-2.

TABLA 1.1-3
VISCOSIDADES DE ALGUNOS METALES LÍQUIDOS

Metal	Temperatura $T(^{\circ}\text{C})$	Viscosidad μ (cp)
Li	183,4	0,5918
	216,0	0,5406
	285,5	0,4548
Na	103,7	0,686
	250	0,381
	700	0,182
K	69,6	0,515
	250	0,258
	700	0,136
Aleación Na-K 56 % de Na y 44 % de K en peso	103,7	0,546
	250	0,316
	700	0,161
Hg	—20	1,85
	20	1,55
	100	1,21
	200	1,01
Pb	441	2,116
	551	1,700
	844	1,185

§ 1.2. FLUIDOS NO-NEWTONIANOS

De acuerdo con la ley de la viscosidad de Newton (Ec. 1.1-2), al representar gráficamente τ_{yx} , frente a $-(dv_x/dy)$ para un fluido determinado, debe de obtenerse una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, y cuya pendiente es la viscosidad del fluido a una cierta temperatura y presión (véase Fig. 1.1-2). En efecto, la experiencia demuestra que para todos los gases y los líquidos homogéneos no polimerizados τ_{yx} es directamente proporcional a $-(dv_x/dy)$. Sin embargo, existen algunos materiales industrialmente importantes que no se comportan de acuerdo con la Ec. 1.1-2. Se conoce a estas sustancias con el nombre de fluidos *no-newtonianos*.

El tema del flujo no-newtoniano constituye actualmente una parte de otra ciencia mas amplia que es la *reología*, es decir, «la ciencia del flujo y la deformación», que estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas y materiales cristalinos. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra. La región comprendida entre ellas corresponde a la deformación y flujo de todos los tipos de materiales pastosos y suspensiones.

El comportamiento reológico, en estado estacionario, de la mayor parte de los fluidos que se indican en la Fig. 1.1-1 puede establecerse mediante una forma generalizada de la Ec. 1.1.-2

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (1.2-1)$$

en la que η puede expresarse a su vez en función de dv_x/dy o de τ_{yx} indistintamente.

En las regiones en que η disminuye al aumentar el gradiente de velocidad ($-dv_x/dy$), el comportamiento se denomina *pseudoplástico*; y *dilatante* en las que η aumenta con dicho gradiente. Si η resulta independiente del gradiente de velocidad, el fluido se comporta como newtoniano, y entonces $\eta = \mu$ (vease Ec. 1.1-2).

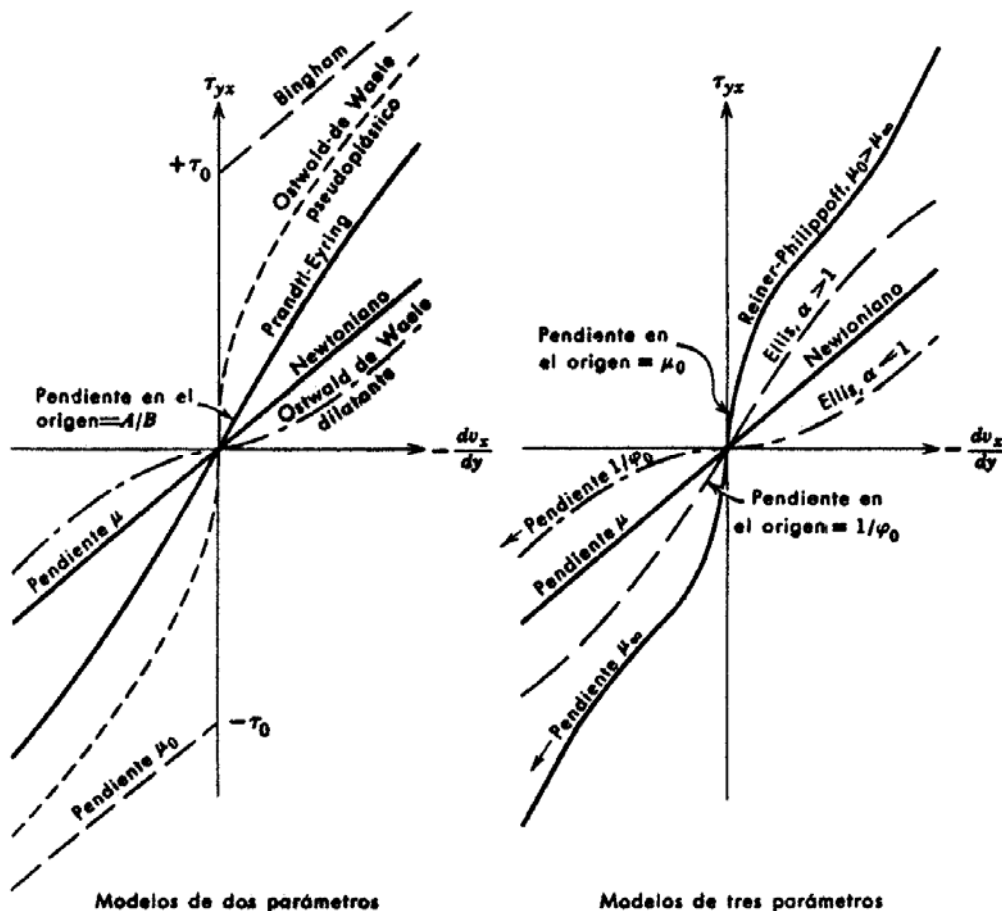


Fig. 1.2-1. Resumen de modelos no-newtonianos en estado estacionario (con fines comparativos se indica también el modelo newtoniano).

Se han propuesto numerosas ecuaciones empíricas o «modelos» para expresar la relación que existe, en estado estacionario, entre τ_{yx} y dv_x/dy . A continuación se presenta un resumen de cinco modelos representativos. Todas las ecuaciones contienen parámetros empíricos positivos, cuyo valor numérico puede determinarse correlacionando los datos experimentales de τ_{yx} frente a dv_x/dy a temperatura y presión constantes.

Modelo de Bingham

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| > \tau_0 \quad (1.2-2a)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = 0 \quad \text{si } |\tau_{yx}| < \tau_0 \quad (1.2-2b)$$

La Ec. 1.2-2a se utiliza con signo + si τ_{yx} es positivo, y con signo -si es negativo. Toda sustancia que se comporta de acuerdo con este modelo de dos parámetros se denomina *plástico de Bingham*, permanece rígida mientras el esfuerzo cortante es menor de un determinado valor τ_0 . por encima del cual se comporta de forma semejante a un fluido newtoniano. Este modelo resulta suficientemente exacto para muchas pastas y suspensiones finas. En la Tabla 1.2-1 se indican los parámetros de Bingham para suspensiones de partículas de combustibles nucleares en agua pesada.

Modelo de Ostwald-de Waele

$$\tau_{yx} = -m \left| dv_x / dy \right|^{n-1} dv_x / dy \quad (1.2-3)$$

Esta ecuación de dos parámetros se conoce también con el nombre de *ley de la potencia*. Para $n = 1$ se transforma en la ley de la viscosidad de Newton, siendo $m = \mu$; por consiguiente, la desviación del valor de n con respecto a la unidad es una medida del grado de desviación del comportamiento newtoniano. Cuando n es menor que uno el comportamiento es pseudoplástico, mientras que para valores superiores a la unidad es dilatante. En la Tabla 1.2-2 se dan algunos valores aproximados de m y n para distintos fluidos.

TABLA 1.2-1
PARÁMETROS DEL PLÁSTICO DE BINGHAM PARA SUSPENSIONES DE
COMBUSTIBLES NUCLEARES

D = diámetro de la partícula de masa media
 σ = desviación standard del $\ln$ (diámetro de la partícula) respecto de $\ln (D)$
 ϕ = fracción del volumen de sólidos en suspensión
 μ_0, τ_0 = parámetros de Bingham para la suspensión
 μ_w = viscosidad del agua a la misma presión y temperatura

Distribución de tamaño de

Material suspendido	las partículas		$k_1 = \frac{\tau_0}{\phi^4}$	$k_2 = \frac{\ln \mu_0 / \mu_w}{\phi}$
	D (micrones)	σ (adimensional)	(dina cm ⁻²)	(adimensional)
UO ₂	1,4	1,7	$7,2 \times 10^4$	18
U ₃ O ₈	1,3	2,0	$11,0 \times 10^4$	22
UO ₃ H ₂ O	1,2	1,9	$20,6 \times 10^4$	22
			$k_3 = \frac{\tau_0}{\phi^3}$	$k_4 = \frac{\ln \mu_0 / \mu_w}{\phi}$
			(dina cm ⁻²)	(adimensional)
ThO ₂	0,030	2,7	$52,7 \times 10^4$	24
	0,75	2,8	$26,3 \times 10^4$	14
	1,6	1,5	$4,8 \times 10^4$	12
	2,4	1,7	$1,6 \times 10^4$	12

Modelo de Eyring

$$\tau_{yx} = A \operatorname{arcsen} h (-1dv_{\infty} / Bdy) \quad (1.2-4)$$

Este modelo de dos parámetros deriva de la teoriza cinética de los líquidos, de Eyring, que se estudia en § 1.5. El modelo de Eyring predice el comportamiento pseudoplástico para valores finitos de τ_{yx} , y tiende asintóticamente a la ley de la viscosidad de Newton cuando τ_{yx} tiende hacia cero, siendo en este caso $\mu = A/B$.

TABLA 1.2-2
PARÁMETROS DEL MODELO DE LA POTENCIA PARA VARIOS FLUIDOS
A TEMPERATURA AMBIENTE

Composición del fluido (% en peso)	m (dina seg ⁿ cm ⁻²)	n (adimensional)
23,3 % de arcilla amarilla de Illinois en agua	55,5	0,229
0,67 % de CMC ^b en agua	3,04	0,716
1,5 % de CMC en agua	31,3	0,554
3,0 % de CMC en agua	92,9	0,566
33 % de cal en agua	71,8	0,171
10 % de napalm en keroseno	42,8	0,520
4 % de pasta de papel en agua	200	0,575
54,3 % de cemento en agua	25,1	0,153

TABLA 1.2-3
PARÁMETROS DE ELLIS PARA SOLUCIONES DE CARBOXIMETIL CELULOSA
EN AGUA

Concentración de la solución (% en peso)	Tempera- tura $T(^{\circ}\text{C})$	Parámetros de la Ec. 1.2-5			Intervalo experimental del esfuerzo cortante (dina cm^{-2})
		α (adimen- sional)	φ_0 ($\text{cm}^2 \text{seg}^{-1}$ dina $^{-1}$)	φ_1 ($\text{cm}^{2\alpha} \text{seg}^{-1}$ dina $^{-\alpha}$)	
4,0 % de CMC bajo ^b	29,4	1,170	0,1377	0,3211	8 a 440
5,0 % de CMC bajo	29,4	1,337	0,0000	0,0521	8 a 1010
1,5 % de CMC medio	29,4	1,185	0,4210	0,2724	6 a 300
2.5 % de CMC medio	29.4	1.412	0.0383	0.0181	17 a 720

Modelo de Ellis

$$-dv_x / dy = (\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1}) \tau_{yx} \quad (1.2-5)$$

Este modelo consta de tres parámetros positivos ajustables: φ_0 , φ_1 y α . Si se toma para α un valor mayor que la unidad, el modelo tiende hacia la ley de Newton para valores bajos de τ_{yx} , mientras que si se elige para α un valor menor que la unidad, la ley de Newton se establece para valores elevados de τ_{yx} . El modelo presenta una gran flexibilidad, y en el están comprendidas, como casos particulares, tanto la ley de Newton (para $\varphi_1 = 0$), como la ley de la potencia (para $\varphi_0 = 0$). En la Tabla 1.2-3 se presentan los parámetros de Ellis para diversos fluidos.

Modelo de Reiner-Philippoff

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{1}{\mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (\tau_{yx}/\tau_s)^2}} \right) \tau_{yx} \quad (1.2-6)$$

Este modelo contiene también tres parámetros positivos ajustables: μ_0 , μ_{∞} y τ_s . Teniendo en cuenta que frecuentemente se ha observado que el comportamiento newtoniano se presenta, tanto para valores muy bajos como muy elevados del gradiente de velocidad, la Ec. 1.2 -6 ha sido planteada con el fin de que se transforme en estos dos casos límite en la ley de Newton de la viscosidad, haciéndose $\mu = \mu_0$ y $\mu = \mu_{\infty}$, respectivamente. La curva que resulta al representar gráficamente τ_{yx} frente a dv_x/dy muestra dos puntos de inflexión, que corresponden a valores de $\tau_{yx} = \tau_s \sqrt{3\mu_0/\mu_{\infty}}$. En la Tabla 1.2-4 se dan valores de μ_0 , μ_{∞} y τ_s , para diversos fluidos.

La Fig. 1.2-1 es una descripción gráfica del comportamiento reológico de los modelos que hemos expuesto. Téngase presente que estas ecuaciones no son más que fórmulas empíricas de ajuste de curvas, y por consiguiente, es muy aventurado emplearlas

fuera del intervalo de los datos experimentales utilizados en su obtención. Obsérvese, asimismo, que los parámetros de alguno de estos modelos son funciones de la temperatura, presión, composición, y, generalmente también, del intervalo de dv_x/dy para el que se ha ajustado la ecuación; por tanto, al dar los valores de los parámetros reológicos, es preciso especificar cuidadosamente las condiciones en que han sido determinados.

TABLA 1.2-4
PARÁMETROS DE REINER-PHILIPPOFF PARA DIVERSOS FLUIDOS

Substancia	Temperatura $T(^{\circ}\text{C})$	Parámetros de la Ec. 1.2-6			Intervalo experimental del esfuerzo cortante (dina cm^{-2})
		μ_0 (poise)	μ_{∞} (poise)	τ_s (dina cm^{-2})	
Azufre fundido	120	0,215	0,0105	0,073	0,2 a 10
Butirato de colesteroína	100	2,4	0,35	1,05	0,8 a 20
30,4 % de metanol en hexano ^b	34	0,035	0,0035	0,5	0,1 a 4
0,4 % de poliestireno en tetralina ^c	20	4,0	1,0	500	500 a 4000

En estado no estacionario pueden existir otras formas de comportamiento no-newtoniano. Por ejemplo, los fluidos que presentan una *disminución* limitada de η (véase Ec. 1.2-1) con el tiempo, al aplicar repentinamente un esfuerzo cortante τ_{yx} , se denominan *tixotrópicos*, recibiendo el nombre de *reopécticos* los que dan lugar a un *aumento* de η con el tiempo en esas condiciones. Los fluidos que recobran parcialmente la forma original al cesar el esfuerzo cortante se denominan *viscoelásticos*. El estudio cuantitativo de estos y otros tipos, de comportamientos no-newtonianos dependientes del tiempo, es uno de los importantes campos de la mecánica de fluidos que todavía esta muy poco desarrollado.

§ 1.3. INFLUENCIA DE LA PRESIÓN Y LA TEMPERATURA SOBRE LA VISCOSIDAD

Existen numerosos datos de viscosidad de gases y líquidos puros reseñados en la bibliografía, especialmente en las *Physikochemische Tabellen* de Landolt-Börnstein. Cuando se carece de datos experimentales y no se dispone de tiempo para obtenerlos, la viscosidad puede estimarse por métodos empíricos, utilizando otros datos de la sustancia en cuestión. En este libro se presentan dos correlaciones que permiten efectuar dicha estimación, y que a su vez proporcionan información sobre la variación de la viscosidad de los fluidos ordinarios con la temperatura y la presión. Estas correlaciones se basan en el análisis de un gran número de datos experimentales de diferentes fluidos, mediante la aplicación del principio de los estados correspondientes.

La Fig. 1.3-1 es una representación gráfica de viscosidad reducida $\mu_r = \mu / \mu_c$, que es la viscosidad a una determinada temperatura y presión, dividida por la viscosidad correspondiente al punto crítico. En la figura se ha representado la viscosidad reducida frente a la temperatura $T_r = T / T_c$ y la presión $p_r = p / p_c$ reducidas. Se observa que la

viscosidad de un gas tiende hacia un valor límite definido (el límite de baja densidad en la Fig. 1.3-1), cuando la presión tiende hacia cero a una determinada temperatura; para la mayor parte de los gases este límite se alcanza ya prácticamente a la presión de 1 atm. La viscosidad de un *gas* a baja densidad *aumenta* con la temperatura, mientras que la de un *líquido disminuye* al aumentar ésta.

Generalmente no se dispone de valores experimentales de μ_c , pero pueden estimarse siguiendo uno de estos dos procedimientos: (i) si se conoce el valor de la viscosidad para una cierta temperatura y presión reducidas, a ser posible en las condiciones más próximas a las que se desean, puede calcularse μ_c mediante la expresión $\mu_c = \mu / \mu_r$; (ii) si sólo se conocen los valores críticos de p - V - T , μ_c puede estimarse a partir de las ecuaciones

$$\mu_c = 61,6(MT_c)^{1/2} (V_c)^{-2/3} \text{ o } \mu_c = 7,70M^{1/2} p_c^{2/3} T_c^{-1/6} \quad (1.3-1,2)$$

en las que μ_c está expresado en micropoises, p_c en atmósferas, T_c en °K y V_c en cc por gramo-mol. Hougen y Watson han publicado una tabla de viscosidades críticas, calculadas por el método (i) que se reproduce en el Apéndice B.

En la Fig. 1.3-2 se da una representación gráfica de $\mu^\# = \mu/\mu_o$, que es la viscosidad a una determinada temperatura y presión, dividida por la viscosidad a la misma temperatura y a la presión atmosférica. Esta variable se ha representado también en función de la temperatura y presión reducidas. A partir de las constantes críticas se pueden determinar p_r y T_r , y utilizar estos valores para obtener en la gráfica μ/μ_o . El valor así obtenido se multiplica por μ_o , que puede ser un dato experimental o un valor calculado a partir de la teoría de los gases diluidos que se estudia en § 1.4. Los gráficos de las Figs. 1.3-1 y 1.3-2 concuerdan satisfactoriamente en el intervalo de p_r y T_r que es común en ambos.

La Fig. 1.3-1 puede utilizarse para calcular de forma aproximada las viscosidades de las mezclas de los gases densos; sin embargo, en el caso de presiones medidas es preferible emplear el método de la Ec. 1.4-19. Para calcular la viscosidad de una mezcla de n componentes mediante la Fig. 1.3-1, se utilizan las propiedades pseudocríticas definidas empíricamente por las ecuaciones:

$$p_c' = \sum_{i=1}^n x_i p_{ci} \quad T_c' = \sum_{i=1}^n x_i T_{ci} \quad \mu_c' = \sum_{i=1}^n x_i \mu_{ci} \quad (1.3-3.4.5)$$

Es decir, que, en vez de p_c , T_c y μ_c , se calculan en este caso p_c' , T_c' y μ_c' , procediendo luego de igual forma que si se tratase de un fluido puro. Este método no es muy exacto si las sustancias que forman la mezcla tienen distinta constitución química o sus propiedades críticas difieren notablemente. Mediante el gráfico de la Fig. 1.3-2 puede seguirse un método análogo, calculando el valor de μ_o de la mezcla a partir de la Ec. 1.4-19.

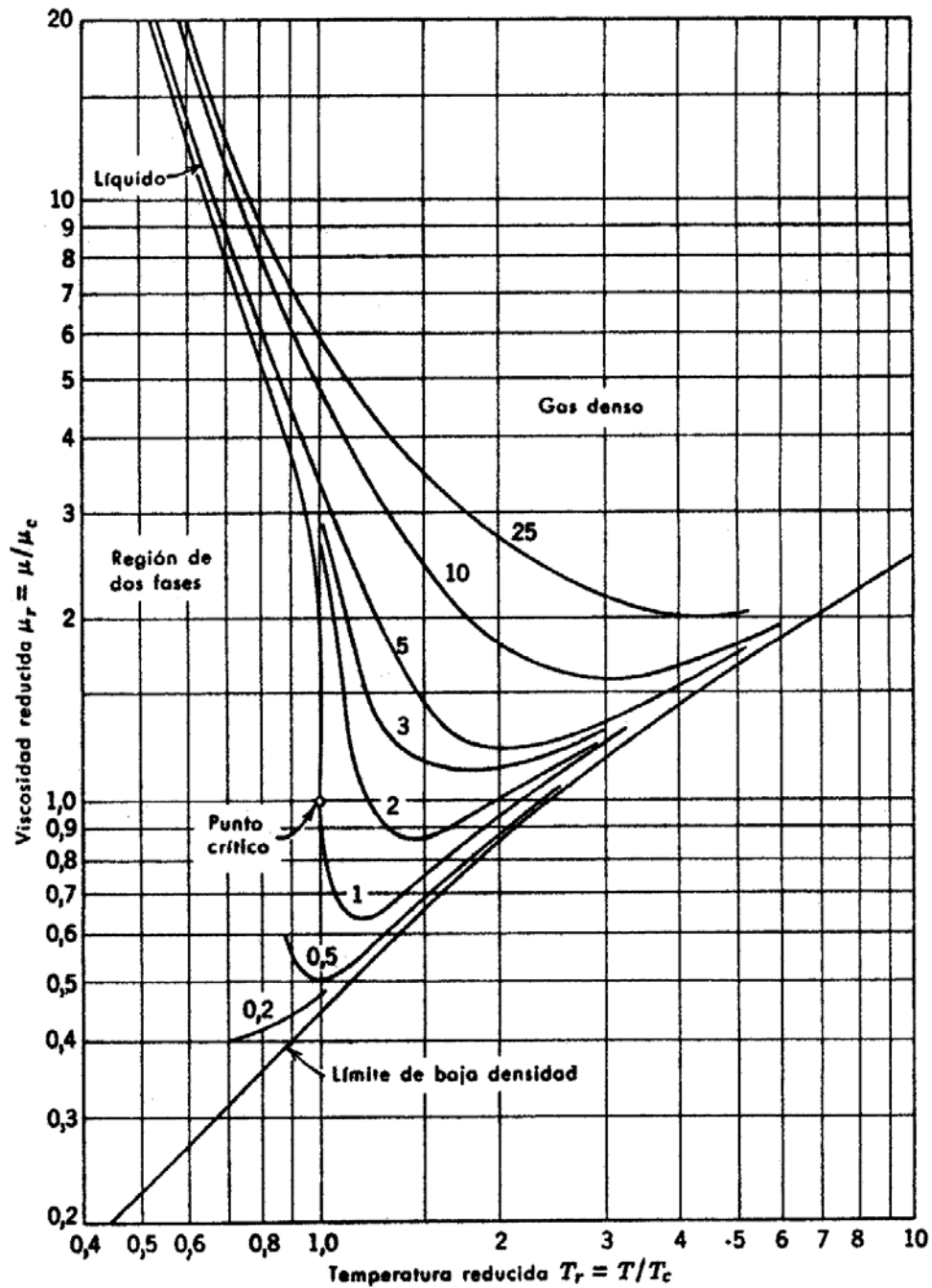


Fig. 1.3-1. Viscosidad reducida $\mu_r = \mu / \mu_c$ en función de la temperatura reducida, para distintos valores de la presión reducida $p_r = p / p_c$.

Ejemplo 1.3-1. Estimación de la viscosidad a partir de las propiedades críticas

Calcular la viscosidad del N_2 a 50°C y 854 atm , siendo $M = 28,0 \text{ g/g-mol}$, $P_c = 33,5 \text{ atm}$ y $T_c = 126,2^\circ\text{K}$.

Solución. En este caso hay que utilizar el método de Watson-Uyehara. Calculando μ_c mediante la Ec. 1.3-2, tendremos

$$\begin{aligned}\mu_c &= 7,70(28,0)^{1/2} (33,5)^{2/3} (126,2)^{-1/6} \\ &= 189 \text{ micropioses} = 189 \times 10^{-6} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}\end{aligned}$$

Los valores de la temperatura y presión reducidas son:

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{273,2 + 50}{126,2} = 2,56 \\ p_r &= \frac{854}{33,5} = 25,5\end{aligned}$$

En la Fig. 1.3-1 se lee $\mu/\mu_c = 2,39$. Por tanto, el valor estimado de la viscosidad es

$$\mu = \mu_c (\mu/\mu_c) = 189 \times 10^{-6} \times 2,39 = 452 \times 10^{-6} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

El valor experimental es $455 \times 10^{-6} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$. La concordancia es en este caso excepcionalmente buena.

Ejemplo 1.3-2. Efecto de la presión sobre la viscosidad de los gases

La viscosidad del CO_2 a 45,3 atm y 40,3° C es 1800×10^{-7} poise. Estimar el valor de la viscosidad a 114,6 atm y 40,3° C. utilizando la Fig. 1.3 -2.

Solución. La temperatura y presión reducidas, correspondientes a las condiciones en las que se conoce la viscosidad, son:

$$\begin{aligned}T_r &= \frac{273,2 + 40,3}{304,2} = 1,03; & p_r &= \frac{45,3}{72,9} = 0,622\end{aligned}$$

En la Fig. 1.3-2 se encuentra que $\mu^\# = 1,12$ en estas condiciones; por tanto, $\mu^0 = \mu / \mu^\#$
 $= 1610 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$.

La presión reducida en las condiciones deseadas es $p_r = 114,6 / 72,9 = 1,57$ y T_r es la misma de antes. En la Fig. 1.3-2 se lee $\mu^\# = 3,7$; por tanto, el valor de la viscosidad a 114,6 atm y 40,3° C es $\mu = 3,7 \times 1610 \times 10^{-7} = 6000 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$. El valor experimental es $5800 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$.

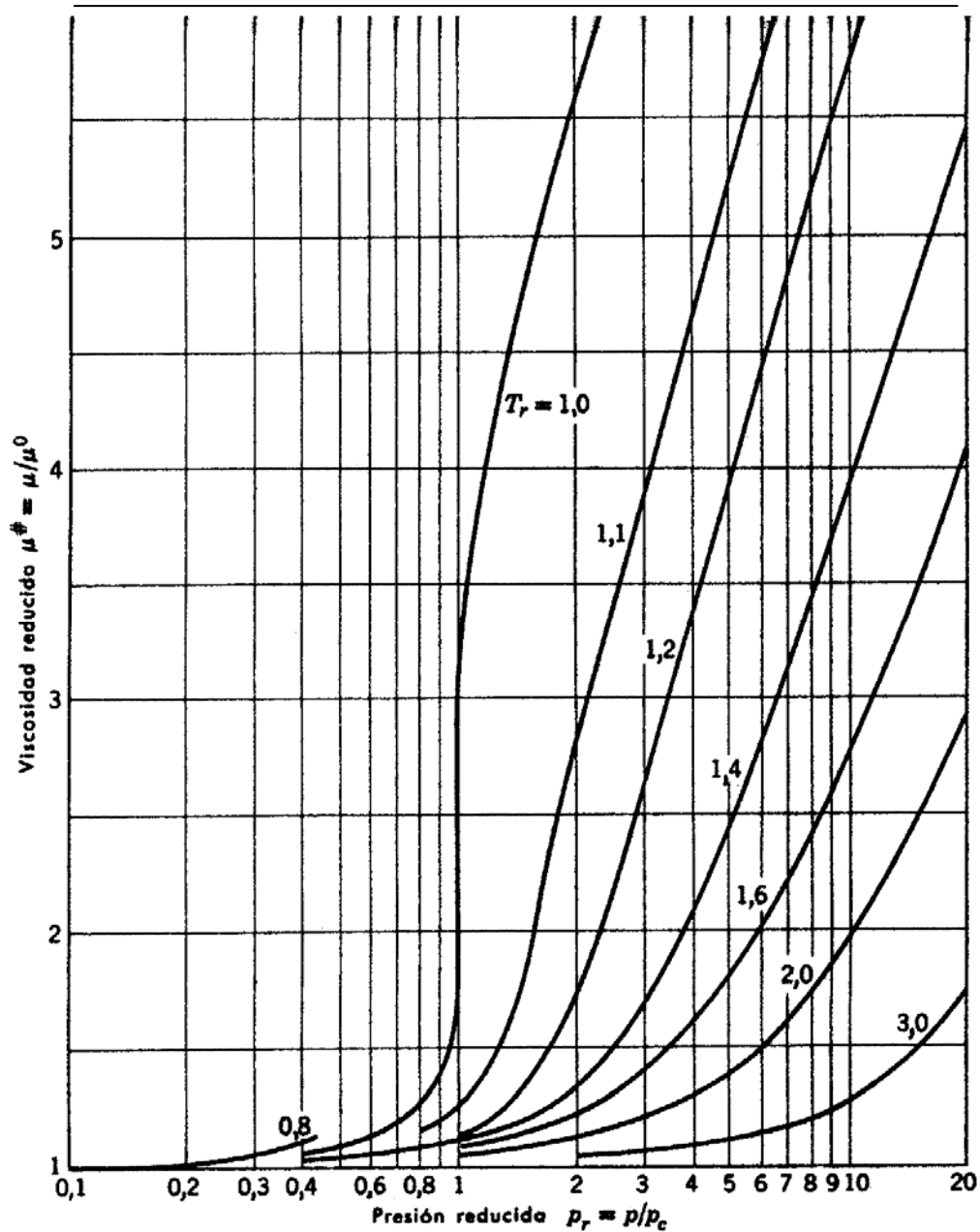


Fig. 1.3-2. Viscosidad reducida $\mu^{\#} = \mu/\mu^0$ en función de la presión reducida $p_r = p/p_c$ y la temperatura reducida $T_r = T/T_c$.

§ 1.4 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS GASES A BAJA DENSIDAD

Las viscosidades de los gases a baja densidad se han estudiado ampliamente, tanto en el aspecto experimental como en el teórico. Con el fin de ilustrar el mecanismo del transporte de cantidad de movimiento, vamos a comenzar con una deducción simplificada de la viscosidad desde el punto de vista molecular.

Consideremos un gas puro constituido por moléculas esféricas rígidas y que no se atraen, de diámetro d y masa m , con una concentración de n moléculas por unidad de volumen. Supongamos que n es suficientemente pequeño, de forma que la distancia media entre las moléculas sea mucho mayor que su diámetro. Al alcanzarse el equilibrio en un gas en estas condiciones la teoría cinética establece que las velocidades moleculares relativas a la velocidad v , del fluido, siguen direcciones al azar y tienen un valor medio u , viene dado por la expresión

$$u = \sqrt{(8KT / \pi m)} \quad (1.4-1)$$

en la que K es la constante de Boltzmann. La frecuencia del bombardeo molecular, por unidad de área, que actúa sobre una cara de una superficie estacionaria en contacto con el gas, viene dada por:

$$Z = (1/4)un \quad (1.4-2)$$

El recorrido³ libre medio λ , es la distancia que recorre una molécula entre dos colisiones consecutivas, siendo

$$\lambda = 1 / \sqrt{(2\pi d^2 n)} \quad (1.4-3)$$

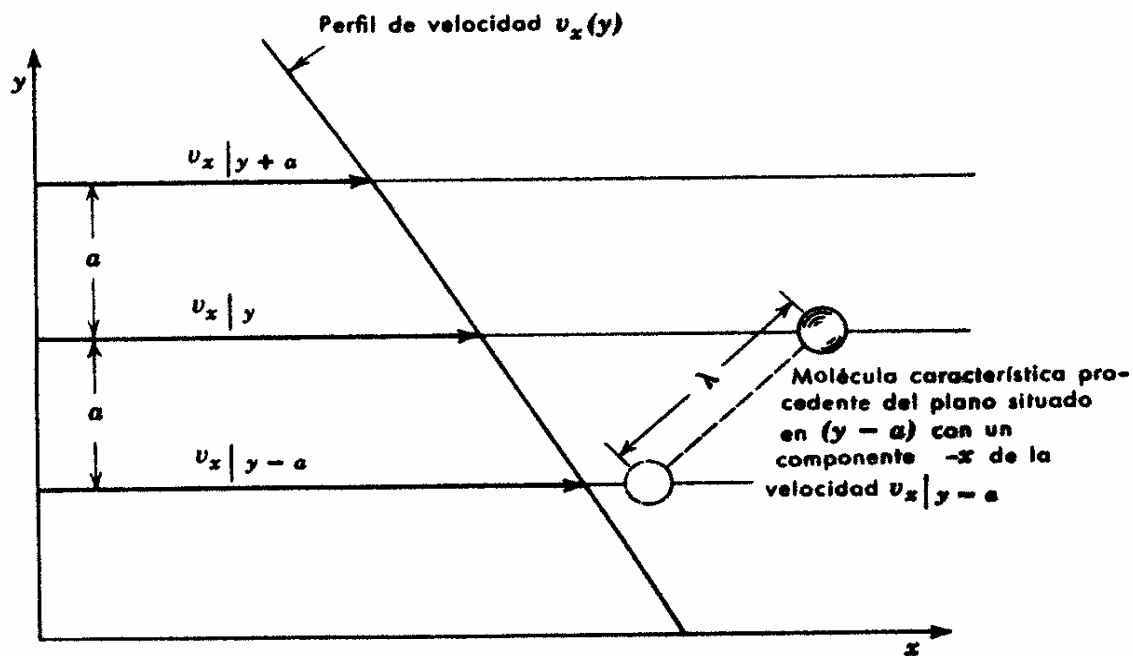


Fig. 1.4-1 Transporte molecular de cantidad de movimiento x desde el plano $(y - a)$ al plano y .

Las moléculas que llegan a un plano han efectuado, como promedio, sus últimas colisiones a una distancia a de este plano, siendo

$$a = (2/3) \lambda \quad (1.4-4)$$

Para determinar la Viscosidad de este gas en función de las propiedades moleculares, veamos lo que ocurre cuando fluye paralelamente al eje x con un gradiente de velocidad dv_x/dy . (Véase Fig. 1.4-1). Se supone que las Ecs. 1.4-1,2, 3,4, siguen siendo válidas en esta situación de no-equilibrio, con tal de que todas las velocidades moleculares estén calculadas con relación a la velocidad media v , en la región donde la molécula considerada ha efectuado su última colisión. La densidad de flujo de cantidad de movimiento- x a través de un plano situado a una distancia constante y , se obtiene sumando las cantidades de movimiento- x de las moléculas que cruzan en la dirección y positiva, y restando las cantidades de movimiento- x de las que cruzan en el sentido opuesto. Por lo tanto

$$\tau_{yx} = Zmv_x|_{y-a} - Zmv_x|_{y+a} \quad (1.4-5)$$

Al expresar esta ecuación se ha supuesto que todas las moléculas tienen velocidades representativas de la región en la que han efectuado su última colisión, y que el perfil de velocidad $v_x(y)$ es esencialmente lineal en una distancia de varias veces el recorrido libre medio. Teniendo en cuenta esta última suposición, se puede escribir,

$$\begin{aligned} v_x|_{y-a} &= v_x|_y - (2/3) \lambda (dv_x/dy) \\ v_x|_{y+a} &= v_x|_y + (2/3) \lambda (dv_x/dy) \end{aligned} \quad (1.4-6)$$

³ El recorrido libre medio es un recurso intuitivo, que solamente es válido para las moléculas que no ejercen entre si fuerzas demasiado grandes. El concepto es fácilmente aplicable a las moléculas tipo «bola de billar» que estamos considerando, pero no a la moderna teoría cinética que se estudia después en esta sección.

Combinando las Ecs. 1.4-2, 5 y 6, tendremos

$$\tau_{yx} = - (1/3) nmu\lambda (dv_x/dy) \quad (1.4-7)$$

Esta ecuación corresponde a la ley de la viscosidad de Newton (Ec. 1.1-2), siendo la viscosidad,

$$\mu = (1/3) nmu\lambda = (1/3) pu\lambda. \quad (1.4-8)$$

La Ec. 1.4-8 fue obtenida por Maxwell en 1860.

Combinando las Ecs. 1.4-1, 3 y 8, se obtiene

$$\mu = 2/(3\pi^{3/2}) * \sqrt{mkT} / d^2 \quad (1.4-9)$$

que corresponde a la viscosidad de un gas a baja densidad, constituido por esferas rígidas. Obsérvese que es preciso conocer un valor experimental de μ para determinar el diámetro de colisión d , a partir del cual se puede predecir μ en otras condiciones.

La deducción anterior proporciona una descripción cualitativamente correcta de la transferencia de cantidad de movimiento en un gas a baja densidad. La predicción de la Ec. 1.4- 9 de que μ es independiente de la presión esta en buena concordancia con los resultados experimentales para presiones de hasta unas 10 atm (véanse Figs. 1.3-1,2). En cambio, la dependencia con respecto a la temperatura es menos satisfactoria; los datos experimentales de varios gases indican que μ varía más rápidamente de lo que corresponde a $T^{0.5}$ y que además, esta variación no puede representarse exactamente mediante una función potencial de T (véase Fil. 1.3 -1). Para predecir con exactitud la variación de μ con la temperatura hay que substituir el modelo de la esfera rígida por un campo de fuerzas moleculares mas realista, y además, analizar mas cuidadosamente la desviación respecto del comportamiento de equilibrio. A continuación se presentan los resultados de un análisis detallado del problema.

Antes de la primera Guerra Mundial, Chapman en Inglaterra y Enskog en Suecia desarrollaron, independientemente, una teoría cinética rigurosa de los gases monoatómicos a baja densidad. La teoría de Chapman-Enskog da expresiones para los coeficientes de transporte en función de la *energía potencial de interacción* entre dos moléculas del gas. La energía potencial ϕ está relacionada con la fuerza de interacción F mediante la ecuación $F = -d\phi / dr$, en la que r es la distancia entre las moléculas. Si se conociese exactamente cómo varían las fuerzas entre las moléculas, en función de la distancia entre ellas, se podría substituir en las ecuaciones de Chapman-Enskog y calcular los coeficientes de transporte.

La forma exacta de la función $\phi(r)$ no se conoce, pero afortunadamente, se ha comprobado, mediante una investigación copiosa, que una función empírica muy satisfactoria de la energía potencial es el *potencial (6-12) de Lennard-Jones*:

$$\phi(r) = 4\epsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6] \quad (1.4-10)$$

donde σ es un diámetro⁶ característico de la molécula (el «diámetro de colisión») y ϵ una energía característica de interacción entre las moléculas (la energía de atracción máxima entre dos moléculas). Esta función se representa en la Fig. 1.4-2, que pone de manifiesto los caracteres típicos de las interacciones moleculares: débil atracción para grandes separaciones (prácticamente proporcional r^{-6}), y fuerte repulsión para separaciones pequeñas (aproximadamente proporcional r^{-12}). La Ec. 1.4-10 resulta muy satisfactoria para numerosas moléculas no polares. Los valores de σ y ϵ se conocen para muchas substancias; en la Tabla B-1 se presenta una relación parcial, pero pueden encontrarse más datos en la bibliografía⁴. Si no se conocen los valores de σ y ϵ , pueden calcularse a partir de las propiedades del fluido en el punto crítico (c), de la temperatura normal de ebullición del líquido (b), o del punto de fusión del sólido (m), mediante las siguientes ecuaciones empíricas.

$$\begin{array}{lll} \epsilon / K = 0,77T_c & \sigma = 0,841 V_c^{1/3} & \text{o} \quad 2,44 (T_c/p_c)^{1/3} \quad (1.4-11,12, 13) \\ \epsilon / K = 1,15T_b & \sigma = 1,166 V_b^{1/3} \text{ liq.} & (1.4-14,15) \\ \epsilon / K = 1,92T_m & \sigma = 1,222 V_m^{1/3} \text{ sol.} & (1.4-16,17) \end{array}$$

en las que ϵ / K y T están en $^{\circ}\text{K}$, σ en unidades $\text{\AA}$, V en $\text{cm}^3 \text{g-mol}^{-1}$, y p_c en atm.

El coeficiente de viscosidad de un gas monoatómico puro de peso molecular M , a la temperatura T , viene dado en función de los parámetros σ y ϵ por la siguiente ecuación

$$\mu = 2,6693 \times 10^{-5} \sqrt{MT / \sigma^2 \Omega_{\mu}} \quad (1.4-18)$$

en la que μ [=] $\text{g cm}^{-1} \text{seg}^{-1}$, T [=] $^{\circ}\text{K}$, σ [=] $\text{\AA}$, y Ω_{μ} es una función ligeramente decreciente del número adimensional KT/ϵ , cuyos valores se dan en la Tabla B-2. Aunque esta fórmula se ha deducido para los gases monoatómicos, se ha encontrado que resulta también muy adecuada para los gases poliatómicos. La variación de μ con la temperatura que predice esta ecuación concuerda satisfactoriamente con la línea de baja densidad en la gráfica de viscosidad reducida de la Fig. 1.3 -1. Obsérvese de nuevo que la *viscosidad de los gases a baja densidad aumenta con la temperatura*, aproximadamente con la potencia 0,6 a 1,0 de dicha variable. Reacuérdesse también que para el intervalo de baja densidad, la viscosidad es independiente de la presión.

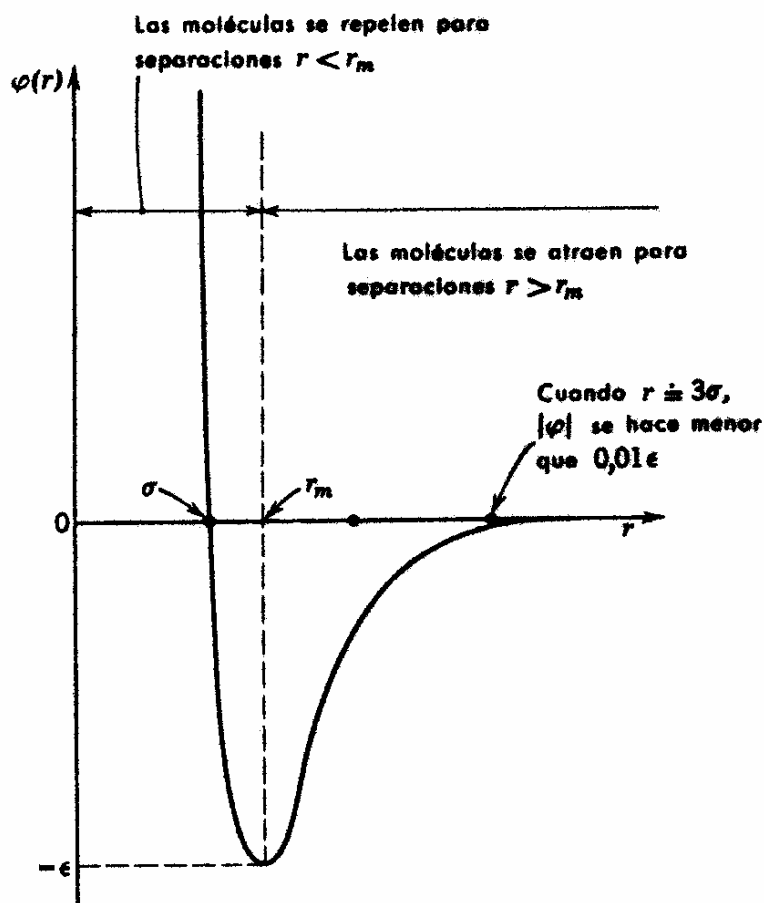


Fig. 1.4-2. Función de energía potencial que describe la interacción de dos moléculas esféricas no polares. La ecuación 1.4-10 es una de las muchas ecuaciones empíricas propuestas para el ajuste de esta curva.

⁶ Obsérvese que σ es diferente del diámetro molecular d utilizado anteriormente en la teoría cinética simple. Ambos términos son del mismo orden de magnitud, pero no existe una relación sencilla entre ellos.

⁷ 1 unidad Ångstrom = 10^{-8} cm = 10^{-10} m. La unidad Ångstrom es la unidad normal de medida para las dimensiones moleculares.

Si el gas estuviese constituido por esferas rígidas de diámetro σ (en vez de moléculas reales con fuerzas atractivas y repulsivas), Ω_{μ} valdría la unidad. por lo tanto, la función Ω_{μ} puede interpretarse como la desviación respecto del comportamiento de la esfera rígida.

La teoría de Chapman-Enskog ha sido ampliada por Curtiss y Hirschfelder, para incluir las mezclas gaseosas de varios componentes. En la mayor parte de los casos resulta muy adecuada la ecuación empírica de Wilke:

$$\mu_{mezcl.} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}}}$$

en la que

(1.4-19)

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/4} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/4} \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2 \quad (1.4-20)$$

En estas ecuaciones, n es el numero de especies químicas existentes en la mezcla; x_i y X_j son las fracciones molares de las especies i y j ; μ_i y μ_j son las viscosidades de i y j a la temperatura y presión del sistema; y M_i y M_j son los pesos moleculares correspondientes. Obsérvese que Φ_{ij} es un número adimensional, y que $\Phi_{ij} = 1$ cuando $i = j$. Se ha comprobado que la Ec. 1.4-19 reproduce los valores experimentales de $\mu_{mezcl.}$ con una desviación media del orden del 2 %. La variación de $\mu_{mezcl.}$ con la composición es extraordinariamente no lineal para algunas mezclas, especialmente las de gases ligeros y pesados.

En resumen, las Ecs. 1.4-18, 19 y 20 son fórmulas útiles para el cálculo de viscosidades de gases no polares y mezclas gaseosas a baja densidad, a partir de valores tabulados de los parámetros de fuerza intermolecular σ y ϵ . Sin embargo, no pueden aplicarse con seguridad en el caso de gases constituidos por moléculas polares o muy alargadas, debido a que los campos de fuerza que existen entre estas moléculas dependen extraordinariamente del ángulo. Una modificación de la Ec. 1.4-10, teniendo en cuenta la influencia angular, ha dado buenos resultados para vapores polares tales como H_2O , NH_3 , CH_3OH , y $NOCl$. Por ultimo, una limitación, generalmente sin importancia, consiste en que estas ecuaciones han de modificarse en el intervalo de temperatura inferior a $100^\circ K$ para

tener en cuenta los efectos cuánticos. Para gases mas pesados que el H₂ y el He, los efectos cuánticos sobre la viscosidad pueden despreciarse, aun para temperaturas inferiores.

Ejemplo 1.4-1. Cálculo de la viscosidad de un gas a baja densidad.

Calcular la viscosidad del CO₂ a 1 atm y 200, 300, y 800° K.

Solución. Se utiliza la Ec. 1.4-18. En la Tabla B-1 se encuentra que las constantes de Lennard-Jones para el CO₂ valen $\epsilon / K = 190^\circ\text{K}$ y $\sigma = 3,996$ Amstrong. El peso molecular del CO₂ es 44,010. Substituyendo los factores constantes M y σ en la Ec. 1.4-18 se obtiene

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-5} \left(\sqrt{44.010T} / (3,996)^2 \Omega_\mu \right) = 1,109 \times 10^{-5} (\sqrt{T} / \Omega_\mu) \quad (1.4-21)$$

en la que μ [=] g cm⁻¹ seg⁻¹ y T [=] °K. Los demás cálculos se indican en la siguiente tabla

T (°K)	$\frac{\kappa T}{\epsilon} = \frac{T}{190}$	Ω_μ de la Tabla B-2	$\sqrt{T}$	Viscosidad calculada (Ec. 1.4-21) (g cm ⁻¹ seg ⁻¹)	Viscosidad observada ¹² (g cm ⁻¹ seg ⁻¹)
200	1,053	1,548	14,14	$1,013 \times 10^{-4}$	$1,015 \times 10^{-4}$
300	1,58	1,286	17,32	$1,494 \times 10^{-4}$	$1,495 \times 10^{-4}$
800	4,21	0,9595	28,28	$3,269 \times 10^{-4}$	

En la última columna se indican los datos experimentales con fines comparativos. Era de esperar la buena concordancia que se aprecia, ya que las constantes de Lennard-Jones de la Tabla B-1 se han deducido a partir de datos de viscosidad.

Ejemplo 1.4-2 Predicción de la viscosidad de una mezcla gaseosa a baja densidad

Para predecir la viscosidad de las siguientes mezclas gaseosas a 1 atm y 293°K, a partir de datos de los componentes puros a 1 atm y 293°K;

Substancia	Fracción molar, x	Peso molecular, M	Viscosidad, μ (g cm ⁻¹ seg ⁻¹)
1: CO ₂	0,133	44,010	1462×10^{-7}
2: O ₂	0,039	32,000	2031×10^{-7}
3: N ₂	0,828	28,016	1754×10^{-7}

Solución. Se utilizan las Ecs. 1.4-20 y 1.4-19, por este orden. En la siguiente tabla se indican las principales etapas del cálculo.

<i>i</i>	<i>j</i>	<i>M_i/M_j</i>	<i>μ_i/μ_j</i>	<i>Φ_{ij}</i> (Ec. 1.4-20)	$\sum_{j=1}^3 x_j \Phi_{ij}$
1	1	1,000	1,000	1,000	0,763
	2	1,375	0,720	0,730	
	3	1,571	0,834	0,727	
2	1	0,727	1,389	1,394	1,057
	2	1,000	1,000	1,000	
	3	1,142	1,158	1,006	
3	1	0,637	1,200	1,370	1,049
	2	0,876	0,864	0,993	
	3	1,000	1,000	1,000	

La Ec. 1.4-19 da

$$\begin{aligned}
 \mu_{mezcl.} &= \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^3 x_j \Phi_{ij}} \\
 &= \frac{(0,133)(1462)(10^{-7})}{0,763} + \frac{(0,039)(2031)(10^{-7})}{1,057} + \frac{(0,828)(1754)(10^{-7})}{1,049} \\
 &= 1717 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}
 \end{aligned}$$

El valor experimental es $1793 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$.

§ 1.5 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS LÍQUIDOS

El conocimiento que tenemos de la viscosidad de los líquidos es fundamentalmente empírico, ya que la teoría cinética de los líquidos se ha desarrollado tan sólo de forma parcial. No obstante, tiene interés la teoría aproximada desarrollada por Eyring y colaboradores, porque explica el mecanismo que tiene lugar, y permite estimar aproximadamente la viscosidad a partir de otras propiedades físicas.

En un líquido puro en reposo, las moléculas están constantemente en movimiento, pero debido al compacto empaquetamiento, el movimiento queda reducido prácticamente a la vibración de cada molécula dentro de una «jaula» formada por las moléculas más próximas. Esta jaula está representada por la barrera de energía potencial de altura $\Delta G_0^\ddagger/\tilde{N}$, como se indica en la Fig. 1.5-1. Eyring sugirió que un líquido en reposo sufre reordenaciones continuas, durante las cuales una molécula escapa desde una «jaula» a un «hueco» adyacente, tal como se indica en la Fig. 1.5-1, y que de esta forma, las moléculas se mueven en cada una de las direcciones de las coordenadas cartesianas, dando saltos de longitud *a* y frecuencia por molécula *k*, estando *k* dada por la ecuación de velocidad

$$K = (KT/h)e^{-\Delta G_0^\ddagger/RT}, \quad (1.5-1)$$

En esta ecuación, *K* y *h* son las constantes de Boltzmann y Planck (véase Apéndice C), *R* es la constante molar de los gases, $\Delta G_0^\ddagger$ es la «energía libre de activación» molar del fluido estacionario.

Si el fluido circula en la dirección- x con un gradiente de velocidad dv_x/dy , la frecuencia de las reordenaciones moleculares aumenta. Este efecto puede explicarse teniendo en cuenta que la barrera de energía potencial se distorsiona a causa del esfuerzo aplicado τ_{yx} (véase Fig. 1.5-1), de forma que

$$-\Delta G^\ddagger = -\Delta G_0^\ddagger \pm (a/\delta)(\tau_{yx} V / 2) \quad (1.5-2)$$

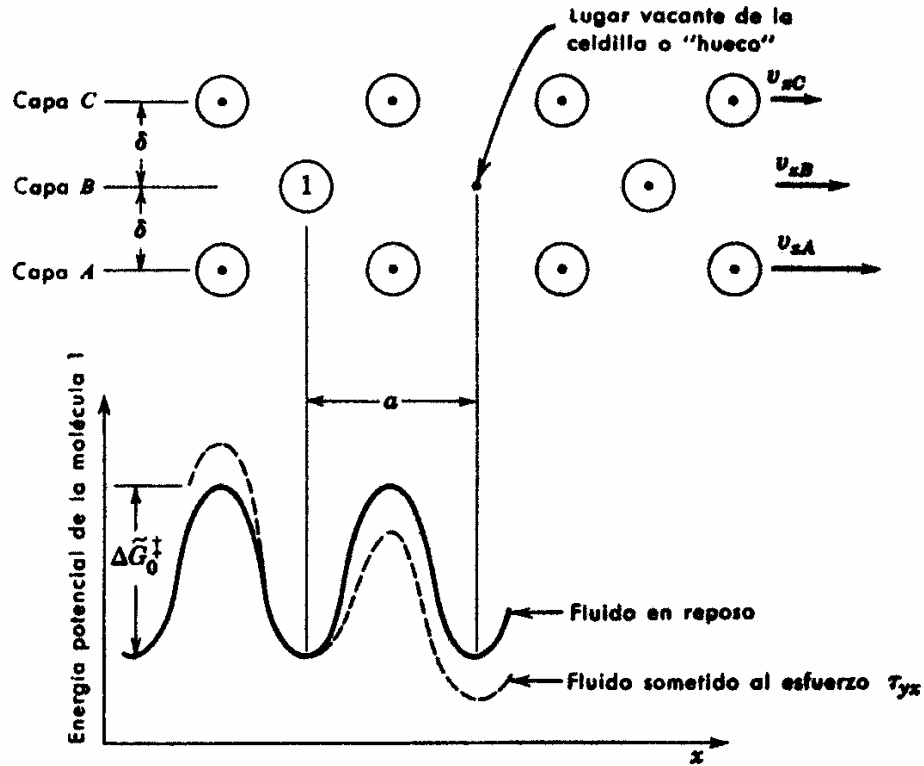


Fig. 1.5-1. Ilustración de un proceso de escape en el flujo de un líquido. La molécula 1 tiene que atravesar un estrecho «pasadizo» para alcanzar el lugar vacante.

donde V es el volumen de un mol de líquido y $\pm (a/\delta)\tau_{yx} V/2$ corresponde, aproximadamente, al trabajo comunicado a las moléculas que se mueven hacia la cima de las barreras de energía, según que se muevan a favor del esfuerzo cortante aplicado (signo más) o en contra de él (signo menos). Llamando k_f a la frecuencia de los saltos hacia adelante y k_b a la de los saltos hacia atrás, a partir de las Ecs. 1.5-1 y 1.5-2 se encuentra que

$$k_f = (kT/h) e^{-\Delta G_0^\ddagger \pm /RT} e^{a\tau_{yx} V / 2\delta RT} \quad (1.5-3)$$

$$k_b = (kT/h) e^{-\Delta G_0^\ddagger \pm /RT} e^{-a\tau_{yx} V / 2\delta RT} \quad (1.5-4)$$

La velocidad neta con que las moléculas de la capa A (Fig. 1.5-1) se ponen delante de las de la capa B, es exactamente el camino recorrido en un salto (a) multiplicado por la frecuencia *neta* de los saltos hacia adelante ($k_f - k_b$); por tanto

$$v_{xA} - v_{xB} = a(k_f - k_b) \quad (1.5-5)$$

Teniendo en cuenta que el perfil de velocidad es lineal en la pequeñísima distancia δ comprendida entre las capas A y B, se llega a

$$-dv_x / dy = (a/\delta) (k_f - k_b) \quad (1.5-6)$$

Combinando las Ecs. 1.5-3, 4, 6 se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} -dv_x / dy &= a/\delta [(kT/h) e^{-\Delta G_o^\ddagger / RT}] (e^{a\tau yx V / 2\delta RT} - e^{-a\tau yx V / 2\delta RT}) \\ &= a/\delta [(kT/h) e^{-\Delta G_o^\ddagger / RT}] (2 \sinh(a\tau yx V / 2\delta RT)) \end{aligned} \quad (1.5-7)$$

Es interesante hacer notar que la Ec. 1.5- 7 predice el flujo no-newtoniano de los líquidos en general; de hecho, esta ecuación tiene la misma forma general que el modelo de Eyring, correspondiente a la Ec. 1.2-4. Pero si $\tau yx V / 2\delta RT$ es pequeño comparado con la unidad, la Ec. 1.5- 7 concuerda con la ley de Newton de la viscosidad, siendo

$$\mu = (\delta/a)(\tilde{N}h/V) e^{\Delta G_o^\ddagger / RT} \quad (1.5-8)$$

en la que $\tilde{N}$ es el número de Avogadro. En la mayor parte de las aplicaciones se toma δ/a igual a la unidad, pero esta simplificación no supone una disminución de la exactitud, puesto que $\Delta G_o^\ddagger$ se ha determinado empíricamente para conseguir que la ecuación concuerde con los datos experimentales.

Se ha encontrado que las energías libres de activación $\Delta G_o^\ddagger$ „ determinadas ajustando la Ec. 1.5- 7 para los datos experimentales de la viscosidad frente a la temperatura, son casi constantes para un fluido dado, y pueden correlacionarse fácilmente con la energía interna de vaporización a la temperatura normal de ebullición

$$\Delta G_o^\ddagger = 0,408 \Delta U_{\text{vap}} \quad (1.5-9)$$

Utilizando esta información empírica, y tomando $\delta/a = 1$ (lo que está de acuerdo con los cálculos que conducen a la Ec. 1.5-9), la Ec. 1.5-8 se transforma en

$$\mu = (\tilde{N}h/V) e^{0,408 \Delta U_{\text{vap}} / RT} \quad (1.5-10)$$

La energía de vaporización a la temperatura normal de ebullición puede calcularse aproximadamente mediante la regla de Trouton

$$\Delta U_{\text{vap}} = \Delta H_{\text{vap}} - RT_b = 9,4 RT_b \quad (1.5-11)$$

Con esta última aproximación, la Ec. 1.5-10 queda

$$\mu = (\tilde{N}h/V) e^{3,8T_b/T} \quad (1.5-12)$$

Las Ecs. 1.5-10 y 1.5-12 indican que la viscosidad *disminuye* exponencialmente con la temperatura, lo que está de acuerdo con el comportamiento observado para la mayor parte de los líquidos. Estas dos ecuaciones no son muy exactas, dando frecuentemente errores de hasta un 30%; son útiles especialmente para una estimación aproximada, y sirven de guía para la interpolación y extrapolación de datos incompletos de viscosidad. No debería utilizarse, sobre todo para moléculas lineales muy largas, como, por ejemplo, $n\text{-C}_{20}\text{H}_{42}$, que se desvían notablemente de la Ec. 1.5-9. Otras fórmulas empíricas pueden encontrarse en la obra de Partington.

Ejemplo 1.5-1. Estimación de la viscosidad de un líquido puro

Estimar la viscosidad del benceno líquido, C_6H_6 , a 20°C .

Solución. Se utiliza la Ec. 1.5-12, juntamente con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= 6,023 \times 10^{23} (\text{g-mol})^{-1} \\ h &= 6,624 \times 10^{-27} \text{ erg seg o g cm}^2 \text{ seg}^{-1} \\ V &= 89,0 \text{ cm}^3 (\text{g-mol})^{-1} \text{ a } 20^\circ \text{C} \\ T_b &= 273,2 + 80,1 = 353,3^\circ \text{K} \\ T &= 273,2 + 20 = 293,2^\circ \text{K} \end{aligned}$$

Substituyendo en la Ec. 1.5-12, se obtiene

$$\begin{aligned} \mu &= (\tilde{N}h/V) e^{3,8T_b/T} \\ &= [(6,023 \times 10^{23})(6,624 \times 10^{-27}) / 89,0] e^{(3,8 \times 353,2 / 293,2)} \\ &= 4,46 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1} \\ &= 0,45 \text{ cp.} \end{aligned}$$

El valor experimental de la viscosidad que se da en la Tabla 1.1-2 es 0,647 cp. Esta discrepancia pone de manifiesto el carácter aproximado de la teoría.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Comparar la ley de Newton de la viscosidad con la ley de la elasticidad de Hooke.
2. Probar que la «cantidad de movimiento por unidad de área y unidad de tiempo» tiene las mismas dimensiones que la «fuerza por unidad de área».

3. ¿Cuáles son las unidades de viscosidad y viscosidad cinemática?
4. ¿En qué obras de referencia se pueden encontrar datos de viscosidad?
5. Comparar los valores de la viscosidad y viscosidad cinemática del aire, agua y mercurio, a 1 atm y 20°C.
6. ¿Qué quiere decir la palabra no-newtoniano? ¿Qué tipo de sustancias presentan este comportamiento?
7. ¿Qué es «reología»?
8. ¿Cómo varía la viscosidad con la temperatura y la presión?
9. ¿Qué métodos existen para calcular la viscosidad de gases densos y de líquidos?
10. ¿Qué es el potencial de Lennard-Jones y qué representa?
11. Determinar la fuerza entre dos moléculas en función de la distancia, según el potencial de Lennard-Jones. Hallar el valor de r_m en función de σ y ϵ , utilizando la Fig. 1.4-2.
12. ¿Cuál es el significado de los parámetros σ y ϵ ? Ilústrese con un esquema.
13. ¿Cómo pueden obtenerse σ y ϵ a partir de datos de viscosidad?
14. La función de energía potencial de Lennard-Jones describe un campo esféricamente simétrico. Nombrar dos características moleculares que provocan un aumento de los campos de energía potencial y dan lugar a que no tengan simetría esférica.
15. Describir gráficamente la función de energía potencial $\phi(r)$ para moléculas esféricas rígidas que no se atraen.
16. ¿Cuál es el significado físico de la función Ω_μ de la Ec. 1.4-18?
17. Las moléculas de los distintos isótopos atómicos tienen los mismos valores de σ y ϵ , teniendo esto en cuenta, ¿cómo calcularía usted la viscosidad del CD_4 a 20°C y 1 atm a partir de la del CH_4 a 20°C?
18. ¿Qué diferencia de viscosidades de los gases diluidos debe esperarse para el U^{235}F_6 y U^{238}F_6 ?
19. ¿Cómo se simplifica la ecuación de Wilke cuando $\Phi_{ij} = 1$ para todos los i y j de una mezcla gaseosa? ¿Para qué tipo de mezclas gaseosas ocurre esto?
20. ¿Puede expresarse la densidad de flujo de cantidad de movimiento de un líquido mediante la Ec. 1.4-5?
21. Un fluido A tiene una viscosidad doble que otro B; ¿cuál de ellos cree usted que fluirá mas rápidamente en un tubo horizontal de longitud L , bajo la misma diferencia de presión?

PROBLEMAS

1.A₁. Cálculo de viscosidades de gases a baja densidad

Predecir la viscosidad del oxígeno, nitrógeno y metano moleculares, a la presión atmosférica y 20°C. Expresar todos los resultados en cp. Compare sus resultados con los valores experimentales que se indican en este capítulo.

Respuestas: 0,0203, 0,0175, 0,0109 cp.

1.B₁. Cálculo de viscosidades de mezclas gaseosas a baja densidad

Se conocen los siguientes datos de la viscosidad de las mezclas de hidrógeno y freón-12 (diclorodifluorometano) a 25°C y 1 atm.:

Fracción molar de H_2	$\mu \times 10^6$ ($g\ cm^{-1}\ seg^{-1}$)
0,00	124,0
0,25	128,1
0,50	131,9
0,75	135,1
1,00	88,4

Calcular y comparar los resultados obtenidos mediante las Ecs. 1.4-19 y 20 para las tres composiciones intermedias, utilizando los datos de la viscosidad de los componentes puros.

Ejemplo de respuesta; para $X_1 = 0,50$, $\mu = 0.01315\ cp$.

1.C₁. Estimación de la viscosidad de un gas denso

Estimar la viscosidad del N_2 a $20^\circ C$ y 67 atm, utilizando (a), la Fig. 1.3-1 y μ_c , de la Tabla B-I; (b). la Fig. 1.3 -2 y μ° de la Tabla 1.1-2. Expresar los resultados en $kg_m\ m^{-1}\ seg^{-1}$.

Respuesta; a. $1,93 \times 10^{-5}\ kg_m\ m^{-1}\ seg^{-1}$.

1.D₁. Estimación de la viscosidad de un líquido

Estimar la viscosidad del agua al estado de líquido saturado a $0^\circ C$ y $100^\circ C$, utilizando (a) la Ec. 1.5-10 y tomando para $\Delta U_{vap} = 567,6\ Kcal\ kg_m^{-1}$ a $0^\circ C$ y $498,6\ Kcal\ kg_m^{-1}$ a $100^\circ C$; (b) utilizando la Ec. 1.5-12. Comparar los resultados obtenidos con los valores de la Tabla 1.1-1.

Respuesta; b. 4,0 cp, 0,95 cp.

1.E₁. Velocidad molecular y recorrido libre medio

Calcular la velocidad molecular media u , en $cm\ seg^{-1}$, y el recorrido libre medio λ , en cm. para el O_2 a 1 atm y $273,2^\circ K$. Supóngase que $d = 3,0\ \text{\AA}$ Armstrong. ¿Cuál es la relación entre el recorrido libre medio y el diámetro molecular en estas condiciones? ¿Cuál sería el orden de magnitud de la relación correspondiente en el estado líquido?

Respuesta; $u = 4.25 \times 10^4\ cm\ seg^{-1}$, $\lambda = 9,3 \times 10^{-6}\ cm$.

1.F₁. Comparación del gráfico de Uyehara-Watson con la teoría cinética

a. Utilizar las Ecs. 1.4-11, 18 y la Tabla B-2 para construir una representación logarítmica de $\mu \sigma^2 M^{-1/3} T_c^{1/2}$, frente a T_r hasta valores de $T_r = 10$. Representar en este gráfico μ_r frente a T_r para gases a baja densidad, según la Fig. 1.3 -1. ¿Qué conclusiones se deducen al comparar la forma de las dos curvas?

b. Determinar μ_c en función de M , T_c , y σ , mediante la comparación de los resultados representados en (a).

c. Combinar los resultados de (b) con las Ecs. 1.4 -12, 13 para obtener otras dos expresiones de μ_c en función de las propiedades críticas. Compare sus resultados con las correspondientes ecuaciones de Uyehara y Watson.

1.G₁. Comparación de la teoría cinética simple con la teoría exacta para esferas rígidas

Transformar la Ec. 1.4-9 en otra equivalente a la Ec. 1.4-18 y compararlas numéricamente para el caso de moléculas rígidas esféricas, siendo $d = \sigma$. ¿Qué tanto por ciento de error se comete utilizando para dichas moléculas la teoría cinética simple?

1.H₃. Distancia media de recorrido libre en una dirección determinada

El recorrido libre medio está definido de tal forma que $e^{-s/\lambda}$ es la probabilidad que tiene una molécula de recorrer una distancia mayor que s entre dos colisiones consecutivas. Utilizando esta definición, y el hecho de que en un gas en equilibrio las velocidades moleculares tienen direcciones al azar, determinar la distancia b , según la dirección y , recorrida entre dos colisiones consecutivas por las moléculas que tienen una determinada V_y positiva.

1.I₃. Cálculo de velocidades medias a partir de la distribución de Maxwell-Boltzmann

En la deducción de la teoría cinética simplificada expuesta en § 1.4 se han hecho, sin demostración algunas aseveraciones acerca del comportamiento de equilibrio de un gas. En este problema y en el siguiente se demuestra que algunas de estas afirmaciones son una consecuencia de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

La distribución de Maxwell-Boltzmann de las velocidades moleculares de un gas en reposo, es la siguiente:

$$f(u_x, u_y, u_z) = f(u) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mu^2/2kT} \quad (1.I-1)$$

en la que u y sus componentes son las velocidades moleculares individuales, y $f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z$ es la fracción del número total de moléculas, que es de esperar que en un determinado instante tengan velocidades comprendidas entre u_x y $u_x + du_x$, u_y y $u_y + du_y$, u_z y u_z . De la Ec. 1.1-1 se deduce que la distribución del valor de la velocidad molecular u es

$$f(u) = 4\pi u^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mu^2/2kT} \quad (1.I-2)$$

a. Construir un esquema bidimensional de la distribución de velocidad en el espacio $f(u)$ manteniendo u_z constante, y colocando trazos sobre el plano u_x, u_y en una concentración proporcional $f(u_x, u_y, u_z)$

b. Calcular el valor medio de la velocidad u , integrando $uf(u)$ con respecto a u :

$$\bar{u} = \frac{\int_0^{\infty} u f(u) du}{\int_0^{\infty} f(u) du} \quad (1.I-3)$$

El resultado correcto viene dado por la Ec. 1.4 -1

c. Calcular los componentes u_x , u_y , u_z de la velocidad media $\mathbf{u}$ integrando los componentes $u f(\mathbf{u})$ en todo el espacio de velocidad. La integral que determina u_x es

$$\bar{u}_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z} \quad (1.I-4)$$

y las integrales para u_y y u_z , son análogas. Los resultados deberán de confirmar que el gas está en reposo.

d. Calcular la energía cinética media de una molécula, mediante la integración de $1/2 m u^2 f(u)$ con respecto a u :

$$\frac{1}{2} m \bar{u^2} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_0^{\infty} f(u) du} \quad (1.I-5)$$

El resultado es $\frac{1}{2} m \bar{u^2} = 3/2 kT$

1.J3. Cálculo de la frecuencia de colisión de pared a partir de la distribución de Maxwell- Boltzmann

Se desea conocer la frecuencia Z , con la que las moléculas de un gas ideal chocan por unidad de área sobre una pared de una sola cara. El gas está en reposo, en equilibrio a la temperatura T , y contiene n moléculas idénticas de masa m por cm^3 . Considerando que la pared es la superficie $y = c$ y que el fluido está en la región $y < c$, se puede demostrar que Z es sencillamente el producto del número de concentración n por el valor medio de u_y de todas las moléculas que se mueven hacia la pared. Por tanto.

$$Z = n \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_z f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z} \quad (1.J-1)$$

Evaluar Z, utilizando $f(u_x, u_y, u_z)$ de la Ec. 1.I-1. ¿Está de acuerdo su resultado con las Ecs. 1.4-1,2?

CAPÍTULO 2

DISTRIBUCIONES DE VELOCIDAD EN FLUJO LAMINAR

En este capítulo vamos a estudiar cómo se pueden calcular los perfiles de velocidad laminar en algunos sistemas geoméricamente sencillos. Para estos cálculos se hace uso de la definición de viscosidad y del concepto de un balance de cantidad de movimiento. En realidad, para los problemas de ingeniería no se necesita generalmente un conocimiento completo de las distribuciones de velocidad. Por el contrario, es preciso conocer la velocidad máxima, la velocidad media, y el esfuerzo cortante en una superficie. Estas magnitudes pueden deducirse fácilmente una vez que se conocen los perfiles de velocidad.

En la primera sección se hacen algunas observaciones generales acerca de los balances diferenciales de cantidad de movimiento. En las secciones que siguen después se exponen con detalle algunos ejemplos clásicos de los tipos de flujo viscoso. Estos ejemplos deberán de entenderse perfectamente, puesto que con frecuencia nos referiremos a ellos en capítulos posteriores. El lector se dará cuenta de que estos sistemas son demasiado sencillos para tener de por sí interés en ingeniería. Si bien es cierto que representan casos muy idealizados, los resultados que se obtienen encuentran grandes aplicaciones en el estudio de numerosas cuestiones de mecánica de fluidos.

Los sistemas que se estudian en este capítulo están ordenados de forma que el lector entra a considerar gradualmente los distintos factores que intervienen en la solución de los tipos de flujo viscoso. El problema de la película descendente, que se estudia en § 2.2, proporciona información sobre el papel que juegan las fuerza de gravedad y sobre la utilización de las coordenadas cartesianas; se indica también cómo puede llegarse a la solución en el caso de que la viscosidad sea una función de la posición. En § 2.3 se considera el flujo en un tubo circular, que ilustra sobre el papel de la presión y las fuerzas de gravedad, a la vez que se indica el uso de coordenadas cilíndricas; se expone asimismo cómo se tratan los problemas de flujo no-newtoniano. El flujo en un anillo cilíndrico, que se estudia en § 2.4, pone de manifiesto cómo intervienen las condiciones límite en la obtención de la solución final. En § 2.5 nos adentramos mas en la cuestión de las condiciones límite, al discutir el flujo de dos fluidos adyacentes inmiscibles. Finalmente, en § 2.6 se considera brevemente el flujo alrededor de una esfera, con el fin de presentar un problema en coordenadas esféricas e indicar al mismo tiempo cómo se opera con fuerzas normales tangenciales.

Los métodos y problemas que aparecen en este capítulo se aplican solamente al flujo en estado estacionario. Por “estado estacionario” se entiende que las condiciones en cada uno de los puntos de la corriente no varían con el tiempo. Es decir, que una fotografía del sistema de flujo en el tiempo t sería exactamente igual a otra tomada algún tiempo después, $t + \Delta t$. En el Capítulo 3 se presentan las ecuaciones generales del flujo no estacionario.

§2.1 BALANCES ENVOLVENTES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO: CONDICIONES LÍMITE

Los problemas que se discuten en '§§ 2.2 a 2.5 se estudian aplicando balances de cantidad de movimiento a una delgada «envoltura» de fluido. Para el flujo rectilíneo en *estado estacionario*, el balance de cantidad de movimiento es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de entrada de} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de salida de} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de las fuerzas que} \\ \text{actúan sobre el sistema} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.1-1)$$

Al sistema puede entrar cantidad de movimiento por transporte, de acuerdo con la expresión newtoniana (o no newtoniana), de densidad de flujo de cantidad de movimiento. También puede entrar cantidad de movimiento debido al movimiento global del fluido. Las fuerzas que nos interesan son las fuerzas de presión (actuando sobre *superficies*) y las fuerzas de gravedad (que actúan sobre todo el *volumen*).

El balance de cantidad de movimiento de la Ec.2.1-1 puede aplicarse *solamente cuando las líneas de corriente del sistema son líneas rectas*, es decir, para el flujo rectilíneo). El método de operación para sistemas con líneas de corriente curvas considera en forma de ejemplos en § 3.4. En realidad, el origen de la Ec. 2.1-1 no puede comprenderse hasta que no se estudie la deducción en el Capítulo 3, y concretamente la Ec. 3.2- 10. A este respecto pedimos al lector que acepte, sin más, el principio de la Ec. 2. 1-1 y que aprenda a utilizarlo en la resolución de problemas sencillos de flujo viscoso en estado estacionario.

En general, el procedimiento a seguir para plantear y resolver problemas de flujo viscoso es el siguiente: primeramente se escribe un balance de cantidad de movimiento, de la forma de la Ec. 2.1-1 para una envoltura de espesor finito; después se hace tender hacia cero este espesor, utilizando la definición matemática de la primera derivada con el fin de obtener la correspondiente ecuación diferencial que describe la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento. Se introduce entonces la adecuada expresión newtoniana de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, con el fin de obtener una ecuación diferencial para la distribución de velocidad. Mediante la integración de estas dos ecuaciones diferenciales se obtienen, respectivamente, las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad en el sistema. Esta información puede utilizarse después para calcular muchas otras magnitudes, tales como velocidad media, velocidad máxima, velocidad volumétrica de flujo, pérdida de presión, y fuerzas que actúan sobre las superficies límite.

En las integraciones que hemos mencionado aparecen varias constantes de integración que se evalúan utilizando las «condiciones límite», es decir, determinaciones de hechos físicos para valores concretos de la variable independiente. La mayor parte de las condiciones límite utilizadas son las siguientes:

a. En las interfases sólido-fluido, la velocidad del fluido es igual a la velocidad con que se mueve la superficie misma; es decir, que se supone que el fluido esta adherido a la superficie sólida con la que se halla en contacto.

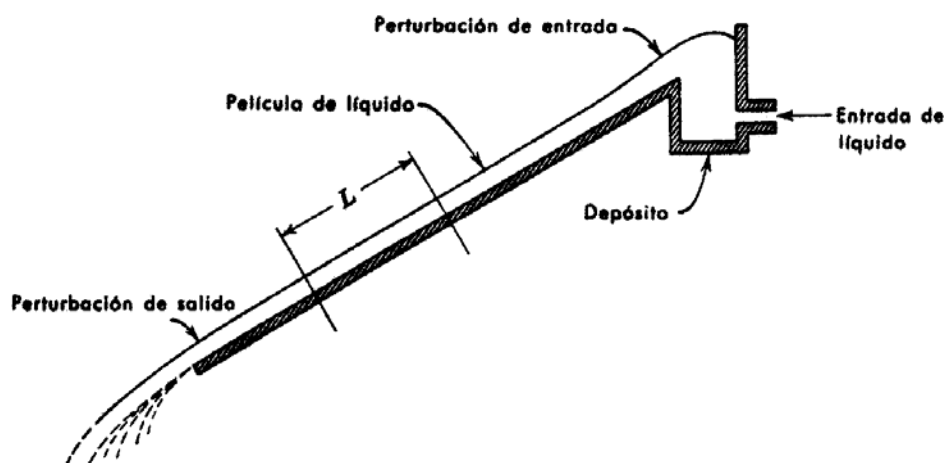
b. En las interfases líquido-gas, la densidad de flujo de cantidad de movimiento, y por consiguiente, el gradiente de velocidad en la fase líquida, es extraordinariamente pequeño, y en la mayor parte de los cálculos puede suponerse igual a cero.

c. En las interfases líquido-líquido, tanto la densidad de flujo de cantidad de movimiento como la velocidad son continuas a través de la interfase; es decir, que son iguales a ambos lados de la interfase.

En las secciones que siguen encontraremos estos tres tipos de condiciones límite. En esta sección hemos presentado algunas reglas generales para la resolución de problemas elementales de flujo viscoso. A continuación se aclara la aplicación de estas reglas para algunos sistemas sencillos de flujo.

§ 2.2 FLUJO DE UNA PELÍCULA DESCENDENTE

Como primer ejemplo, consideremos una superficie plana inclinada, tal como se indica en la Fig. 2.2-1. Estas películas se han estudiado en relación con torres de pared mojada, experiencias de evaporación y absorción de gases y aplicación de capas de pintura a rollos de papel. Se supone que la viscosidad densidad del fluido son constantes y se considera una región de longitud L , suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones de la entrada y la salida no están incluidas en L ; es decir, que en esta región el componente v_x de la velocidad es independiente de z .



FI. 1.1-1. Flujo viscoso isotérmico de una película de líquido bajo la influencia de la gravedad, sin formación de ondulaciones. Capa de espesor Δx sobre la que se aplica el balance de cantidad de movimiento. El eje y es perpendicular al plano del papel.

Comenzamos aplicando un balance de cantidad de movimiento z sobre un sistema de espesor Δx , limitado por los planos $z = 0$ y $z = L$, y que se extiende hasta una distancia W en la dirección y . (Véase Fig. 2.2-2.) Los distintos componentes del balance de cantidad de movimiento son por tanto:

velocidad de entrada de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en x	$(LW)(\tau_{xz})/\Delta x$	(2.2-1)
--	----------------------------	---------

velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en $x + \Delta x$	$(LW)(\tau_{xz})/\Delta x + \Delta x$	(2.2-2)
--	---------------------------------------	---------

velocidad de entrada de
cantidad de movimiento z
a través de la superficie
situada en $z = 0$

$$(W\Delta x v_x)(\rho v_z)/z = 0 \quad (2.2-3)$$

velocidad de salida de
cantidad de movimiento z
a través de la superficie
situada en $z = L$

$$(W\Delta x v_x)(\rho v_z)/z = L \quad (2.2-4)$$

fuerza de gravedad que
actúa sobre el fluido

$$(LW\Delta x)(\rho g \cos \beta) \quad (2.2-5)$$

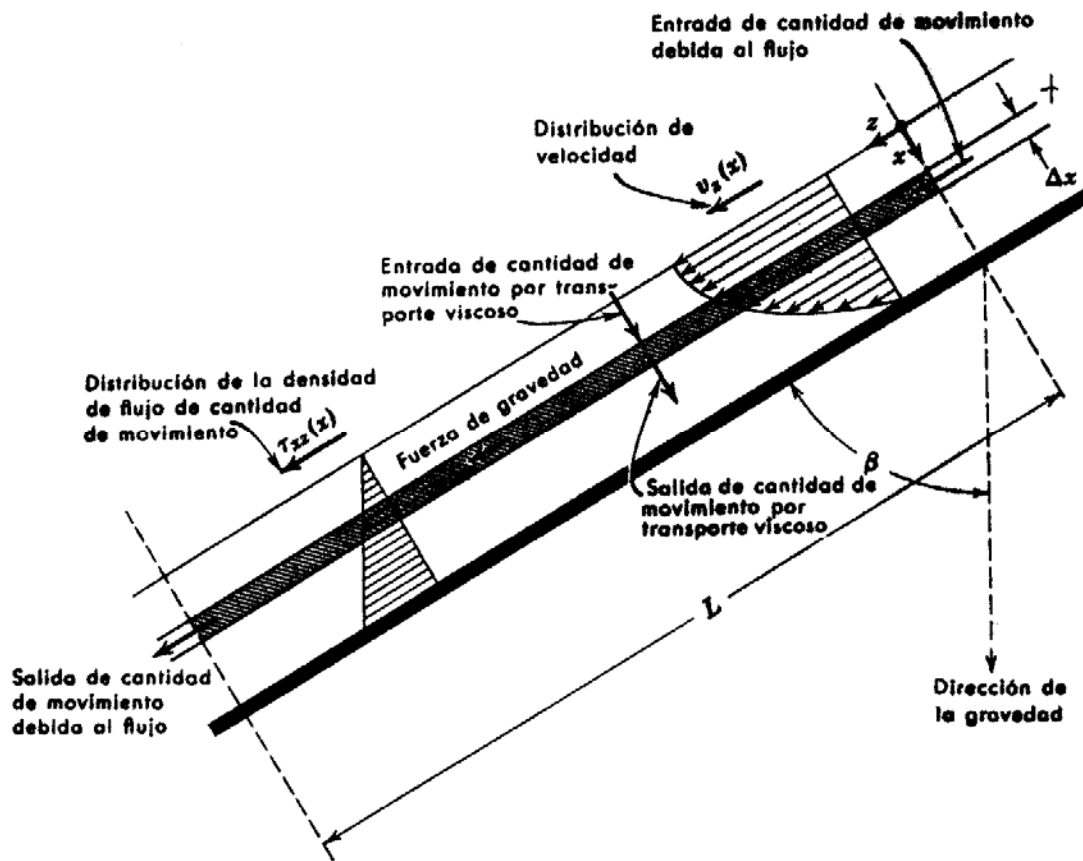


Fig. 2.2-1. Diagrama esquemático del experimento de una película descendente, con indicación de los efectos finales. En la región de longitud L la distribución de velocidad está totalmente desarrollada.

Obsérvese que las direcciones de “entrada” y “salida” se toman siempre en las direcciones positivas de los ejes x , y z (en este problema coinciden con la dirección del transporte de cantidad de movimiento). La notación $|_{x + \Delta x}$ quiere decir “evaluado para $x + \Delta x$ ”.

Substituyendo estos términos en el balance de cantidad de movimiento de la Ec. 2.1-1 se obtiene

$$LW\tau_{xz} \big|_x - LW\tau_{xz} \big|_{x+\Delta x} + W\Delta x \rho v_z^2 \big|_z = 0 \\ - W\Delta x \rho v_z^2 \big|_z = L + LW\Delta x \rho g \cos\beta = 0 \quad (2.2-6)$$

Como v_x vale lo mismo para $z=0$ y $z=L$, para cada valor de x , los términos tercero y cuarto se anulan entre sí. Dividiendo la Ec. 2.2-6 por $LW\Delta x$ y tomando el límite cuando Δx tiende hacia cero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\tau_{xz} \big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \big|_x) / \Delta x) = \rho g \cos\beta \quad (2.2-7)$$

El primer miembro de esta ecuación es por definición la derivada primera de τ_{xz} con respecto a x . Por tanto, la Ec.2.2-7 puede escribirse así

$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = \rho g \cos\beta \quad (2.2-8)$$

que es la ecuación diferencial para la densidad de flujo de cantidad de movimiento τ_{xz} . Al integrarla se obtiene

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta + C_1 \quad (2.2-9)$$

La constante de integración puede evaluarse aplicando la condición límite correspondiente a la interfase líquido-gas (véase § 2.1):

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{para } x = 0, \quad \tau_{xz} = 0 \quad (2.2-10)$$

cuya substitución en la Ec.2.2-9 conduce a $C_1 = 0$
por lo tanto, la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento es

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta \quad (2.2-11)$$

tal como se indica en la Fig. 2.2-2.

Si el fluido es newtoniano, ya sabemos que la densidad de flujo de cantidad de movimiento está relacionada con el gradiente de velocidad mediante la expresión,

$$\tau_{xz} = -\mu(dv_z/dx) \quad (2.2-12)$$

Substituyendo este valor en la Ec.2.2-11 se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la distribución de velocidad

$$\frac{dv_z}{dx} = - (\rho g \cos\beta / 2\mu)x \quad (2.2-13)$$

que puede integrarse fácilmente para obtener

$$v_z = - (\rho g \cos\beta / 2\mu) x^2 + C_2 \quad (2.2-14)$$

La constante de integración se evalúa a partir de la condición límite correspondiente

$$\text{C.L.:} \quad \text{para } x = \delta \quad v_z = 0 \quad (2.2-15)$$

Substituyendo esta condición límite en la Ec. 2.2-14 se obtiene que $C_2 = (\rho g \cos \beta / 2\mu)\delta^2$. Por consiguiente, la distribución de velocidad es

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (2.2-16)$$

Resulta por tanto, que el perfil de velocidad es parabólico. (Véase Fig. 2.2-2).

Una vez que se ha obtenido el perfil de velocidad, pueden calcularse las siguientes magnitudes:

(i) La *velocidad máxima* $v_{z \text{ máx}}$ es evidentemente la velocidad para $x = 0$; por tanto

$$v_{z \text{ máx}} = \rho g \delta^2 \cos \beta / 2\mu \quad (2.2-17)$$

(ii) La *velocidad media* $\langle v_z \rangle$ en una sección transversal de la película, se obtiene mediante el cálculo siguiente.

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx \, dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx \, dy} \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z \, dx \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] d\left(\frac{x}{\delta} \right) \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu} \end{aligned} \quad (2.2-18)$$

(iii) La *velocidad volumétrica de flujo* Q se obtiene a partir de la velocidad media, o por integración de la distribución de velocidad:

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx \, dy = W \delta \langle v_z \rangle = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3\mu} \quad (2.2-19)$$

(iv) El *espesor de la película* δ puede expresarse en función de la velocidad media, de la velocidad volumétrica de flujo, o la velocidad de flujo de masa por unidad de anchura de pared ($\Gamma = \rho \delta \langle v_z \rangle$).

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu\langle v_z \rangle}{\rho g \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho g W \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu \Gamma}{\rho^2 g \cos \beta}} \quad (2.2-20)$$

(v) El componente $-z$ de la fuerza F del fluido sobre la superficie se obtiene integrando la densidad de flujo de cantidad de movimiento sobre la interfase fluido-sólido:

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^L \int_0^W \tau_{xz}|_{x=\delta} dy dz \\ &= \int_0^L \int_0^W -\mu \left. \frac{dv_z}{dx} \right|_{x=\delta} dy dz \\ &= (LW)(-\mu) \left(-\frac{\rho g \delta \cos \beta}{\mu} \right) \\ &= \rho g \delta LW \cos \beta \end{aligned} \quad (2.2-21)$$

Es evidente que esto corresponde exactamente al componente- z del peso de todo el fluido contenido en la película.

Los anteriores resultados analíticos son sólo válidos cuando la película desciende en flujo laminar con líneas de corriente rectas. Estas condiciones se cumplen para el flujo lento de películas viscosas delgadas. Experimentalmente se ha encontrado que al aumentar la velocidad $\langle v_z \rangle$ de la película, al aumentar su espesor δ , y al disminuir la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$, varía gradualmente la naturaleza del flujo. Durante este cambio gradual se pueden observar tres tipos distintos de flujo, más o menos estables: (a) flujo laminar con líneas de corriente rectas, (b), flujo laminar con ondulaciones, y (c) flujo turbulento. La información cuantitativa respecto del tipo de flujo que puede esperarse para una serie determinada de condiciones físicas es sólo fragmentaria. Para paredes verticales se puede dar la siguiente información:

flujo laminar sin ondulaciones	$Re < 4$ a 25
flujo laminar con ondulaciones	4 a $25 < Re < 1000$ a 2000
flujo turbulento	$Re > 1000$ a 2000

teniendo $Re = 4\delta\langle v_z \rangle\rho/\mu = 4\Gamma/\mu$ el *número de Reynolds* para este sistema. El porqué se utiliza este grupo adimensional como criterio del tipo de flujo se estudia más adelante en los capítulos que siguen.

Ejemplo 2.2-1. Cálculo de la velocidad de película.

Un aceite tiene una viscosidad cinemática de $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ y una densidad de $8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. ¿Cuál tiene que ser la velocidad de flujo de masa de una película que desciende por una pared vertical para que el espesor de la misma sea de 2,5 mm?

Solución. De acuerdo con la Ec. 2.2-20, la velocidad de flujo de masa por unidad anchura de pared es, (todos los valores numéricos están en unidades mks):

$$\Gamma = \frac{\delta^3 \rho g}{3\nu} = \frac{(2,5 \times 10^{-3})^3 (0,8 \times 10^3) (9,80)}{3(2 \times 10^{-4})} = 0,204 \text{ kg m}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

Éste es el resultado que se desea si, y solamente en este caso, el flujo es realmente laminar: Para averiguar la naturaleza del flujo, vamos a calcular el número de Reynolds basado en la velocidad de flujo de masa que hemos hallado:

$$\text{Re} = \frac{4\Gamma}{\mu} = \frac{4\Gamma}{\rho \nu} = \frac{4(0,204)}{(0,8 \times 10^3) (2 \times 10^{-4})} = 5,1 \text{ (adimensional)}$$

Este número de Reynolds es inferior al límite superior que se ha indicado anteriormente para el flujo laminar, y el valor calculado para Γ es por tanto válido.

Ejemplo 2.2-2. Película descendente con viscosidad variable

Resolver de nuevo el problema de la película descendente para el caso de que la viscosidad dependa de la posición en la forma siguiente :

$$\mu = \mu_0 e^{-\alpha(x/\delta)} \quad (2.2-22)$$

en la que μ_0 es la viscosidad en la superficie de la película, y α es una constante que expresa la rapidez con que disminuye μ al aumentar x . Una variación de este tipo tiene lugar en el flujo descendente del condensado en una pared, con un gradiente lineal de temperatura a través de la película. Demostrar cómo el resultado de este problema se transforma en el obtenido anteriormente para el caso límite de que $\alpha = 0$ (película de viscosidad constante).

Solución Se procede igual que antes para establecer el balance de cantidad de movimiento y calcular la distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento de la Ec. 2.2 -11. Substituyendo después la ley de Newton (con la viscosidad variable de la Ec. 2.2-22) en la Ec. 2.2-11, se obtiene:

$$-\mu_0 e^{-\alpha(x/\delta)} (dv_z/dx) = \rho g x \cos \beta \quad (2.2-23)$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse, y evaluar la constante de integración a partir de las condiciones límite de la Ec. 2.2-15. El perfil de velocidad a que se llega es

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[e^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) - e^{\alpha x/\delta} \left(\frac{x}{\alpha \delta} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \quad (2.2-24)$$

Con el fin de hallar la velocidad para una película de viscosidad constante, damos a α el valor 0 en la Ec. 2.2-24. Al hacer esto aparece una dificultad matemática que se resuelve desarrollando en serie, por la fórmula de Taylor, las dos funciones exponenciales:

$$\begin{aligned}
 (v_z)_{\alpha=0} &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots \right) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 + \frac{\alpha x}{\delta} + \frac{\alpha^2 x^2}{2! \delta^2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3! \delta^3} + \cdots \right) \left(\frac{x}{\alpha \delta} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \alpha + \cdots \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{\delta^2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{\delta^3} \alpha + \cdots \right) \right] \\
 &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu_0} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.2-25}$$

El lector puede comprobar que este resultado se transforma en la Ec. 2.2-18 cuando $\alpha = 0$.

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[e^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) - \frac{2}{\alpha^3} \right] \tag{2.2-26}$$

§ 2.3 FLUJO A TRAVÉS DE UN TUBO CIRCULAR

El flujo de fluidos en tubos circulares se encuentra con frecuencia en física, química, biología e ingeniería. El flujo laminar de fluidos en tubos circulares puede analizarse mediante el balance de cantidad de movimiento que se ha descrito en § 2.1. La única modalidad nueva que se introduce aquí es el uso de coordenadas cilíndricas, que son las coordenadas naturales para describir las posiciones en una tubería circular.

Consideremos el flujo laminar en estado estacionario de un fluido de densidad constante ρ en un tubo “muy largo” de longitud L y radio R . Especificamos que el tubo sea «muy largo» porque vamos a suponer que no existen «efectos finales»; es decir, que vamos a ignorar el hecho de que a la entrada y a la salida el flujo no será necesariamente paralelo a la superficie del tubo.

Elegimos como sistema una envoltura cilíndrica de espesor Δr y longitud L (véase Fig. 2.3-1), y comenzamos por enumerar las distintas contribuciones al balance de cantidad de movimiento en la dirección z :

velocidad de entrada de cantidad de movimiento a través de la superficie cilíndrica situada en r	$(2\pi r L \tau_{rz}) _r$	$(2.3-1)$
---	---------------------------	-----------

velocidad de salida de
cantidad de movimiento
a través de la superficie
cilíndrica situada en $r + \Delta r$

$$(2\pi r L \tau_{rz}) \big|_{r + \Delta r} \quad (2.3-2)$$

velocidad de entrada de
cantidad de movimiento
a través de la superficie
anular situada en $z = 0$

$$(2\pi r \Delta r V_z)(\rho V_z) \big|_{z = 0} \quad (2.3-3)$$

velocidad de salida de
cantidad de movimiento
a través de la superficie
anular situada en $z = L$

$$(2\pi r \Delta r V_z)(\rho V_z) \big|_{z = L} \quad (2.3-4)$$

fuerza de gravedad que
actúa sobre la envoltura
cilíndrica

$$(2\pi r \Delta r L) \rho g \quad (2.3-5)$$

fuerza de presión que
actúa sobre la superficie
anular situada en $z = 0$

$$(2\pi r \Delta r) p_0 \quad (2.3-6)$$

fuerza de presión que
actúa sobre la superficie
anular situada en $z = L$

$$- (2\pi r \Delta r) p_L \quad (2.3-7)$$

Téngase en cuenta una vez más que la “entrada” y “salida” se toma en la dirección positiva de los ejes.

Sumando las contribuciones al balance de cantidad de movimiento, se obtiene

$$(2\pi r L \tau_{rz}) \big|_r - (2\pi r L \tau_{rz}) \big|_{r + \Delta r} + (2\pi r \Delta r \rho v_z^2 z) \big|_{z = 0} - (2\pi r \Delta r \rho v_z^2 z) \big|_{z = L} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0 \quad (2.3-8)$$

Como se supone que el fluido es incompresible, v_x es la misma para $z = 0$ y $z = L$, y, por tanto, los términos tercero y cuarto se anulan entre sí. Dividiendo la Ec. 2.3-8 por $2\pi r \Delta r$ y pasando al límite, cuando Δr tiende hacia cero, queda

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r \tau_{rz}) \big|_{r + \Delta r} - (r \tau_{rz}) \big|_r}{\Delta r} = ((p_0 - p_L / L) + \rho g) r \quad (2.3-9)$$

El primer miembro de esta ecuación es por definición la derivada primera, y por tanto la Ec. 2.3-9 puede escribirse así:

$$\frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = ((p_0 - p_L / L) + \rho g) r \quad (2.3-10)$$

en la que¹ $p = p - \rho g z$. La Ec. 2.3-10 puede integrarse para obtener:

$$\tau_{rz} = ((p_0 - p_L / 2L)) r + C_1 / r \quad (2.3-11)$$

La constante C_1 tiene que ser cero si la densidad de flujo de cantidad de movimiento no es infinita para $r = 0$. La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento es, por consiguiente

$$\tau_{rz} = ((P_0 - P_L) / 2L) r \quad (2.3-12)$$

¹ El termino $\mathcal{P}$ representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación. Con el fin de permitir otras orientaciones de flujo, se puede definir $\mathcal{P}$ en esta forma más general $\mathcal{P} = p + \rho gh$, siendo h la distancia medida *hacia arriba* (es decir, en sentido contrario a la gravedad) desde un plano cualquiera, que se toma como referencia.

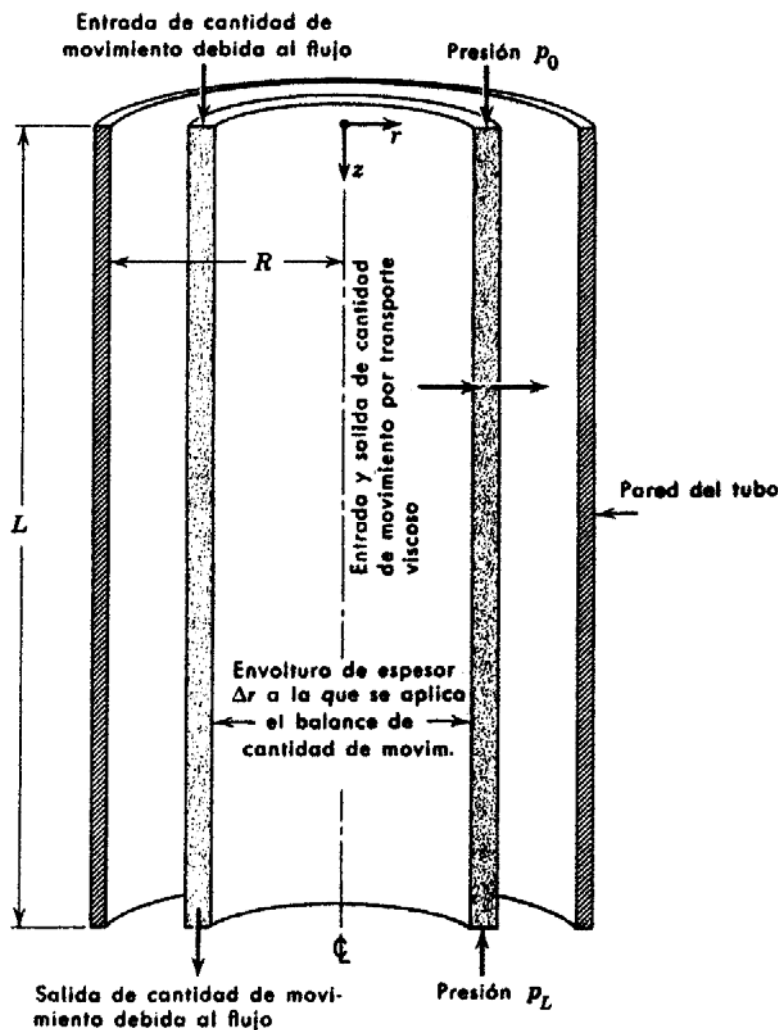


Fig. 2.3-1 Envoltura cilíndrica de un fluido sobre la cual se aplica el balance de cantidad de movimiento, para obtener el perfil de velocidad y la fórmula de Hagen-Poiseuille para la velocidad volumétrica de flujo.

Esta distribución se indica en la Fig.2.3-2

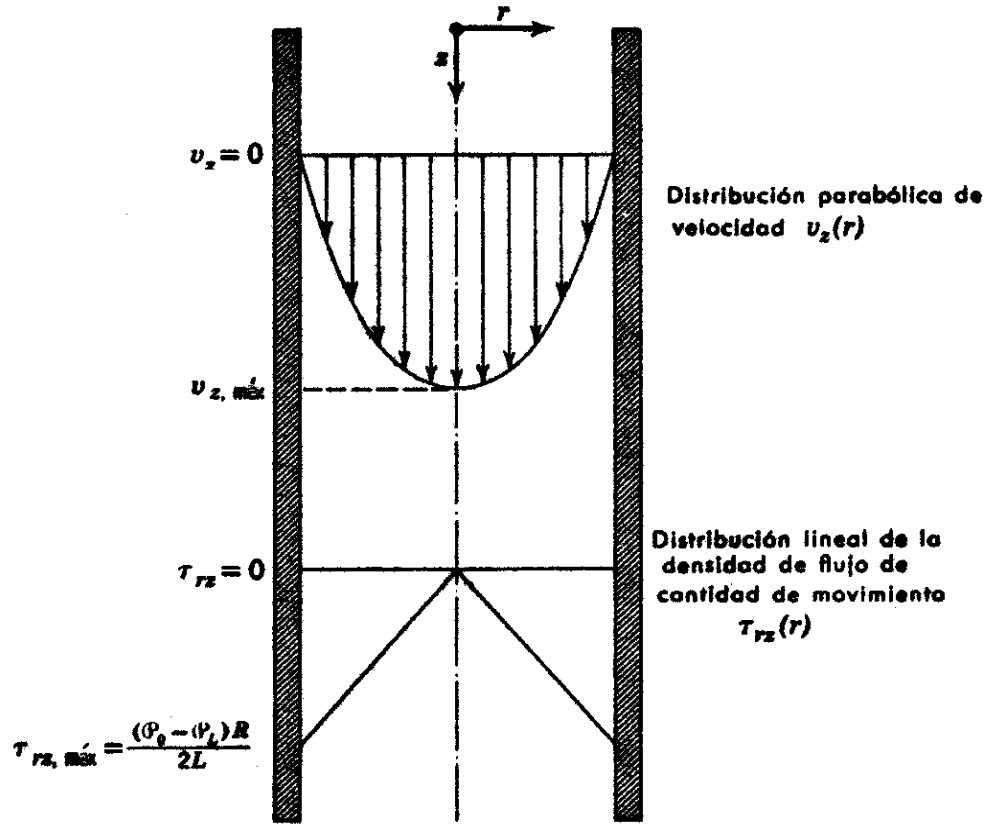


Fig. 2.3-2 Distribuciones de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo de tubos cilíndricos.

La ley de newton de la viscosidad para este caso es

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (2.3-13)$$

Substituyendo este valor de τ_{rz} en la Ec. 2.3-12, se obtiene para la velocidad la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv_z}{dr} = -((P_0 - P_L) / 2\mu L)r \quad (2.3-14)$$

Integrando, se llega a

$$v_z = -((P_0 - P_L) / 4\mu L)r^2 + C_2 \quad (2.3-15)$$

Teniendo en cuenta la condición límite de que v_x es cero para $r = R$, se obtiene para la constante C_2 el valor $(P_0 - P_L) R^2 / 4\mu L$. La distribución de velocidad es por tanto

$$v_z = ((P_0 - P_L) R^2 / 4\mu L) (1 - (r / R)^2) \quad (2.3-16)$$

Este resultado nos indica que la distribución de velocidad para el flujo laminar de un fluido incompresible en un tubo es parabólica. (Véase Fig. 2.3-2.).

Una vez que se conoce el perfil de velocidad, pueden calcularse fácilmente las siguientes magnitudes:

(i) La *velocidad máxima*, v_z máx., tiene lugar para $r = 0$, y su valor es

$$v_z \text{ máx} = ((P_0 - P_L) R^2 / 4\mu L) \quad (2.3-17)$$

(ii) La *velocidad media* $\langle v_z \rangle$, se calcula sumando todas las velocidades en una sección transversal y dividiendo por el área de dicha sección:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{8\mu L} \quad (2.3-18)$$

Los detalles de la integración se dejan para el lector. Nótese que $\langle v_z \rangle = 1/2 V_z' \text{ max.}$

(iii) La *velocidad volumétrica de flujo* Q , es el producto del área por la velocidad media, por tanto

$$Q = \frac{\pi(P_0 - P_L) R^4}{8\mu L} \quad (2.3-19)$$

Este último resultado es la conocida ley de Hagen-Poiseuille, en honor de dos científicos, que se han hecho famosos con esta fórmula. Establece la relación que existe entre la velocidad volumétrica de flujo y las fuerzas que originan dicho flujo (las fuerzas relacionadas con la caída de presión y la aceleración gravitacional).

(iv) El componente z de la *fuerza del fluido que actúa sobre la superficie mojada de la tubería* F_z , es exactamente la densidad de flujo de cantidad de movimiento integrado sobre el área mojada:

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi RL(-\mu (dv_z/dr) \big|_{r=R} = \pi R^2 (P_0 - P_L)) \\ &= \pi R^2 (P_0 - P_L) + \pi R^2 L \rho g \end{aligned} \quad (2.3-20)$$

Este resultado viene a decir que la fuerza neta que actúa en el sentido de la corriente sobre el cilindro de fluido, debido a la diferencia de presión y a la aceleración gravitacional, se equilibra exactamente por la fuerza viscosa F_z que tiende a oponerse al movimiento del fluido.

Los resultados de esta sección son válidos solamente para valores del número de Reynolds inferiores a 2100, para los que el flujo es laminar. Para este sistema se acostumbra definir el número de Reynolds por $Re = D \langle v_z \rangle \rho / \mu$, siendo $D = 2R$, el diámetro del tubo.

A continuación vamos a resumir todas las suposiciones que están implícitas en el desarrollo de la ley de Hagen-Poiseuille:

- a. El flujo es laminar (Re menor que aproximadamente 2100)
- b. La densidad ρ es constante («flujo incompresible»)
- c. El flujo es independiente del tiempo («estado estacionario»); el problema correspondiente al estado no estacionario se trata en § 4.1.

d. El fluido es newtoniano; es decir, $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$.

e. Los efectos finales son despreciables. En la práctica se necesita una «longitud de entrada» (después de la entrada del tubo) del orden de $L_e = 0,035 D Re$ para que se formen los perfiles parabólicos. Si en la sección de la tubería de que se trata está incluida la región de entrada hay que aplicar una corrección. El factor de corrección que se introduce bien sea en ΔP o en Q nunca excede de L_e / L si $L > L_e$.

f. El fluido se comporta como un medio continuo. Esta suposición es válida, excepto para los gases muy diluidos o tubos capilares muy estrechos, en los que el recorrido libre medio es comparable al diámetro del tubo (régimen de «flujo de deslizamiento»), o mucho mayor que el diámetro del tubo (régimen de «flujo de Knudsen» o de «flujo de molécula libre»).

g. No hay deslizamiento en la pared. Esta suposición es muy correcta para los fluidos puros en las condiciones que se han supuesto en (f).

Ejemplo 2.3-1. Determinación de la viscosidad a partir de datos de flujo en un capilar

Por un tubo horizontal de 30 cm de longitud y 2,5 mm de diámetro interno, fluye glicerina ($\text{CH}_2\text{OH} \cdot \text{CHOH} \cdot \text{CH}_2\text{OH}$) a $26,5^\circ \text{C}$. Para una caída de presión de $2,957 \text{ kg cm}^{-2}$ la velocidad de flujo es $1,883 \text{ cm}^3 \text{ seg}^{-1}$. La densidad de la glicerina a $26,5^\circ \text{C}$ es $1,261 \text{ g cm}^{-3}$. A partir de estos datos calcular la viscosidad de la glicerina en centipoises. (La medida del flujo en tubos capilares es uno de los métodos corrientes para la determinación de viscosidad; estos aparatos se denominan «viscosímetros capilares».)

Solución. A partir de la ley de Hagen-Poiseuille (Ec. 2.3-19), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu &= \pi \Delta p R^4 / 8 Q L \\ &= \frac{\pi (2,957 \times 10^3 \text{ g cm}^{-2}) (981 \text{ dinas g}^{-1}) (1,25)^4 \times 10^{-4} \text{ cm}^4}{8 (1,883 \text{ cm}^3 \text{ seg}^{-1}) (30 \text{ cm})} \\ &= 4,92 \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1} = 492 \text{ cp} \end{aligned} \quad (2.3-21)$$

Es preciso comprobar que el flujo es laminar. El número de Reynolds es

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{D(v_z)\rho}{\mu} = \frac{4 Q \rho}{\pi D \mu} \\ &= \frac{4 (1,883 \text{ cm}^3 \text{ seg}^{-1}) (1,261 \text{ g cm}^{-3})}{\pi (0,25 \text{ cm}) (4,92 \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1})} \\ &= 2,46 \text{ (adimensional)} \end{aligned} \quad (2.3-22)$$

Por lo tanto, el flujo es evidentemente laminar. Por otra parte, la longitud de entrada, L_e es

$$L_e = 0,035 D Re = (0,035) (0,2S) (2,46) = 0,022 \text{ cm}$$

De esto se deduce que los efectos de entrada carecen de importancia, y que el valor de la viscosidad que hemos obtenido está correctamente calculado.

Ejemplo 2.3-2. Flujo de Bingham en un tubo capilar

Un fluido cuyo comportamiento se ajusta muy aproximadamente al modelo de Bingham (véase Ec. 1.2- 2) circula por un tubo vertical en virtud de un gradiente de presión, la aceleración de la gravedad. El radio y la longitud del tubo son, respectivamente, R y L . Se desea obtener una relación entre la velocidad volumétrica de flujo, Q , y la combinación de las fuerzas de presión y gravedad que actúan sobre el fluido.

Solución. La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo de cualquier clase de fluido en un tubo circular, viene dada por la Ec. 2.3 -12. De acuerdo con la Fig. 1.2 -1, el gradiente de velocidad para un fluido de Bingham es cero mientras la densidad de flujo de cantidad de movimiento sea menor de un cierto valor τ_0 . Por lo tanto, es de esperar que exista una región de «flujo de tapón» en la parte central del tubo, tal como se ha representado en la Fig. 2.3 -3. Fuera de la región de flujo de tapón, la densidad de flujo de cantidad de movimiento y el gradiente de velocidad están relacionados por la Ec. 1.2 -2a. Substituyendo en la Ec. 2.3 -12 la Ec. 1.2- 2a, expresada en coordenadas cilíndricas, se obtiene

$$\tau_0 - \mu_0 (dv_z/dr) = (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L / 2L)r \quad (2.3-23)$$

Al integrar esta ecuación diferencial de primer orden de variables separables, resulta

$$v_z = - ((\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) / 4\mu_0 L) r^2 + \frac{\tau_0 r}{\mu_0} + C_2 \quad (2.3-24)$$

La constante C_2 se calcula utilizando la condición límite de que $v_z = 0$ para $r = R$. Con esto se llega finalmente a la siguiente distribución de velocidad:

$$v_z > = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^2}{4\mu_0 L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0 R}{\mu_0} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad r > r_0 \quad (2.3-25)$$

$$v_z < = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^2}{4\mu_0 L} \left(1 - \frac{r_0}{R} \right)^2 \quad r < r_0 \quad (2.3-26)$$

Siendo r_0 el radio de la región de flujo de tapón, que está definido por $\tau_0 = (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) r_0 / 2L$. La Ec. 2.3- 26 se obtiene haciendo $r = r_0$ en la Ec. 2.3- 25 y simplificando.

La velocidad volumétrica de flujo puede calcularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{r_0} v_z < r \, dr + 2\pi \int_{r_0}^R v_z > r \, dr \end{aligned} \quad (2.3-27)$$

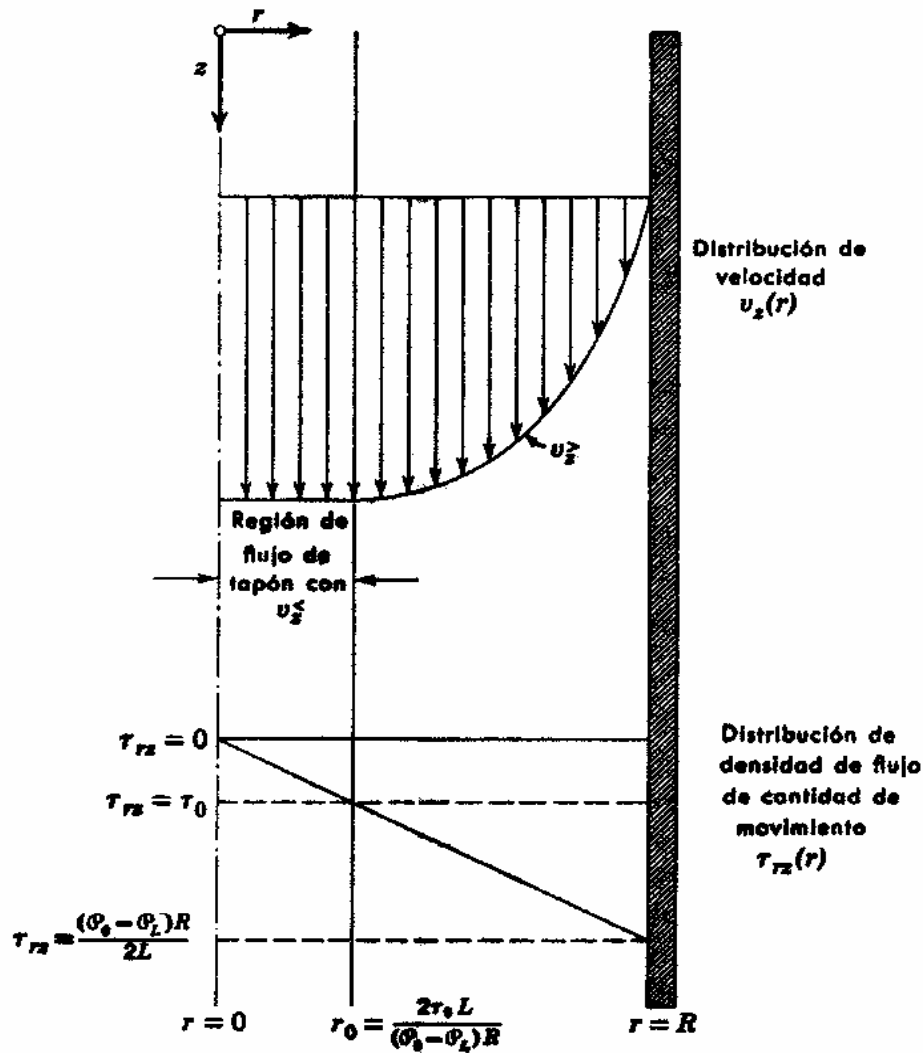


Fig.2.3-3. Flujo de un fluido de Bingham en un tubo circular

Las integrales pueden evaluarse substituyendo en estas ecuaciones las correspondientes expresiones de $v_z <$ y $v_z >$. Sin embargo, resulta más sencillo integrar por partes la primera expresión de Q :

$$Q = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 v_z \Big|_0^R - \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{dv_z}{dr} \right) r^2 dr \right] \quad (2.3-28)$$

El término $r^2 v_z$ es cero para ambos límites, y además, el límite inferior de la integral puede substituirse por r_0 puesto que $dv_z/dr = 0$ cuando $r \leq r_0$.

Por lo tanto, la velocidad volumétrica de flujo es

$$\begin{aligned}
 Q &= \pi \int_{r_0}^R (-dv_z/dr) r^2 dr \\
 &= \pi \int_{r_0}^R \left[\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu_0 L} \right) r - \frac{\tau_0}{\mu_0} \right] r^2 dr
 \end{aligned}
 \tag{2.3-29}$$

Efectuando la integración, y utilizando el símbolo TR para la densidad de flujo de cantidad de movimiento en la pared, $(P_0 - P_L)R / 2L$ se obtiene

$$Q = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^4}{8\mu_0 L} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_R} \right)^4 \right]
 \tag{2.3-30}$$

que es la Ecuación de *Buckingham-Reiner*. Cuando τ_0 es cero, el modelo de Bingham se transforma en el modelo newtoniano, y la Ec. 2.3 -30 se convierte en la ecuación de Hagen-Poiseuille.

§ 2.4. FLUJO A TRAVÉS DE UNA SECCIÓN DE CORONA CIRCULAR

Vamos a considerar ahora otro problema de flujo viscoso en coordenadas cilíndricas, pero cuyas condiciones límites son diferentes. Un fluido incompresible fluye en estado estacionario a través de la región comprendida entre dos cilindros circulares coaxiales de radios κR y R (véase Fig.2.4-1). Comenzamos efectuando un balance de cantidad de movimiento sobre una fina envoltura cilíndrica, y se llega a la misma ecuación diferencial que se ha obtenido anteriormente para el flujo de un tubo (véase Ec. 2.3-10):

$$\frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = ((P_0 - P_L) / L) r
 \tag{2.4-1}$$

Téngase en cuenta que para este problema $P = p + \rho gz$, puesto que las fuerzas de presión y gravedad actúan en direcciones opuestas (es decir, que z corresponde a h). Esta ecuación diferencial puede integrarse igual que antes (véase Ec. 2.3-11), para obtener

$$\tau_{rz} = ((P_0 - P_L) / 2L) r + C_1 / r
 \tag{2.4-2}$$

La constante C_1 no puede determinarse de forma inmediata, puesto que no disponemos de información acerca de la densidad de flujo de cantidad de movimiento en ninguna de las dos superficies $r = \kappa R$ o $r = R$. Lo más que podemos decir es que ha de existir un máximo de la curva de velocidad en un cierto plano (hasta ahora desconocido) $r = \lambda R$, para el cual la densidad de flujo de cantidad de movimiento ha de ser cero. Teniendo esto en cuenta, puede substituirse C_1 por $(P_0 - P_L) \lambda R^2 / 2L$, con lo que la Ec. 2.4-2 se transforma en

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} ((r/R) - \lambda^2 (R/r))
 \tag{2.4-3}$$

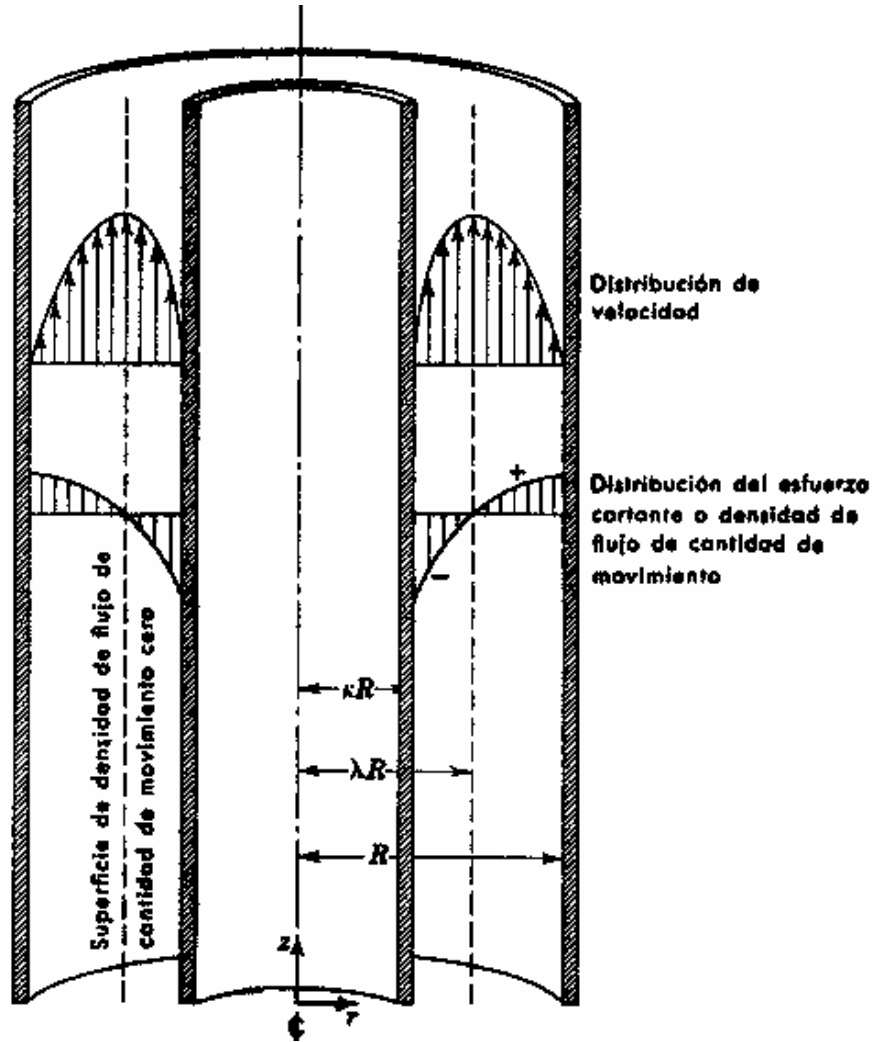


Fig. 2.4-1. Flujo ascendente a través de dos cilindros concéntricos.

Nótese que λ es todavía una constante de integración desconocida. La única razón de haber substituido C_1 por λ es que conocemos el significado físico de λ .

Substituyendo en la Ec. 2.4-3 la ley de la viscosidad de Newton $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$ se obtiene esta ecuación diferencial:

$$dv_z = - \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2\mu L} \left((r/R) - \lambda^2 (R/r) \right) \quad (2.4-4)$$

Integrando con respecto a r :

$$v_z = - \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left((r/R)^2 - 2\lambda^2 \ln(R/r) + C_2 \right) \quad (2.4-5)$$

Ahora pueden evaluarse las dos constantes de integración λ y C_2 , utilizando las dos siguientes condiciones límite:

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{para } r = \kappa R \quad v_z = 0 \quad (2.4-6)$$

$$\text{C.L. 2:} \quad \text{para } r = R \quad v_z = 0 \quad (2.4-7)$$

Substituyendo estas condiciones límites en la Ec. 2.4-5 se obtienen estas dos ecuaciones simultáneas

$$0 = - \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} (k^2 - 2\lambda^2 \ln k + C_2) \quad (2.4-8)$$

$$0 = - \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} (1 + C_2) \quad (2.4-9)$$

De las que se deduce el valor de las constantes C_2 y λ

$$C_2 = -1 \quad 2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \quad (2.4-10,11)$$

Substituyendo estos valores en las Ecs. 2.4-3 y 2.4-5 se obtienen respectivamente, la distribución¹ de densidad de flujo de cantidad de movimiento y la distribución de velocidad, para el flujo incompresible en estado estacionario a través de dos tubos concéntricos

$$\tau_{rz} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2L} \left[\left(\frac{r}{R} \right) - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \quad (2.4-12)$$

$$v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \right) \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (2.4-13)$$

Obsérvese que cuando κ se hace cero estas ecuaciones se transforman en las correspondientes al flujo en tubos circulares (véanse Ecs. 2.3-12 y 2.3-16). El lector deberá de habituarse a comprobar analíticamente los resultados para asegurarse de que describen adecuadamente los «casos límite».

Una vez que se conocen ya las distribuciones de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento, pueden obtenerse de forma inmediata otras magnitudes interesantes:

(i) La velocidad máxima

$$v_{z,\text{máx}} = v_z \Big|_{r=\kappa R} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right) \left[1 - \ln \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right) \right] \right\} \quad (2.1-14)$$

(ii) La velocidad media

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R r dr d\theta} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{8\mu L} \left(\frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \right) \quad (2.4-15)$$

(iii) La velocidad volumétrica de flujo

$$Q = \pi R^2 (1 - \kappa^2) \langle v_z \rangle = \frac{\pi (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^4}{8\mu L} \left((1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)} \right) \quad (2.4-16)$$

(iv) La fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido se obtiene sumando las fuerzas que actúan sobre los cilindros interior y exterior, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_z &= -\tau_{rz} \big|_{r=kR} \cdot 2\pi kRL + \tau_{rz} \big|_{r=R} \cdot 2\pi RL \\ &= \pi R^2 (1 - \kappa^2) (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) \end{aligned} \quad (2.4-17)$$

¹La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo no-newtoniano *no* viene dada por la Ec. 2.4-14. Véase el problema 2.Q.

El lector deberá de comprobar e interpretar, como ejercicio, estos resultados.

Las ecuaciones anteriores se transforman en las fórmulas para el flujo en tubos circulares en el caso limite de que $K \rightarrow 0$. De igual forma, se obtienen también las ecuaciones para el flujo en rendijas planas cuando $K \rightarrow 1$. Los procesos necesarios para obtener estas últimas se tratan en los problemas 2.F (para la velocidad volumétrica de flujo) y 2.P (para los perfiles de velocidad).

La solución que se ha obtenido es sólo válida para el flujo laminar. La transición de laminar a turbulento se produce en las inmediaciones de $Re = 2000$, estando el número de Reynolds definido por $Re = 2R(1 - K) \langle v_z \rangle \rho / \mu$. En realidad, antes de la transición, el flujo laminar estable presenta un movimiento sinuoso.

§ 2.5 FLUJO ADYACENTE DE DOS FLUIDOS INMISCIBLES

Hasta aquí hemos considerado casos de flujo con superficies de separación sólido-fluido y líquido-gas. Vamos a ver ahora un ejemplo de flujo con superficie de separación líquido-líquido. (Véase Fig. 2.5-1.)

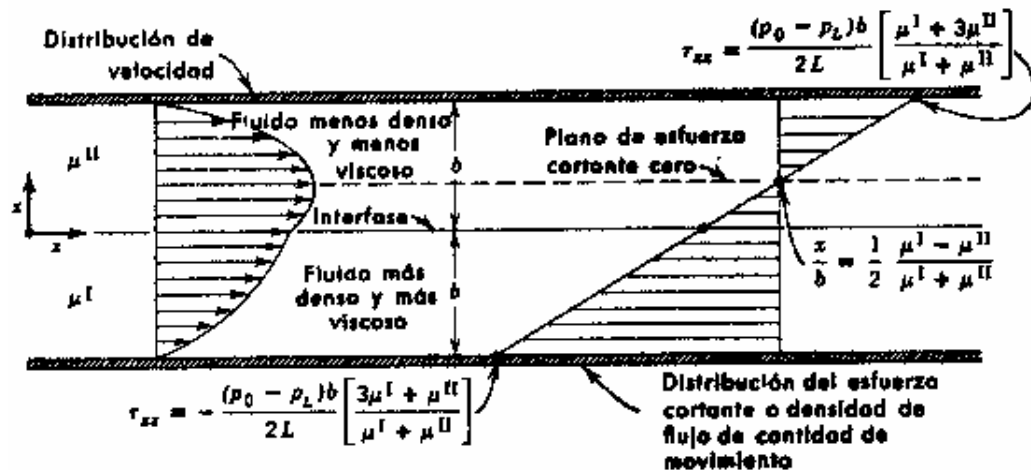


Fig. 2.5-1. Flujo de dos fluidos inmiscibles entre dos laminas planas paralelas debido a un gradiente de presión.

Dos fluidos inmiscibles e incompresibles circulan, debido a un gradiente de presión, en la dirección z de una estrecha rendija horizontal de longitud L y anchura w . Las velocidades de los fluidos están ajustadas de tal forma que una mitad de la rendija está llena del fluido I (la fase más densa), y la otra mitad está ocupada por el fluido II (la fase menos densa). Se desea analizar la distribución de velocidad de densidad de flujo de cantidad de movimiento en este sistema.

Un balance diferencial de cantidad de movimiento conduce a la siguiente ecuación:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{P_O - P_L}{L} \quad (2.5-1)$$

Esta ecuación se obtiene tanto para la fase I como para la fase II. Integrando la Ec.2.5-1 para las dos regiones, resulta

$$\tau_{xz}^I = (P_O - P_L / L)x + C_1^I \quad (2.5-2)$$

$$\tau_{xz}^{II} = (P_O - P_L / L)x + C_1^{II} \quad (2.5-3)$$

Se utiliza la condición límite de que el transporte de cantidad de movimiento es continuo a través de la interfase de los dos fluidos:

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{para } x = 0 \quad \tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \quad (2.5-4)$$

Lo que nos indica que $C_1^I = C_1^{II}$, y por tanto, le llamaremos simplemente constante de integración C_1 .

Si se substituye la ley de newton de la viscosidad en las Ecs. 2.5-2 y 2.5-3, se llega a

$$-\mu^I \frac{dv_z^I}{dx} = (P_O - P_L / L)x + C_1 \quad (2.5-5)$$

$$-\mu^{II} \frac{dv_z^{II}}{dx} = (P_O - P_L / L)x + C_1 \quad (2.5-6)$$

La integración de estas ecuaciones da

$$V_z^I = -\frac{(P_O - P_L)x^2}{2\mu^I L} - \frac{C_1 x}{\mu^I} + C_2^I \quad (2.5-7)$$

$$V_z^{II} = -\frac{(P_O - P_L)x^2}{2\mu^{II} L} - \frac{C_1 x}{\mu^{II}} + C_2^{II} \quad (2.5-8)$$

Para determinar las tres constantes de integración, se utilizan estas tres condiciones límite adicionales

$$\text{C.L. 2:} \quad \text{para } x = 0, \quad v_z^I = v_z^{II} \quad (2.5-9)$$

$$\text{C.L. 3:} \quad \text{para } x = -b, \quad v_z^I = 0 \quad (2.5-10)$$

$$\text{C.L. 4:} \quad \text{para } x = +b, \quad v_z^{II} = 0 \quad (2.5-11)$$

Al establecer matemáticamente estas condiciones límite se obtiene

$$\text{B.C. 2:} \quad C_2^I = C_2^{II} \quad (2.5-12)$$

$$\text{B.C. 3:} \quad 0 = - \frac{(P_0 - P_L)b^2}{2\mu^I L} - \frac{C_1}{\mu^I} b + C_2^I \quad (2.5-13)$$

$$\text{B.C. 4:} \quad 0 = - \frac{(P_0 - P_L)b^2}{2\mu^{II} L} - \frac{C_1}{\mu^{II}} b + C_2^{II} \quad (2.5-14)$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$C_1 = - \frac{(P_0 - P_L)b}{2\mu^I L} * \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \quad (2.5-15)$$

$$C_2^I = + \frac{(P_0 - P_L)b^2}{2\mu^I L} * \frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} = C_2^{II} \quad (2.5-16)$$

por lo tanto, los perfiles de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad son:

$$\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)b}{L} \left[\left(\frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \right] \quad (2.5-17)$$

$$v_z^I = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left[\left(\frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left(\frac{x}{b} \right) - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (2.5-18)$$

$$v_z^{II} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{II} L} \left[\left(\frac{2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left(\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left(\frac{x}{b} \right) - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (2.5-19)$$

Estas distribuciones se indican en las Fig. 2.5-1. Obsérvese que $\mu^I = \mu^{II}$, ambas distribuciones son iguales, y los resultados se transforman en el perfil parabólico de velocidad para el flujo laminar de un fluido puro en una rendija.

La *velocidad media* en cada capa puede calcularse de esta forma:

$$\langle v_z^I \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b}^0 v_z^I dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^I L} \left(\frac{7\mu^I + \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (2.5-20)$$

$$\langle v_z^{II} \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b v_z^{II} dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^{II} L} \left(\frac{\mu^I + 7\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (2.5-21)$$

A partir de las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad, que hemos obtenido anteriormente, se puede además calcular la velocidad máxima, la velocidad en la interfase, el plano de esfuerzo cortante cero y la fricción en las paredes de la rendija.

§ 2.6 FLUJO REPTANTE ALREDEDOR DE UNA ESFERA SÓLIDA

En las secciones anteriores hemos resuelto algunos problemas elementales de flujo viscoso, mediante la aplicación de balances diferenciales de cantidad de movimiento. En la sección inicial de este capítulo se insistió en que este método de análisis está restringido a los sistemas con líneas de corriente rectas. Puesto que el problema del flujo alrededor de una esfera implica líneas de corriente curvas, no puede resolverse por las técnicas que hemos visto en este capítulo. Sin embargo, lo trataremos aquí brevemente debido a la importancia que tiene en ingeniería el flujo alrededor de objetos sumergidos. No se pretenden deducir las expresiones para las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, de la presión y de la velocidad, sino que enunciaremos estos resultados y los utilizaremos después para deducir algunas relaciones importantes que serán necesarias en posteriores tratamientos.

Consideremos el flujo muy lento de un fluido incompresible alrededor de una esfera sólida, tal como se indica en la Fig. 2.6-1. La esfera es de radio R y diámetro D . El fluido tiene una viscosidad μ y una densidad ρ , y asciende verticalmente hacia la esfera con una velocidad uniforme V_∞ a lo largo del eje z negativo. Analíticamente se ha encontrado que para un flujo muy lento, la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, la distribución de presión, y los componentes de la velocidad, expresados en coordenadas esféricas, son:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \sin \theta \quad (2.6-1)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (2.6-2)$$

$$v_r = V_\infty \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (2.6-3)$$

$$v_\theta = -V_\infty \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (2.6-4)$$

En la Ec. 2.6-2, p_0 es la presión en el plano $z = 0$ alejado de la esfera, $-\rho g z$ es la contribución del peso del fluido (efecto hidrostático), y el término que contiene V_∞ resulta como consecuencia del flujo del fluido alrededor de la esfera. Estas ecuaciones son solamente válidas para «flujo reptante», que para este sistema tiene lugar cuando el número de Reynolds $D V_\infty \rho / \mu$ es inferior a aproximadamente 0,1. Esta región se caracteriza por la virtual ausencia de remolinos aguas abajo de la esfera.

Obsérvese que la distribución de velocidad cumple la condición de que $v_r = v_\theta = 0$ en la superficie de la esfera. Además, puede demostrarse que v_z tiende hacia V_∞ para puntos alejados de la esfera. Por otra parte, se ve claramente que, lejos de la superficie esférica, la distribución de presión se transforma en la ecuación hidrostática $p = p_0 - \rho g z$. Por lo tanto, las ecuaciones deben de satisfacer las condiciones límite para $r = R$ y $r = \infty$.

Calculamos ahora la fuerza neta que el fluido ejerce sobre la esfera. Esta fuerza se calcula integrando la fuerza normal y la fuerza tangencial sobre la superficie de la esfera.

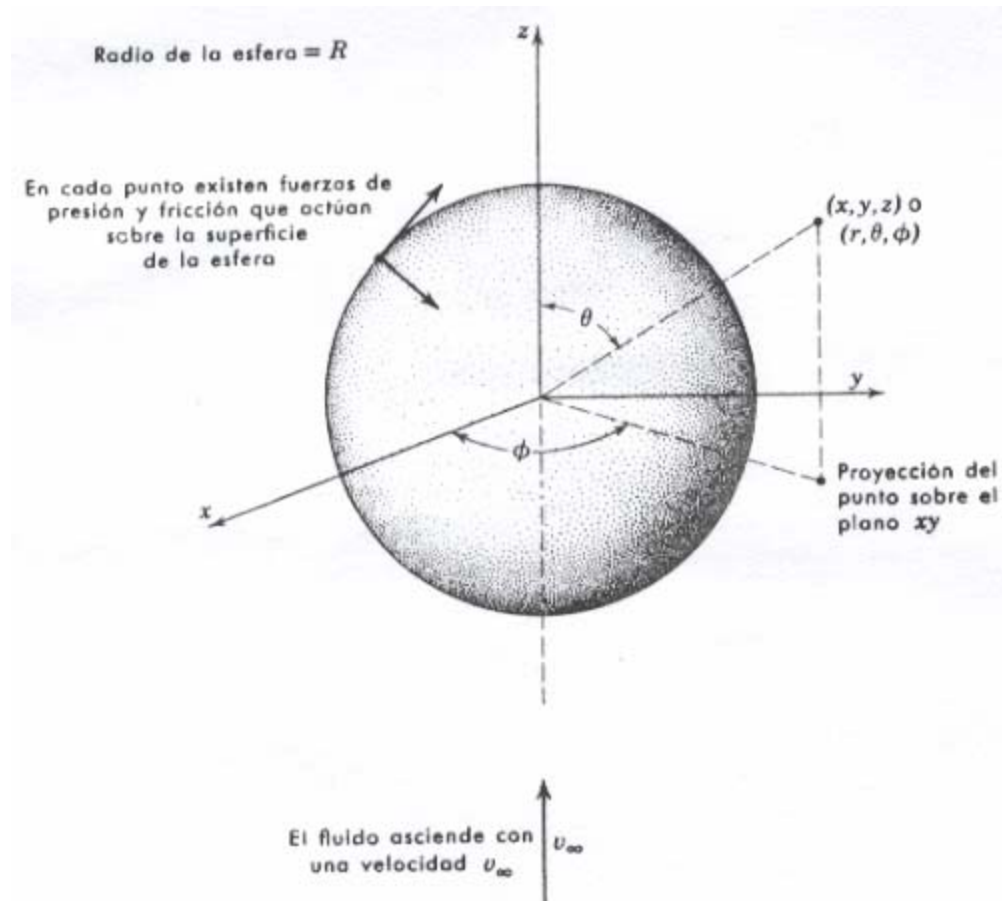


Fig.2.6-1. Sistema coordenado utilizado para describir el flujo de un fluido alrededor de una esfera rígida.

Integración de la fuerza normal

En cada punto de la superficie esférica existe una presión sobre el sólido que actúa perpendicularmente a la superficie. El componente z de esta presión es $-p \cos \theta$. Esta presión local se multiplica por el área de la superficie sobre la que actúa, $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, y se integra sobre la superficie esférica para obtener la fuerza resultante en la dirección z :

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-p|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.6-5)$$

La distribución de presión en la superficie de la esfera es

$$p|_{r=R} = \rho g R \cos \theta - (3/2) (\mu v_{\infty} / R) \cos \theta \quad (2.6-6)$$

Esta expresión se substituye en la integral de la Ec. 2.6-5. La integral que contiene p_o se anula, la de $-\rho g R \cos \theta$ da la fuerza de flotación del fluido sobre el sólido y la integral en que interviene la velocidad da la resistencia de forma. Por lo tanto, queda finalmente

$$F_n = (4/3)\pi R^3 \rho g + 2\pi\mu R v_\infty \quad (2.6-7)$$

Integración de la fuerza tangencial

En cada punto de la superficie existe también un esfuerzo cortante que actúa tangencialmente. Este esfuerzo, $\tau_{r\theta}$ es la fuerza que actúa en la dirección θ sobre la unidad de área de la superficie esférica. El componente z de esta fuerza, por unidad de área, es $(-\tau_{r\theta}) (-\sin\theta)$. Multiplicando por $R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ e integrando sobre la superficie de la esfera, se obtiene la fuerza resultante en la dirección z :

$$F_t = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (+\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.6-8)$$

La distribución del esfuerzo cortante en la superficie de la esfera, de acuerdo con la Ec. 2.6-1, es

$$\tau_{r\theta} \big|_{r=R} = (3/2) (\mu v_\infty / R) \sin\theta \quad (2.6-9)$$

Substituyendo esta expresión en la integral de la Ec. 2.6-8, se obtiene la «resistencia de fricción»

$$F_t = 4\pi\mu R v_\infty \quad (2.6-10)$$

Por lo tanto, la fuerza total F del fluido sobre la esfera, viene dada por la suma de las Ecs. 2.6-7 y 2.6-10:

$$F = \underbrace{(4/3)\pi R^3 \rho g}_{\text{(fuerza de flotación)}} + \underbrace{2\pi\mu R v_\infty}_{\text{(resistencia de forma)}} + \underbrace{4\pi\mu R v_\infty}_{\text{(resistencia de fricción)}} \quad (2.6-11)$$

o bien

$$F = (4/3)\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R v_\infty \quad (2.6-12)$$

El primer término del segundo miembro de la Ec. 2.6-12 representa el empuje y el segundo resulta como consecuencia del movimiento del fluido alrededor de la esfera. Para posteriores consideraciones, es conveniente designar estos dos términos por F_s (la fuerza que se ejerce aunque el fluido este en reposo) y F_k (la fuerza que resulta del movimiento del fluido, o sea, la contribución «cinética»); en el caso que estamos considerando, estas fuerzas son

$$F_s = (4/3)\pi R^3 \rho g \quad (2.6-13)$$

$$F_k = 6\pi\mu R v_\infty \quad (2.6-14)$$

La Ec. 2.6-14 es la conocida *ley de Stokes*. Se aplica en el movimiento de partículas coloidales por efecto de un campo eléctrico, en la teoría de sedimentación, y en el estudio del movimiento de partículas de aerosoles. Téngase en cuenta que la ley de Stokes es válida para números de Reynolds (basados en el diámetro de la esfera) inferiores a aproximadamente 0,1; para $Re = 1$, la ley de Stokes predice una fuerza resistente que es un

10 por ciento menor. El comportamiento de este mismo sistema para números de Reynolds más elevados se estudia en el Capítulo 6. Este problema indica que cuando las líneas de corriente son curvas es preciso desarrollar una formulación más general de la mecánica de fluidos, tal como se presenta en el Capítulo 3.

Ejemplo 2.6- 1. Determinación de la viscosidad a partir de la velocidad final de caída de una esfera

Deducir una relación que permita obtener la viscosidad de un fluido mediante la velocidad de caída en estado estacionario de una esfera en el seno de un fluido.

Solución. Si una esfera, inicialmente en reposo, se deja caer en un fluido viscoso, adquiere un movimiento acelerado hasta que alcanza una velocidad constante (final). Cuando se alcanza este estado, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero. La fuerza de gravedad actúa sobre el sólido en la dirección de la caída, y el empuje y la fuerza debida al movimiento actúan en sentido contrario:

$$(4/3)\pi R^3 \rho_s g = (4/3)\pi R^3 \rho g + 6\pi \mu v_t R \quad (2.6-15)$$

En esta expresión. R es el radio de la esfera, ρ_s la densidad de la esfera, ρ la densidad del fluido, y v_t la «velocidad final». Despejando μ de la Ec. 2.6 -15, se obtiene

$$\mu = 2R^2(\rho_s - \rho)g/9v_t \quad (2.6-16)$$

Este resultado es válido solamente cuando $Dv_t\rho/\mu$ es menor que aproximadamente 0,1.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Cuál es la definición de derivada primera y cómo se utiliza esta definición en relación con los balances aplicados a una envoltura?
2. Comparar la variación de τ_{rz} con r para el flujo laminar de un fluido en un tubo y en tubos concéntricos.
3. ¿Cuál es la ley de Hagen-Poiseuille y a qué se debe su importancia? Comprobar su consistencia dimensional.
4. ¿Qué es el número de Reynolds? ¿Cuáles son sus dimensiones?
5. Para el flujo en tubos concéntricos, ¿cuál de las dos paredes, interior o exterior, está más próxima a la superficie donde la densidad de flujo de cantidad de movimiento es cero?
6. ¿Qué limitaciones se han hecho en la deducción de la fórmula que da el espesor de una película descendente?
7. ¿Cuál es el significado físico de las cuatro condiciones límite que son necesarias para determinar las cuatro constantes de integración en § 2.5?
8. ¿Cuál es el intervalo de validez de la ley de Stokes?
9. ¿Es de esperar que la ley de Stokes sea válida para el descenso de las gotitas de un líquido A en el seno de un medio líquido inmiscible B?
10. ¿Se cumplirá la ley de Stokes para el descenso de diminutas partículas en aire, si el diámetro de las partículas es del orden del recorrido libre medio de las moléculas del aire?

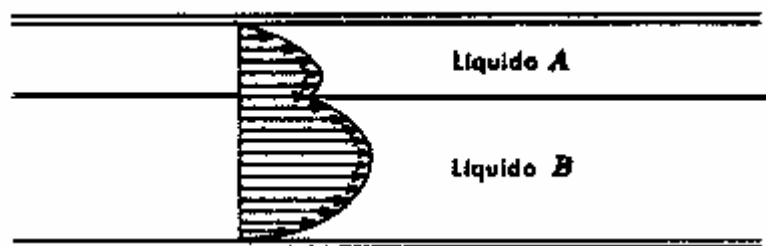
11. En §2.6, F_s y F_k deberían en realidad de tratarse como magnitudes vectoriales. ¿Cómo se modificaría la Ec. 2.6 -12 si la dirección de flujo del fluido no fuese exactamente contraria a la aceleración de la gravedad?

12. ¿Cómo se elige la forma y la orientación del elemento de volumen utilizado para aplicar un balance de envoltura?

13. ¿En qué lugar de la deducción efectuada en § 2.3 habría que comenzar a introducir modificaciones, si (a) el coeficiente de viscosidad fuese una función de r (debido a condiciones no isotérmicas, por ejemplo); (b), el fluido fuese no-newtoniano?

14. Discútanse las dificultades de medida implícitas en la determinación de viscosidades absolutas mediante la fórmula de Hagen-Poiseuille. Estúdiense los efectos relativos que sobre el resultado ejerce un error de un 1 por ciento en las distintas medidas.

15. Dos líquidos inmiscibles A y B fluyen con movimiento laminar entre dos láminas planas paralelas. ¿Sería posible que los perfiles de velocidad fuesen de la siguiente forma? (Explíquense brevemente las razones de la respuesta.)



16. ¿Cuál es la velocidad final en un campo eléctrico de intensidad ϵ , de una partícula coloidal esférica que posee una carga e ? (admítase que se cumple la ley de Stokes.)

PROBLEMAS

2.A₁ Determinación del radio de un capilar mediante medidas de flujo

Uno de los métodos para determinar el radio de un tubo capilar consiste en medir la velocidad de flujo de un fluido viscoso a través del tubo. Hallar el radio de un capilar a partir de los siguientes datos:

Longitud del capilar	= 50,02 cm
Viscosidad cinemática del fluido	= $4,03 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$
Densidad del fluido	= $0,9552 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Caída de presión a través del tubo capilar (horizontal)	= $4,829 \times 10^5 \text{ newtons m}^{-2}$ = 4,766 atm.
Velocidad de flujo de masa a través del tubo	= $2,997 \times 10^{-3} \text{ kg seg}^{-1}$

¿Cuál es el principal inconveniente de este método? Sugieranse algunos otros métodos de determinación del radio de tubos capilares.

Respuesta: 0,7512 mm.

2.B₁ Velocidad volumétrica de flujo a través de un anillo circular

Un anillo circular horizontal tiene una longitud de 8,23 m. El radio externo del cilindro interior es de 1,257 cm y el radio interno del cilindro exterior es de 2,794 cm. Mediante una bomba se hace circular a través del conducto anular una solución acuosa de sacarosa {C₁₂H₂₂O₁₁) al 60 por ciento a 20° C La densidad del fluido es de 1,286 g cm⁻³ y su viscosidad 56.5 cp. ¿cuál es la velocidad volumétrica de flujo cuando se le comunica una diferencia de presión de 0,379 kg cm⁻²?

Respuesta: 3,06 X 10³ cm³ seg⁻¹.

2.C₁ Pérdida de partículas catalíticas en un gas de escape

a. Determinar el diámetro máximo de las partículas de un catalizador constituido por microesferas, que pueden perderse en el gas que va a la chimenea en una unidad de cracking de un fluido, en las siguientes condiciones:

Velocidad del gas en el eje de la chimenea = 30,5 cm seg⁻¹ (verticalmente hacia arriba)

Viscosidad del gas = 0,026 cp

Densidad del gas = 7,21 X 10⁻⁴ g cm⁻³

Densidad de una
partícula del catalizador = 1,2 g cm⁻³

Expresar el resultado en micrones {1 micrón = 10⁻⁶ cm}

b. ¿Se puede utilizar la ley de Stokes en el caso (a)?

Respuesta: D_{máx} = 110 micrones; Re = 0,93.

2.D₂ Flujo de una película descendente. Otras deducciones

a. Deducir el perfil de velocidad y la velocidad media, situando el origen de coordenadas de forma que (se mida a partir de la pared {es decir, x= 0 corresponde a la pared y x=δ a la superficie libre de la película). Demostrar que la distribución de velocidad viene dada por

$$v_s = (\rho g \delta^2 / \mu) \cos \beta [(x/\delta) - \frac{1}{2} (x/\delta)^2] \quad (2.D-1)$$

y que la velocidad media es la que se expresa en la Ec. 2.2-18. Demostrar como se puede llegar a la distribución de velocidad de la Ec. 2.D -1 a partir de la Ec. 2.2 -16:

b. En los problemas de este capítulo se ha seguido el procedimiento siguiente: {i) deducir una ecuación diferencial de primer orden para la densidad de flujo de cantidad de movimiento, (ii) integrar esta ecuación, (iii) introducir en este resultado la ley de newton con el fin de obtener una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad, (iv) integrarla para obtener la distribución de la velocidad. Otro procedimiento consiste en, (i) deducir una ecuación diferencial de primer orden para la densidad de flujo de cantidad de movimiento, (ii) substituir la ley de Newton en esta ecuación diferencial de segundo orden para la velocidad, (iii) integrar esta ecuación con el fin de obtener la distribución de velocidad. Aplicar este procedimiento, substituyendo la Ec. 2.2-12 en la Ec. 2.2-8, y continuar en la forma que se ha indicado, hasta obtener la distribución de la velocidad.

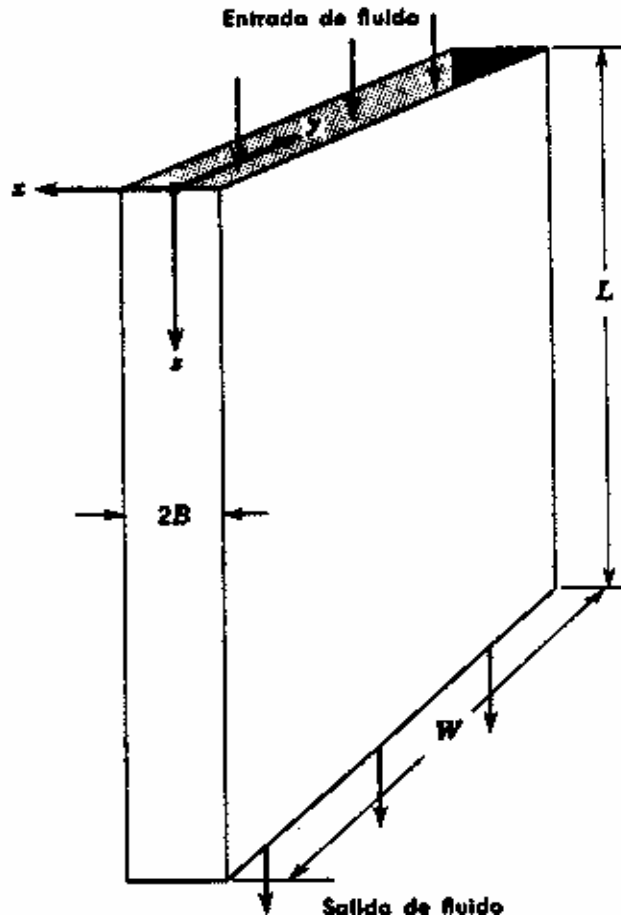


Fig.2E. Flujo a través de una rendija.

2.E₂ Flujo laminar en una rendija estrecha.

Un fluido viscoso circula con flujo laminar por una rendija formada por dos paredes planas separadas a una distancia $2B$. Efectuar un balance diferencial de cantidad de movimiento y obtener las expresiones para las distribuciones de densidad del flujo de cantidad de movimiento y de velocidad.(véase Fig.2.E.):

$$\tau_{xz} = (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L / L) x \quad (2.E-1)$$

$$v_z = (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) B^2 / 2\mu L (1 - (x/B)^2) \quad (2.E-2)$$

en las que $\mathcal{P} = p + \rho gh = p - \rho gz$ ¿Cuál es la relación de la velocidad media a la máxima en la rendija? Obtener la ecuación análoga a la de Hagen-Poiseuille para la rendija.

$$\text{Respuesta: } \langle v_z \rangle = 2/3 v_{z \text{ máx}}; \quad Q = \frac{2/3 (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) B^3 W}{\mu L}$$

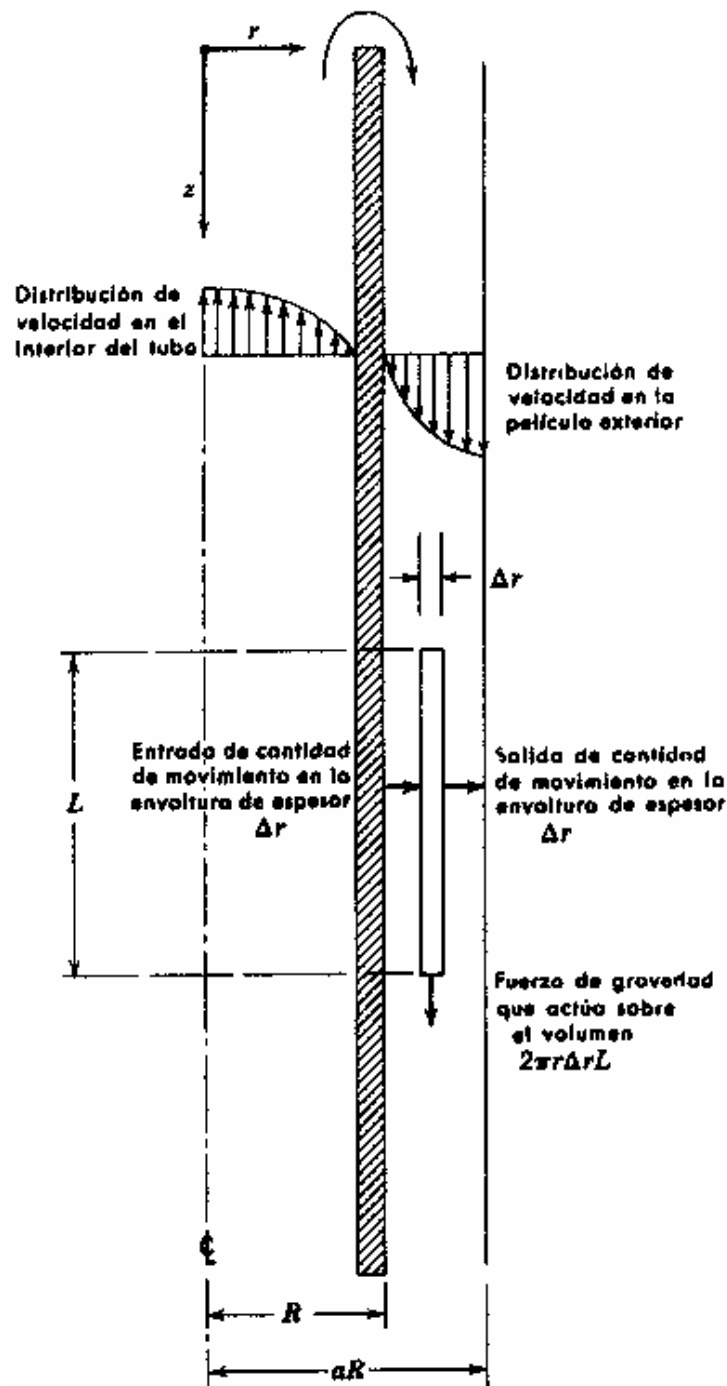


Fig. 2.G. Distribuciones de velocidad y balance de cantidad de movimiento, para una película que asciende por el exterior de un tubo capilar.

2.F₂ Relación entre las fórmulas de la rendija y del anillo circular

Cuando un anillo es muy delgado puede considerarse muy aproximadamente, como una rendija estrecha. Por consiguiente, se pueden aplicar los resultados del problema 2.E. Por ejemplo, a partir del problema 2.E, es posible obtener la velocidad volumétrica de flujo

en un anillo cuyo radio de la pared externa es R y el de la interna $(1-\epsilon) R$. siendo ϵ pequeño, tomando $2B$ igual a ϵR y W igual a $2\pi R$, con lo que,

$$Q = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^4\epsilon^3}{6\mu L} \quad (2.F-1)$$

Demostrar que se obtiene el mismo resultado a partir de la Ec. 2.4 -16, tomando para K el valor $1-\epsilon$ y desarrollando la expresión de Q en potencias de ϵ . Esta operación requiere el uso de la serie de Taylor.

$$\ln(1-\epsilon) = -\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{3}\epsilon^3 - \frac{1}{4}\epsilon^4 - \dots \quad (2.F-2)$$

y efectuar después una división. (Nota: Utilizar en la deducción los cuatro primeros términos de la serie de Taylor de la Ec. 2.F -2.)

2.G₂ Flujo laminar en una película que desciende por el exterior de un tubo circular

En una experiencia de absorción de gases, un fluido viscoso asciende por el interior de un pequeño tubo circular, para descender después por la parte exterior del mismo. (Véase Fig. 2.G.) Aplicar un balance de cantidad de movimiento a una envoltura de película de espesor Δr , tal como se indica en la figura. Obsérvese que las flechas de «entrada de cantidad de movimiento» y, «salida de cantidad de movimiento» se toman siempre en la dirección r positiva a! efectuar el balance, aun cuando en este caso ocurre que la cantidad de movimiento fluye en la dirección r negativa.

a. Demostrar que la distribución de velocidad en la película descendente (despreciando los efectos finales) es

$$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu} (1 - (r/R)^2 + 2a^2 \ln(r/R)) \quad (2.G-1)$$

b. Obtener una expresión de la velocidad volumétrica de flujo en la película.

c. Demostrar que el resultado de (b) se transforma en la Ec. 2.2 -19 si el espesor de la película es muy pequeño.

2.H₂ Flujo no-newtoniano en un tubo

a. Deducir la fórmula análoga a la de Hagen-Poiseuille para el modelo de Ostwald de Waele (ley de la potencia). Al hacer la deducción debe de eliminarse primeramente el signo del valor absoluto. Como para el flujo en un tubo dv_z/dr es siempre negativo, la ley de la potencia se transforma en este caso en

$$\tau_{rz} = -m \left| dv_z/dr \right|^{n-1} dv_z/dr = m \left| -dv_z/dr \right|^{n-1} (-dv_z/dr) = m(-dv_z/dr)^n \quad (2.H-1)$$

Explicar cuidadosamente las transformaciones de la Ec. 2.H -I

b. Deducir una expresión de la velocidad volumétrica para el flujo en un tubo de un fluido de Ellis (véase Ec. 1.2-5):

$$-dv_z/dr = \phi_0 \tau_{rz} + \phi_1 |\tau_{rz}|^{\alpha-1} \tau_{rz} \quad (2.H-2)$$

2.I₂. Flujo de un fluido de Bingham en un tubo circular

Un tubo vertical está lleno de un fluido de Bingham y cerrado por el extremo inferior mediante una lámina. Al separar la lámina, el fluido puede salir o no del tubo por gravedad. (Véase la Fig. 2.I) Explíquese este hecho y establézcase un criterio de flujo para este experimento.

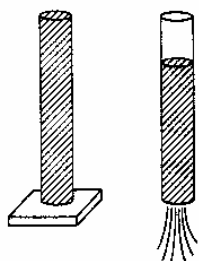


Fig. 2.I Flujo de un fluido de Bingham en un tubo circular

2.J₂. Flujo en tubos concéntricos con movimiento axial del cilindro anterior

Considerar el sistema representado en la Fig. 2.J, en el que la varilla cilíndrica se mueve con una velocidad V . La varilla y el cilindro son coaxiales. Hallar la distribución de velocidad en estado estacionario y la velocidad volumétrica de fluo. Este tipo de problemas se presentan en el recubrimiento de alambres de barniz.

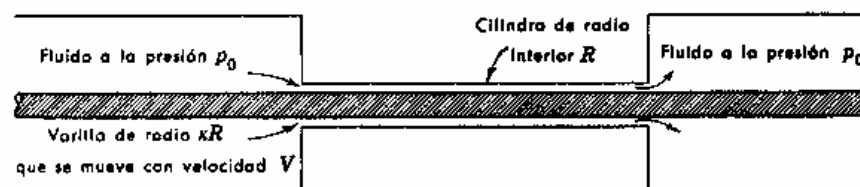


Fig. 2.J. Flujo en tubos concéntricos con movimiento axial del cilindro anterior.

$$\text{Respuesta: } \underline{v_z} = \frac{\ln(r/R)}{\ln k}; \quad Q = \frac{\pi R^2 V}{2} \left[\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} - 2k^2 \right]$$

2.K₂ Flujo no-newtoniano de una película

Deducir una fórmula para el espesor de una película de un fluido de Bingham descendiendo por una pared plana vertical con una velocidad I (g seg^{-1} por unidad de anchura de pared).

2.L₃ Análisis de un medidor de flujo capilar

Determinar la velocidad de flujo (en kg hr^{-1}) en el medidor de flujo capilar de la fig. 2.L. El fluido que circula por el tubo capilar es agua a 20°C , y como fluido manométrico se utiliza tetracloruro de carbono (CCl_4), cuya densidad es de $1,594 \text{ g cm}^{-3}$. El diámetro del capilar es $0,025 \text{ cm}$. (Obsérvese que para calcular la velocidad de flujo basta medir H y L ; es decir que no hace falta medir θ . ¿Por qué?)

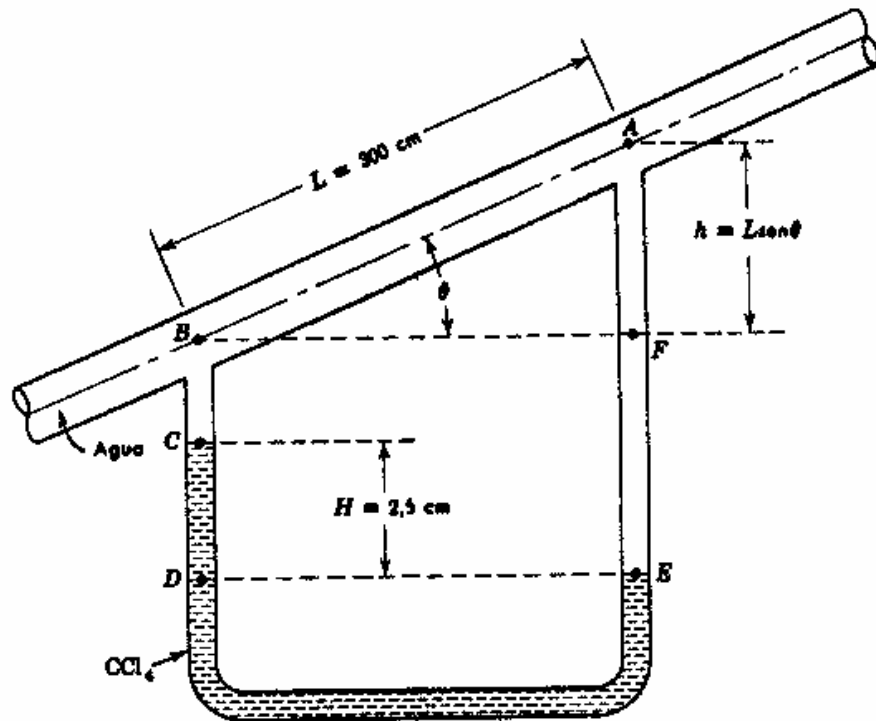


Fig. 2.L. Medidor de flujo capilar

2.M₃ Separador electrostático de polvo

Un separador de polvo consiste en dos láminas de cargas opuestas entre las cuales fluyen gases conteniendo el polvo (véase Fig. 2.M). Se desea establecer un criterio de la longitud L de separador en función de la carga de la partícula e , la intensidad del campo eléctrico ε , la diferencia de presión ($p_0 - p_L$), la masa de la partícula m y la viscosidad del gas μ . Es decir, para que longitud L habrá alcanzado la partícula más pequeña (mala m) la lámina inferior, exactamente antes de que pueda ser arrastrada fuera del canal ?

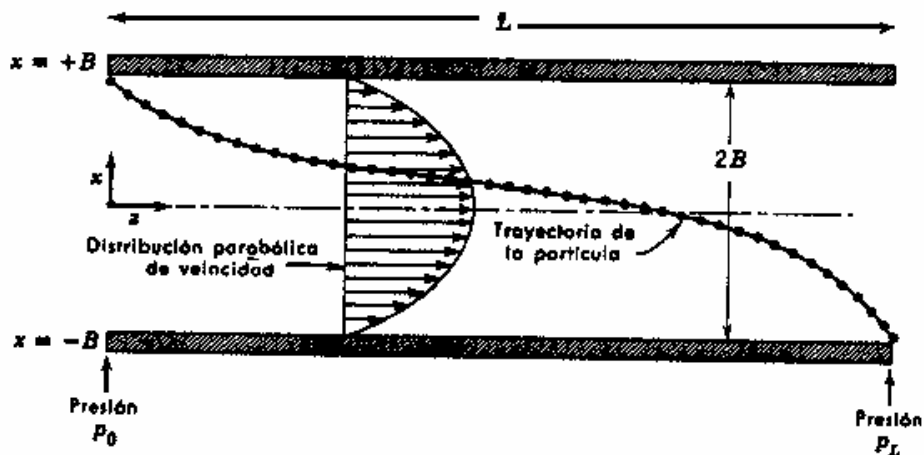


Fig.2M. Trayectoria de una partícula en n colector eléctrico de polvo.

Supóngase que el flujo es laminar entre las dos placas, de forma que la Ec. 2.E -2 describe la distribución de velocidad. Supóngase también que la velocidad de la partícula en la dirección z es la misma que la del fluido en esa dirección. Admítase finalmente que tanto la resistencia de Stokes sobre la esfera, como la fuerza de gravedad que actúa sobre la partícula, que es acelerada en la dirección $-x$, pueden despreciarse.

$$\text{Respuesta: } L_{\min} = [64 (p_O - p_L)^2 B^3 m / 225 \mu^2 e \varepsilon]^{1/4}$$

2.N₃ Flujo en un tubo con deslizamiento en la pared

Obtener una modificación de la ley de Hagen-Poiseuille suponiendo que hay deslizamiento del fluido en la pared del cilindro. Es decir, que en vez de admitir que $v_z = 0$ para $r = R$, utilizar la condición límite de que

$$\beta v_z = -\mu (dv_z/dr) \quad \text{at } r = R \quad (2.N-1)$$

en la que β es el «coeficiente de fricción deslizante». (¿cuál es el significado físico de $\beta = \infty$?) En la mayor parte de los problemas de flujo de fluidos el deslizamiento carece de importancia. Sin embargo, se ha utilizado la solución obtenida para el flujo con deslizamiento alrededor de esferas, en las "teoriza hidrodinámicas" de difusión. Por otra parte, el deslizamiento es importante en algunos problemas de flujo no-newtoniano.

2.O₄. Deducción de la ecuación de Rabinowitsch

Mediante la ecuación de Rabinowitsch, puede obtenerse una representación gráfica de la densidad de flujo de cantidad de movimiento frente al gradiente de velocidad (véase Fig. 1.2-1) para cualquier fluido, a partir de datos experimentales de la pérdida de presión para diversas velocidades de flujo, en el flujo laminar isotérmico de un fluido a través de tubos circulares. Las únicas suposiciones que es preciso hacer consisten en que el fluido es total mente homogéneo y que no existe deslizamiento en la pared.

a. Demostrar que la integral correspondiente a la velocidad volumétrica de flujo puede integrarse por partes para obtener

$$Q = -\pi \int_0^R \frac{dv_z}{dr} r^3 dr \quad (2.O-1)$$

b. Efectuar el siguiente cambio de variable $r/R = \tau_{rz} / \tau_R$ (siendo $\tau_R = (P_O - P_L)R/2L$ la densidad de flujo de cantidad de movimiento en la pared, $r = R$), y escribir de nuevo la integral del apartado (a) en función de la variable de integración τ_{rz} .

c. Diferenciar la integral del apartado (b) con respecto a τ_R para obtener la ecuación de Rabinowitsch,

$$\left(-\frac{dv_z}{dr} \right)_{r=R} = \frac{1}{\pi R^3 \tau_R^2} \frac{d}{d\tau_R} (\tau_R^3 Q) \quad (2.O-2)$$

Explíquese cómo puede utilizarse esta ecuación para obtener la curva de τ_{rz} frente a $(-dv_z/dr)$

2.P₄ Relación mutua entre los perfiles de velocidad en una rendija y en tubos concéntricos

Demostrar que la distribución de velocidad en tubos concéntricos, Ec. 2.4 -13, es la misma que en una rendija (véase Ec. 2.E-2) cuando k se mantiene constante y R se hace muy grande.

2.Q₄ Flujo no-newtoniano en tubos concéntricos

Deducir la ecuación de la velocidad volumétrica de flujo para un fluido de Bingham que circula en un espacio anular, utilizando la notación que se ha introducido en § 2.4 y en el ejemplo 2.3-2. Utilizar los siguientes números adimensionales:

$$\begin{aligned} T &= 2\tau_{rz} L / (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R &&= \text{densidad de flujo de cantidad de movimiento adimensional} \\ T_0 &= 2\tau_0 L / (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R &&= \text{parámetro reológico adimensional} \\ \phi &= (2\mu_0 L / (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^2) v_z &&= \text{velocidad adimensional} \\ \xi &= r/R &&= \text{coordenada radial adimensional} \end{aligned}$$

Demostrar que la distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento y la ley reológica, pueden expresarse de esta forma

$$T = \xi - \lambda^2 \xi^{-1} \quad (2.Q-1)$$

$$T = \pm T_0 - \frac{d\phi}{d\xi} \quad (2.Q-2)$$

Demostrar que los límites λ_+ y λ_- de la región de flujo de tapón vienen dados por

$$\pm T_0 = \lambda_{\pm} - \frac{\lambda_{\pm}^2}{\lambda_{\pm}} \quad (2.Q-3)$$

y que λ es justamente la media geométrica de λ_+ y λ_- . Obtener la distribución de velocidad para los tres intervalos:

$$\begin{aligned} \phi_- &\text{ para el intervalo } k \leq \xi \leq \lambda_- \\ \phi_0 &\text{ para el intervalo } \lambda_- \leq \xi \leq \lambda_+ \\ \phi_+ &\text{ para el intervalo } \lambda_+ \leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

Integrando después sobre la distribución de velocidad, se obtiene la velocidad volumétrica de flujo:

$$Q = \frac{\pi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^4}{8\mu_0 L} [(1 - k^4) - 2\lambda^2(1 - k^2) - 4/3(1 - k^3) T_0 + 1/3(4\lambda^2 + T_0^2)^{3/2} T_0] \quad (2.Q-4)$$

Utilizar la “fórmula de Leibnitz”, para la diferenciación de una integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} f(x, t) dx = \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left(f(a_2, t) \frac{da_2}{dt} - f(a_1, t) \frac{da_1}{dt} \right)$$

¿Cómo se determina λ ? La distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento en tubos concéntricos, ¿es igual para el flujo no-newtoniano que para el newtoniano?

2.R.4. Esguerrimiento de líquidos

Se desea conocer la cantidad de líquido que queda retenido sobre la superficie interna de un vaso grande cuando se vacía. En la Fig. 2.R se indica lo que ocurre en las proximidades de la pared del vaso. El espesor local de la película es una función de z y t .

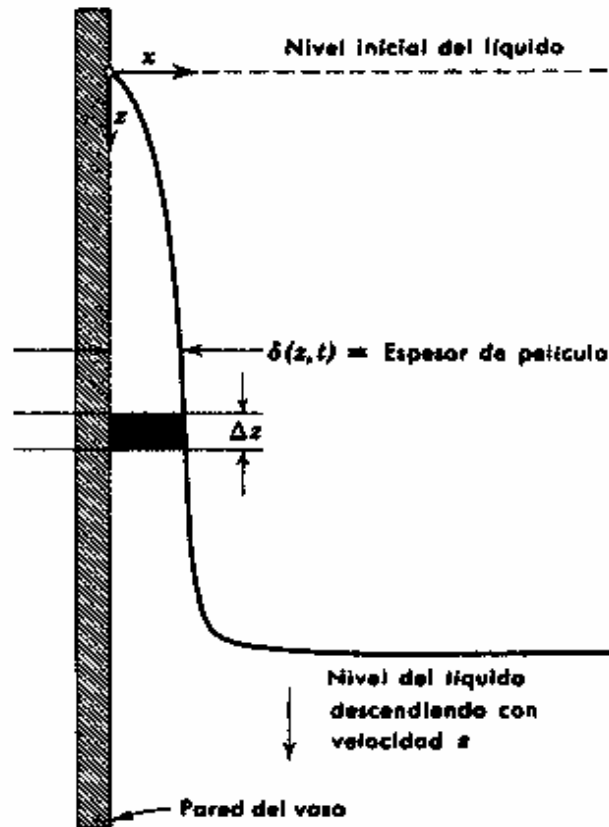


Fig.2.R. Adherencia de un líquido viscoso a las paredes de un vaso durante el vaciado.

a. Aplicar un balance no estacionario de materia a un elemento de película comprendido entre z y $z + \Delta z$ y demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle v_z \rangle \delta = -\frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (2.R-1)$$

b. Utilizar la Ec. 2.2-18 con el fin de obtener la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden para $\delta(z, t)$:

$$-\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\rho \delta^2}{\mu} \frac{\partial \delta}{\partial z} = 0 \quad (2.R-2)$$

¿Qué suposiciones son inherentes a la Ec. 2.R-2?

c. Demostrar que resolviendo la Ec. 2.R-2 se obtiene

$$\delta = \sqrt{(\mu/\rho g) (z/t)} \quad (2.R-3)$$

¿Qué restricciones deben ponerse a este resultado?

2.S₃ Flujo de grasas no-newtonianas a través de tubos

Se ha supuesto el siguiente modelo para el estudio del flujo de grasas no-newtonianas en tubos circulares:

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= a \left(-\frac{dv_s}{dr} \right) + b \left(-\frac{dv_s}{dr} \right)^n \\ &= a\gamma + b\gamma^n\end{aligned}\quad (2.S-1)$$

Demostrar que la expresión para la velocidad volumétrica de flujo Q , puede obtenerse por el siguiente procedimiento:

a. Demostrar que la expresión general de Q puede integrarse dos veces por partes para obtener

$$Q = \frac{\pi R^4 \gamma_R}{3} - \frac{\pi}{3} \int_0^{\gamma_R} r^3 d\gamma \quad (2.S-2)$$

En la que $\gamma_R = (-dv_z/dv_r)|_{r=R}$

b. Demostrar que r puede expresarse en función de γ , de la siguiente forma:

$$r = \frac{R}{\tau_z} (a\gamma + b\gamma^n) \quad (2.S-3)$$

c. Demostrar que substituyendo la Ec. 2.S-3 en la integral de la Ec. 2.S-2 y aplicando la condición límite conveniente, se obtiene finalmente

$$Q = \frac{\pi R^3 a^3 \gamma_R^4}{4\tau_R^3} \left\{ 1 + 4 \left[\left(\frac{n+2}{n+3} \right) X + \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right) X^2 + \left(\frac{n}{3n+1} \right) X^3 \right] \right\} \quad (2.S-4)$$

siendo $X = (b/a)(\gamma_R^{n-1})$, y γ_R una función implícita de τ_R :

$$\tau_R = a\gamma_R + b\gamma_R^n \quad (2.S-5)$$

2.T₃ Una expresión integral para la distribución de velocidad en un tubo

Hemos recibido del editor de una revista profesional un trabajo para revisar. Este trabajo trata del transporte de calor para el flujo en un tubo. Los autores establecen que como han operado con flujo no isotérmico, deben de obtener una expresión “general” para la distribución de velocidad, que puede utilizarse aun cuando la viscosidad del fluido sea una función de la temperatura (y por tanto de la posición). Indican que “una expresión general de la distribución de velocidad para el flujo en un tubo” es

$$\frac{v_z}{\langle v_z \rangle} = \int_y^1 \frac{y}{\mu} dy / \int_0^1 \frac{y^3}{\mu} dy \quad (2.T-1)$$

en la que $\langle v_z \rangle$ es la velocidad media de flujo, y es la coordenada radial reducida (esto es, r/R), y μ es la viscosidad (que puede variar con γ). No deducen su fórmula ni dicen dónde puede encontrarse en la bibliografía. Como censores del trabajo, estamos obligados a (a) deducir la fórmula que indican, y (b) establecer las restricciones que estén implícitas en dicha fórmula.

CAPÍTULO 3

LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS ISOTÉRMICOS

En el Capítulo 2 se han determinado las distribuciones de velocidad para varios sistemas sencillos de flujo, aplicando balances de cantidad de movimiento a una envoltura. Estas distribuciones de velocidad se utilizaron después para calcular otras magnitudes, tales como la velocidad media y la fuerza resistente. El método del balance aplicado a una envoltura se utilizó con el fin de familiarizar al principiante con la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en los problemas de flujo viscoso. Sin embargo, no es necesario formular un balance de cantidad de movimiento siempre que se comienza a trabajar con un nuevo problema de flujo. Es más rápido, más fácil, y más seguro, partir de las ecuaciones de conservación de la materia y la cantidad de movimiento, expresadas en la forma general, y simplificarlas con el fin de adaptarlas al problema de que se trate. Estas dos ecuaciones describen todos los problemas de flujo viscoso isotérmico de un fluido puro. Para fluidos no isotérmicos y para mezclas fluidas de varios componentes, se necesitan ecuaciones adicionales para describir la conservación de la energía (Capítulo 10) y la conservación de las especies químicas individuales (Capítulo 18). Estas distintas ecuaciones de conservación se denominan a veces ((ecuaciones de variación», ya que describen la variación de la velocidad, temperatura y concentración, con respecto al tiempo y la posición en el sistema.

En § 3.1 se desarrolla la (ecuación de continuidad», mediante la aplicación de la ley de la conservación de la materia a un pequeño elemento de volumen situado en el seno de un fluido en movimiento. El principio de la conservación de la materia se ha aplicado ya, tácitamente, en el Capítulo 2; por ejemplo, mediante el se justifica la suposición de que la velocidad es independiente de la distancia axial en el problema de Hagen-Poiseuille. Ya veremos que para sistemas más complejos interesa un planteamiento más general de este principio.

En § 3.2 se introduce la segunda ecuación de variación, la «ecuación de movimiento», que es una generalización del balance de cantidad de movimiento del Capítulo 2. Con esta ecuación y la de continuidad, se pueden resolver todos los problemas del Capítulo 2, y muchos otros bastante más complicados.

En § 3.3 se utiliza la ecuación de movimiento para deducir una expresión que describe la interconversión de las distintas formas de la energía mecánica de un fluido en movimiento. Esta ecuación es particularmente útil para describir la degradación de la energía mecánica en energía calorífica, que acompaña a todos los procesos reales de flujo. También es la base del importante balance macroscópico de energía mecánica, o ecuación de Bernoulli, que se estudia en el Capítulo 7.

En las tres primeras secciones, las deducciones se obtienen en coordenadas rectangulares. Sin embargo, para muchos problemas resulta mas conveniente utilizar coordenadas cilíndricas o esféricas. En § 3.4 se trata brevemente el tema de las coordenadas curvilíneas, a la vez que se presenta un resumen de numerosas relaciones importantes, expresadas en los tres sistemas de coordenadas. El lector podrá comprobar que esta tabulación reduce el arte de plantear problemas de flujo viscoso a casi un simple procedimiento de «recetario de cocina». Los ejemplos que se presentan en § 3.5 ilustran sobre la aplicación del método a la resolución de algunos problemas de flujo laminar.

En § 3.6 se extienden al flujo no-newtoniano las materias expuestas en las cinco secciones precedentes. El punto principal que se aborda aquí es el método adecuado para expresar la densidad de flujo de cantidad de movimiento en diversos modelos no-newtonianos, de forma que pueda transformarse en coordenadas curvilíneas.

En la última sección de este capítulo, § 3.7, se presentan las ecuaciones de variación en función de variables adimensionales. Al escribir en esta forma las ecuaciones, se reúnen los «factores de escala» (es decir, tamaño del sistema, velocidad media del fluido, y propiedades del mismo) en un corto número de relaciones adimensionales que resultan útiles para caracterizar los sistemas de flujo. En este capítulo veremos cómo pueden utilizarse estas relaciones adimensionales para efectuar estudios empíricos con un modelo a escala reducida, que permite un análisis de los sistemas demasiado complejos. En el Capítulo 6 se amplían estas ideas para la correlación empírica de la fuerza de resistencia en sistemas complejos.

En este capítulo se utiliza, ocasionalmente, la notación vectorial y tensorial, con el fin primordial de abreviar expresiones que resultarían de otra forma demasiado largas. El principiante vera que no es preciso un conocimiento matemático de vectores y tensores para utilizar el resumen de § 3.4 en la resolución de problemas. Al estudiante adelantado le resultara sutil el apéndice A para conocer algunos detalles sobre el manejo de vectores y tensores.

En muchos aspectos, el Capítulo 3 es el más importante del libro, puesto que facilita el camino para todo lo que sigue. El lector que lo conozca a fondo antes de continuar, se vera recompensado de su esfuerzo.

Antes de entrar en el tema principal del capítulo, vamos a detenernos brevemente para hacer algunos comentarios acerca de los tres tipos de derivadas con respecto al tiempo que se utilizan en el texto. Para ilustrar esto utilizaremos un ejemplo casero, como es el problema de referir la concentración de peces en el río Kickapoo. Puesto que los peces se están moviendo, su concentración c será una función de la posición (x, y, z) y del tiempo (t) .

Derivada parcial con respecto al tiempo, $\partial c / \partial t$

Supongamos que estamos sobre un puente y observamos cómo varía la concentración de peces exactamente debajo de nosotros con el tiempo. Estamos, pues, observando cómo varía la concentración con el tiempo, para una posición *fija* en el espacio. De acuerdo con esto, $\partial c / \partial t$ indica la «parcial de c con respecto a t , manteniendo constantes x, y, z ».

Derivada total con respecto al tiempo, dc/dt

Supongamos ahora que en vez de estar sobre el puente, vamos en una lancha a motor que se mueve en el río en todas direcciones, unas veces en contra de la corriente, otras a través, y tal vez otras a favor de la corriente. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números que resultan han de reflejar también el movimiento de la lancha. La derivada total con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.0-1)$$

en la que dx/dt , dy/dt y dz/dt son los componentes de la velocidad de la lancha.

Derivada substancial con respecto al tiempo, Dc/Dt .

Supongamos que vamos en una canoa a la que no se comunica energía, sino que simplemente flota. En este caso, la velocidad del observador es exactamente la misma que la velocidad de la corriente 17. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números dependen de la velocidad local de la corriente. Esta derivada es una clase especial de derivada total con respecto al tiempo que se denomina «derivada substancial» o, a veces (más lógicamente), «derivada siguiendo el movimiento». Esta relacionada con la derivada parcial con respecto al tiempo de la forma siguiente:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (3.0 -2)$$

en la que v_x , v_y y v_z , son los componentes de la velocidad local del fluido v .

El lector deberá de entender perfectamente el significado físico de estas tres derivadas. Reacuérdesse que $\partial c / \partial t$ es la derivada para un punto fijo en el espacio y Dc/Dt es la derivada calculada por un observador que flota corriente abajo con el fluido.

§ 3.1 LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Esta ecuación se deduce aplicando un balance de materia a un elemento *estacionario* de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, a través del que está circulando el fluido (véase Fig. 3.1-1):

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{velocidad de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{materia} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{velocidad} \\ \text{de entrada} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{materia} \end{array} \right\} \quad (3.1-1)$$

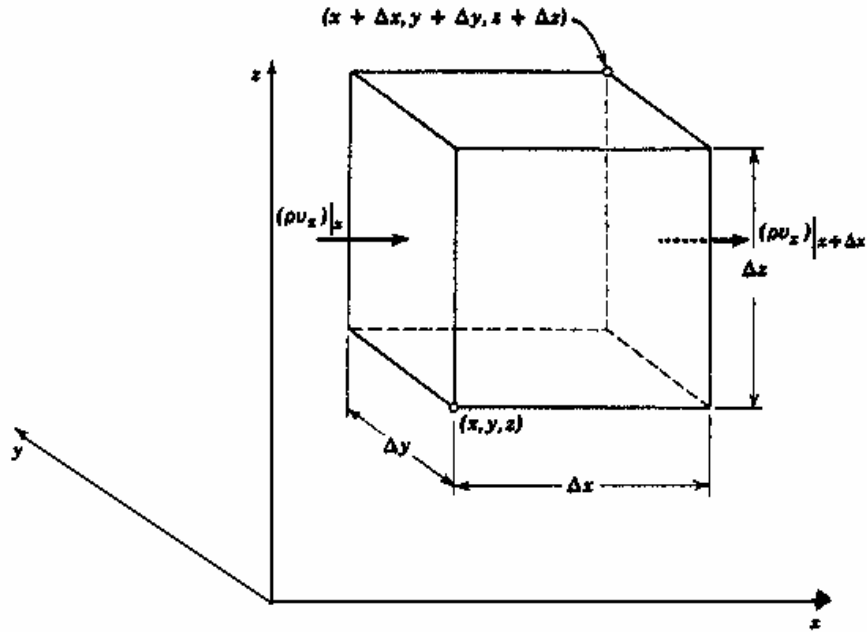


Fig. 3.1 -1. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ fija en el espacio, a través de la cual está circulando un fluido.

Comenzamos considerando el par de caras perpendiculares al eje x . La velocidad de entrada de materia a través de la cara x es $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad de salida de materia a través de la cara $x + \Delta x$ es $(\rho v_x)|_{x + \Delta x} \Delta y \Delta z$. Para los otros dos pares de caras pueden escribirse expresiones análogas. La velocidad de acumulación de materia en el elemento de volumen es $(\Delta x \Delta y \Delta z) (\partial \rho / \partial t)$. El balance de materia queda por tanto

$$\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho / \partial t) = \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x + \Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y + \Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z + \Delta z}] \quad (3.1-2)$$

Dividiendo toda la ecuación por $(\Delta x \Delta y \Delta z)$, y tomando límites cuando estas dimensiones tienden a cero, se tiene

$$\partial \rho / \partial t = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) \quad (3.1-3)$$

Esta es la *ecuación de continuidad*, que describe la variación de la densidad para un punto fijo, como consecuencia de las variaciones del vector de velocidad másica $\rho \mathbf{v}$. La Ec. 3.1- 3 puede escribirse en una forma más conveniente utilizando notación vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (3.1-4)$$

El termino $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$ se denomina «divergencia» de $\rho \mathbf{v}$, y a veces se escribe $\text{div. } \rho \mathbf{v}$. Véase que el vector $\rho \mathbf{v}$ es la densidad de flujo de materia y que su divergencia tiene un significado sencillo: representa la velocidad neta con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen. Por lo tanto, la Ec. 3.1-4 establece simplemente que la velocidad con que aumenta la densidad en el interior de un pequeño elemento de volumen fijo en el espacio, es igual a la velocidad neta de entrada de densidad de flujo de materia en el elemento dividida por su volumen.

Generalmente, es preferible modificar la ecuación 3.1- 3, efectuando la diferenciación que esta indicada y reuniendo todas las derivadas de ρ en el primer miembro:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.1-5)$$

El primer miembro de la Ec. 3.1-5 es la derivada substancial de la densidad, es decir, la derivada con respecto al tiempo *para un recorrido que sigue el movimiento del fluido*. De acuerdo con esto, la Ec. 3.1- 5 puede expresarse abreviadamente en esta forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3.1-6)$$

en la que el operador D/Dt esta definido por la Ec. 3.0-2. La ecuación de continuidad, expuesta en esta forma, describe la velocidad de variación de la densidad, tal como la ve un observador que «flota» con el fluido.

Reacuérdesse que esta ecuación es sencillamente una formulación de la conservación de la materia. Es preciso señalar que la deducción puede efectuarse igualmente para un elemento de volumen de una forma arbitraria cualquiera, y no esta por lo tanto restringida para el caso del elemento paralelepédico que se ha presentado aquí.

¹ Téngase en cuenta que ∇ tiene las dimensiones del inverso de una longitud.

Una forma especial muy importante de la ecuación de continuidad, que se utilizara posteriormente, es la correspondiente a un fluido de densidad constante, para el que

$$(\text{fluido incompresible}) \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1-7)$$

Aunque en realidad ningún fluido es total mente incompresible, en la practica se puede admitir con mucha frecuencia que la densidad es constante, con lo que se obtiene una considerable simplificación, sin cometer casi error. Obsérvese que para que la Ec. 3.1 -7 sea válida, sólo es necesario que ρ permanezca constante para un elemento de fluido que se mueva a lo largo de una línea de corriente, es decir, que $D\rho/Dt$ sea cero.

§ 3.2 LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, como el utilizado en la sección anterior, se puede escribir el siguiente balance de cantidad de movimiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{suma de las} \\ \text{fuerzas que} \\ \text{actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} \quad (3.2-1)$$

Obsérvese que la Ec. 3.2-1 corresponde exactamente a una ampliación de la ecuación 2.1-1 para sistemas en estado no estacionario. Por consiguiente, podemos proceder, en muchos aspectos, de igual forma que en el Capítulo 2.

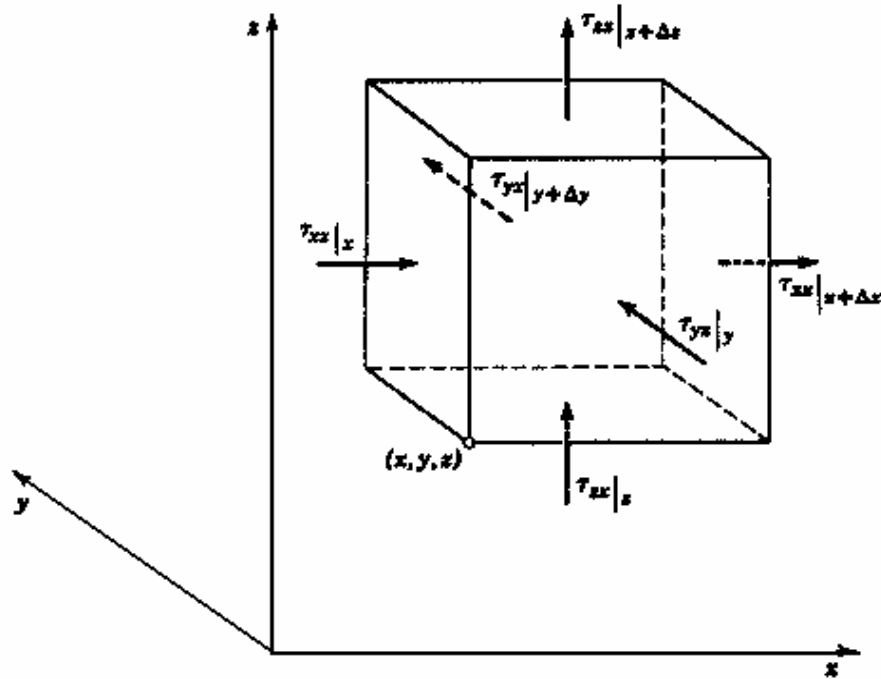


Fig.3.2-1 Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, en el que se señala con flechas la dirección en que se transporta el componente x de la cantidad de movimiento a través de las superficies.

Sin embargo, además de tener en cuenta el comportamiento no estacionario, permitiremos al fluido que se mueva en una dirección arbitraria a través de las seis caras del elemento de volumen, igual que en § 3.1. Es preciso resaltar que la Ec. 3.2-1 es la ecuación de un *vector*, con componentes para cada una de las tres direcciones coordenadas, x , y y z . Para mayor sencillez, comenzaremos considerando el componente x de cada uno de los términos de la Ec. 3.2-1; los componentes y y z se pueden obtener por analogía.

Vamos a considerar en primer lugar las velocidades de flujo del componente x de la cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen que se indica en la Fig. 3.2-1. La cantidad de movimiento entra y sale del elemento de volumen en virtud de dos mecanismos: por convección (es decir, debido al flujo global del fluido) y por transporte molecular (o sea, a causa de los gradientes de velocidad).

La velocidad con la que entra por convección el componente x de la cantidad de movimiento por la cara situada en x es $\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad con la que sale por $x + \Delta x$ es $\rho v_x v_x|_{x + \Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad a la que entra por y es $\rho v_x v_x|_y \Delta x \Delta z$.

Para las demás caras se pueden escribir expresiones similares. Vemos, por tanto, que es preciso considerar el flujo convectivo de la cantidad de movimiento x a través de las seis caras, y que el flujo convectivo neto, de la cantidad de movimiento x , en el elemento de volumen, es:

$$\Delta y \Delta z (\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x)|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x)|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\rho v_z v_x|_z - \rho v_z v_x)|_{z+\Delta z}) \quad (3.2-2)$$

De igual forma, la velocidad con la que el componente x de la cantidad de movimiento entra por transporte molecular por la cara situada en x es $\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z$, y la con la que sale por $x + \Delta x$ es $\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad con que entra por y es $\tau_{xy}|_y \Delta x \Delta z$; para las otras tres caras se pueden obtener expresiones similares (véase Fig. 3.2-1). Téngase en cuenta que τ_{xy} es la densidad de flujo de cantidad de movimiento x a través de una cara perpendicular al eje y . Sumando estas seis contribuciones, se obtiene

$$\Delta y \Delta z (\tau_{xx}|_x - \tau_{xx})|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx})|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx})|_{z+\Delta z}) \quad (3.2-3)$$

Obsérvese que, de igual forma que antes, estas densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden considerarse como esfuerzos. Por lo tanto, τ_{xx} es el esfuerzo *normal* que actúa sobre la cara x , y τ_{yx} es el esfuerzo *tangencial* (o *cortante*) que actúa sobre la cara y en la dirección x , y que resulta como consecuencia de las fuerzas viscosas.

En la mayor parte de los casos, las únicas fuerzas importantes serán las procedentes de la presión del fluido p y la fuerza gravitacional por unidad de masa g . La resultante de estas fuerzas en la dirección x será, evidentemente

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.2-4)$$

La presión de un fluido en movimiento esta definida por la ecuación de estado $p = p(\rho, T)$, y es una magnitud escalar.

Finalmente, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento x en el elemento es $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho v_x / \partial t)$. Substituimos ahora las anteriores expresiones en la Ec. 3.2-1. Dividiendo toda la ecuación que resulta por $\Delta x \Delta y \Delta z$, y tomando el límite cuando $\Delta x \Delta y$ e Δz , tienden a cero, se obtiene el componente x de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (3.2-5)$$

Los componentes y y z , que pueden obtenerse de una forma análoga, son

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_x v_z \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (3.2-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_z = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (3.2-7)$$

Las magnitudes ρv_x , ρv_y , ρv_z son los componentes del vector velocidad másica $\rho \mathbf{v}$; de igual forma, g_x , g_y , g_z son los componentes de la aceleración gravitacional $\mathbf{g}$. Por otra parte, $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$, son los componentes de un vector ∇p , denominado «gradiente de p » (a veces se escribe $\text{grad } p$). Los términos $\rho v_x v_x$, $\rho v_x v_y$, $\rho v_x v_z$, etc., son los nueve componentes de la densidad de flujo convectivo de cantidad de movimiento $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$, que es el «producto diádico»* de $\rho \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$. Análogamente, $\tau_{xx} \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}$ etc., son los nueve componentes de $\boldsymbol{\tau}$, que es el «tensor esfuerzo». Como las Ecs. 3.2 -5, 6, 7 ocupan mucho espacio, es conveniente combinarlas con el fin de obtener la sencilla ecuación vectorial :

*Se da el nombre de *productos diádicos* o simplemente *diadas*, a los tensores que resultan de multiplicar entre si dos vectores. (N. del T.)

$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} =$	$- [\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]$	$- \nabla p$
velocidad de aumento de cantidad de movimiento por unidad de volumen	velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección por unidad de volumen	fuerza de presión que actúa sobre el elemento por unidad de volumen
$- [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$	$+ \rho \mathbf{g}$	
velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso, por unidad de volumen	fuerza de gravitación que actúa sobre el elemento por unidad de volumen	

Es preciso advertir al lector que $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ y $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ *no* son divergencias simples, debido a la naturaleza tensorial de $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\tau}$. Sin embargo, la interpretación física es análoga a la de $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$ en § 3.1; mientras que $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$ representa la velocidad de pérdida de materia (un escalar) por unidad de volumen debida al flujo del fluido, la magnitud $[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]$ representa la velocidad de pérdida de cantidad de movimiento (un vector) por unidad de volumen debido al flujo del fluido. La Ec. 3.2-5 puede reordenarse, con ayuda de la ecuación de continuidad, para obtener

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (3.2-9)$$

Para los componentes y y z pueden obtenerse expresiones análogas. Sumando vectorialmente los tres componentes, se llega a

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (3.2-10)$$

Masa por unidad De volumen, mul- tiplicada por acele- ración.	fuerza de presión sobre el elemento por unidad de volumen	fuerza viscosa sobre el elemento por unidad de volumen	fuerza gravitacio- nal sobre el ele- mento por unidad de volumen
--	--	---	---

La ecuación de movimiento, expresada en esta forma, establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras, es una expresión de la segunda ley de Newton, según la cual, *masa X aceleración = suma de fuerzas*. Vemos, por lo tanto, que el balance de cantidad de movimiento es total mente equivalente a la segunda ley de Newton del movimiento. Obsérvese que las dos formas de la ecuación de movimiento que se dan en las Ecs. 3.2-8 y 3.2-10, corresponden a las dos formas de la ecuación de continuidad de las Ecs. 3.1-4 y 3.1-6. En cada caso, la primera forma representa un balance aplicado a un elemento de volumen fijo en el espacio, y la segunda es una descripción de las variaciones que tienen lugar en un elemento que sigue el movimiento del fluido. Es necesario tener en cuenta que las Ecs. 3.2-5 a 10 son válidas para cualquier medio continuo.

Con el fin de utilizar estas ecuaciones para determinar las distribuciones de velocidad, hay que expresar los distintos esfuerzos en función de los gradientes de velocidad y las propiedades del fluido. Para fluidos newtonianos, estas expresiones son¹:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (3.2-11)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (3.2-12)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (3.2-13)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (3.2-14)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (3.2-15)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (3.2-16)$$

Las Ecs. 3.2-11 a 16 se han expuesto aquí sin demostración, debido a que es demasiado larga. Estas ecuaciones, que constituyen un planteamiento más general de la ley de Newton de la viscosidad, correspondiente a la Ec. 1.1-2, se aplican a los casos complejos de flujo, en los que el fluido circula en todas las direcciones. Cuando el fluido circula en la dirección x , entre dos láminas perpendiculares a la dirección y (tal como se ha representado en la Fig. 1.1-1), de forma que v_z es una función exclusiva de y , de esta serie de seis ecuaciones se obtiene $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yx} = \mu(dv_x/dy)$, que es idéntica a la Ec. 1.1-2. Por

consiguiente, la definición de viscosidad que se ha dado en el Capítulo 1 está de acuerdo con esta definición más general.

¹En realidad, los esfuerzos normales deberían contener un término adicional, por ejemplo, la Ec. 3.2-11 debiera ser

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + (2/3\mu - k)(\nabla \cdot v) \quad (3.2-11a)$$

en la que K es la «viscosidad de conjunto». La viscosidad de conjunto es cero para los gases monoatómicos a baja densidad y probablemente no es demasiado importante para los gases densos y los líquidos.

Substituyendo las Ecs. 3.2-11 a 16 en la Ec. 3.2-9 y las ecuaciones correspondientes para y y z , se obtienen las ecuaciones generales de movimiento para un fluido newtoniano que presenta variación de la densidad y la viscosidad:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (3.2-17)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (3.2-18)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_z}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (3.2-19)$$

Estas ecuaciones, juntamente con la ecuación de continuidad, la ecuación de estado $p = p(\rho)$, la variación de la viscosidad con la densidad, $\mu = \mu(\rho)$ y las condiciones iniciales y límite, determinan completamente la presión, densidad y los componentes de la velocidad, para el flujo isotérmico de un fluido.

Rara vez se utilizan estas ecuaciones en su forma completa para el planteamiento de problemas de flujo, sino que generalmente resulta más conveniente emplear formas restringidas de las mismas.

(i) Para ρ constante y μ constante, las Ecs. 3.2 -17, 18 y 19, pueden simplificarse mediante la ecuación de continuidad $[(\nabla \cdot v) = 0]$ para obtener³:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (3.2-20)$$

Los componentes cartesianos de esta ecuación vienen dados por las Ecs. (D), (E) y (F) de la Tabla 3.4-2. La Ec. 3.2-20 es la conocida *ecuación de Navier-Stokes*, obtenida inicialmente por Navier en Francia, en 1822, mediante consideraciones moleculares.

(ii) Para $[\nabla \cdot \tau] = 0$, la Ec. 3.2-10 se reduce a

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (3.2-21)$$

³ El operador ∇^2 se denomina laplaciana (para mas detalles véase § A.3).

La Ec. 3.2-21 es la famosa *ecuación de Euler* deducida por primera vez en 1775, y que ha sido muy utilizada para describir sistemas de flujo en los que los efectos viscosos son relativamente poco importantes.

§ 3.3 LA ECUACIÓN DE ENERGÍA MECÁNICA

En esta sección vamos a demostrar como se puede utilizar la ecuación de movimiento para obtener una descripción de las interconversiones de energía mecánica que tienen lugar en un fluido en movimiento. Se comienza por formar el producto escalar de la velocidad v con la ecuación de movimiento correspondiente a la Ec.3.2-10:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -(v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho (v \cdot g) \quad (3.3-1)$$

Esta ecuación escalar describe la velocidad de variación de la energía cinética por unidad de masa ($1/2 v^2$) para un elemento de fluido que se mueve con la corriente.

Para el tratamiento que se hace a continuación, resulta más conveniente escribir esta ecuación en función de $\partial / \partial t$, utilizando la ecuación de continuidad; separaremos también en dos términos cada una de las contribuciones viscosa y de presión. Los términos de la ecuación que resulta pueden interpretarse en función de un elemento estacionario de volumen a través del que circula el fluido.

En este momento no se ve con claridad la razón de haber atribuido el mencionado significado físico a los términos $p(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$; dicho significado no puede apreciarse de una forma adecuada mientras no se estudie el balance de energía del Capítulo 10, en el que puede observarse que estos dos mismos términos, cambiados de signo, entran a formar parte de la ecuación correspondiente a la energía interna.

$\frac{\partial}{\partial t}(1/2\rho v^2) =$	$-(\nabla \cdot 1/2\rho v^2 v)$	
velocidad de incremento de energía cinética por unidad de volumen	velocidad neta de entrada de energía cinética debida al flujo global	
	$-(\nabla \cdot p v)$	$-p(-\nabla \cdot v)$
	velocidad de trabajo producido por la presión de los alrededores sobre el elemento de volumen	velocidad de conversión reversible en energía interna
	$-(\nabla \cdot [\tau \cdot v])$	$-(\tau : \nabla v)$
	velocidad de trabajo producido por las fuerzas viscosas que actúan sobre el elemento de volumen	velocidad de conversión irreversible en energía interna
	$+ \rho(v \cdot g)$	
	velocidad de trabajo producido por la fuerza de gravedad que actúa sobre el elemento de volumen	

(3.2-2)

Es preciso hacer notar que para fluidos newtonianos $(-\tau : \nabla v)$ es siempre positivo, ya que puede expresarse como una suma de términos elevada al cuadrado:

$$(-\tau : \nabla v) = \mu \phi v = \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left(\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \delta_{ij} \right)^2 \quad (3.3-3)$$

en la que i y j afectan a los valores de x, y, z , siendo $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. (En la Tabla 3.4-8 se expresa ϕ_v para diversos sistemas coordenados). Esto indica que en todos los sistemas de flujo existe una degradación de energía mecánica a energía calorífica, y que, por lo tanto, los procesos reales no son reversibles. En ausencia del término $(\tau : \nabla v)$ todas las formas de energía comprendidas en la Ec. 3.3-2 (cinética, interna y potencial) serían completamente convertibles entre sí.

Debido a los términos $p(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$, el fluido puede calentarse (o enfriarse) internamente. Por lo tanto, cuando se habla de un «sistema isotérmico», en realidad nos referimos a un sistema en el que el calor generado (o absorbido) no da lugar a una variación apreciable de temperatura. La variación de temperatura debido al término $p(\nabla \cdot v)$ es considerable en el caso de gases que sufren una expansión o compresión brusca, como en compresores, turbinas, etc. La variación de temperatura que se produce a causa del término $(\tau : \nabla v)$ sólo puede apreciarse en sistemas con elevada velocidad de flujo, en los que los

gradientes de velocidad son grandes, como ocurre en el vuelo a alta velocidad, extrusión rápida y lubricación. En § 9.4 se presenta una ilustración sobre este tipo de calentamiento.

La Ec. 3.3-2 se utiliza en el Capítulo 7 como punto de partida para la deducción del balance de energía mecánica o ecuación de Bernoulli.

§ 3.4 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Como puede observarse, todas las anteriores deducciones se han efectuado para mayor sencillez, en coordenadas rectangulares. Sin embargo, no siempre las coordenadas rectangulares son las más convenientes para la resolución de problemas, sino que ya en el Capítulo 2 hemos visto que a veces resultan más adecuadas las coordenadas curvilíneas. Por ejemplo, se ha visto que en el problema de Hagen- Poiseuille la velocidad axial v_z es una función exclusiva de la única variable r , cuando se utilizan coordenadas cilíndricas. Si se hubiesen utilizado en cambio coordenadas rectangulares, v_z sería una función de las dos variables x e y . Análogamente, el planteamiento de la condición límite para la pared del tubo sería más difícil. El uso de coordenadas esféricas en el análisis del flujo alrededor de una esfera, permite describir la velocidad en función de los dos componentes v_r y v_ϕ en vez de v_x , v_y y v_z , dando lugar también a una simplificación de las condiciones límite. Análogas ventajas pueden obtenerse para las coordenadas curvilíneas en el planteamiento de problemas de flujo, debido a la simplificación de las ecuaciones de variación.

TABLA 3.4-1

LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN DISTINTOS SISTEMAS COORDENADOS

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (A)$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ , z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (B)$$

Coordenadas esféricas (r, θ , ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \quad (C)$$

Las ecuaciones de continuidad y movimiento, tal como se han obtenido en §§ 3.1 y 3.2, están expresadas en función de las coordenadas x , y , z , los componentes de la velocidad v_x , v_y y v_z y los componentes del esfuerzo cortante, τ_{xx} , τ_{xy} , etc. Para expresar estas ecuaciones en coordenadas esféricas es preciso conocer: (a) las relaciones entre x , y , z y r , ϕ , θ (véase Fig. A. 6-1); (b) las relaciones entre v_x , v_y y v_z y los correspondientes componentes v_r , v_θ , v_ϕ y (c) las relaciones entre τ_{xx} , τ_{xy} , etc. (En § A.6 se resumen las relaciones entre los componentes vectoriales y tensoriales). El paso de coordenadas rectangulares a esféricas puede obtenerse mediante un procedimiento directo, pero resulta muy engorroso. No es preciso que el lector siga los detalles de este proceso, ya que en las

Tablas 3.4-1, 2, 3 y 4 (y en otras partes del libro) se tabulan importantes ecuaciones expresadas en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

A este respecto es conveniente advertir al principiante que, así como la ecuación de continuidad puede obtenerse fácilmente en coordenadas curvilíneas mediante un balance aplicado a una envoltura, no ocurre lo mismo con la ecuación de movimiento. En general, este método es muy difícil de aplicar a sistemas con líneas de corriente curvas, y no es recomendable en tales casos. En vez de esto, se partirá siempre de las ecuaciones generales que se indican en § 3.5.

TABLA 3.4-2
LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS RECTANGULARES(X, Y, Z)

En función de τ :

$$\begin{aligned} \text{componente } x \quad \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial x} \\ & - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (A)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } y \quad \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial y} \\ & - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \end{aligned} \quad (B)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } z \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (C)$$

En función de los gradientes de velocidad para un flujo newtoniano de ρ y μ constantes:

$$\begin{aligned} \text{componente } x \quad \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (D)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } y \quad \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \end{aligned} \quad (E)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } z \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (F)$$

TABLA 3.4-3
LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ, z)

En función de τ :

$$\begin{aligned} \text{componente } r^a \quad \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} \\ & - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \end{aligned} \quad (A)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } \theta^b \quad \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ & - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (B)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } z \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (C)$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

$$\begin{aligned} \text{componente } r^a \quad \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} \\ & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (D)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } \theta^b \quad \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (E)$$

$$\begin{aligned} \text{componente } z \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (F)$$

^a El término $\rho v_\theta^2/r$ es la *fuerza centrífuga*.

^b El término $\rho v_r v_\theta/r$ es la *fuerza de Coriolis*

TABLA 3.4-4
LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned}
 \text{componente } r \quad & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\
 & = - \frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r
 \end{aligned} \tag{A}$$

$$\begin{aligned}
 \text{componente } \theta \quad & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 & = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta
 \end{aligned} \tag{B}$$

$$\begin{aligned}
 \text{componente } \phi \quad & \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\
 & = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi
 \end{aligned} \tag{C}$$

TABLA 3.4-4(continuación)

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

$$\begin{aligned}
 \text{componente } r \quad & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_r
 \end{aligned} \tag{D}$$

$$\begin{aligned}
 \text{componente } \theta \quad & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta
 \end{aligned} \tag{E}$$

$$\begin{aligned}
 \text{componente } \phi \quad & \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\
 & = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi
 \end{aligned} \tag{F}$$

En estas ecuaciones :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

TABLA 3.4-5
COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS
RECTANGULARES (x, y, z)

$$\tau_{xx} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (A)$$

$$\tau_{yy} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (C)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (D)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (E)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (G)$$

TABLA 3.4-6
COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ , z)

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (A)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (C)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (D)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (E)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (G)$$

TABLA 3.4-7
COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS ESFÉRICAS
(r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \\ \tau_{\theta\theta} &= -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \\ \tau_{\phi\phi} &= -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} &= -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \\ \tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} &= -\mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \\ (\nabla \cdot v) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\end{aligned}$$

TABLA 3.4-8
LA FUNCIÓN $-(\tau:\nabla r) = \mu\phi_v$ PARA FLUIDOS NEWTONIANOS^a

<i>Rectangular</i>	$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right]$ $+ \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]^2$ $- \frac{2}{3} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2$
<i>Cilindrica</i>	$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right]$ $+ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2$ $+ \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2$ $- \frac{2}{3} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2$
<i>Esférica</i>	$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \right]$ $+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2$ $+ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2$ $+ \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2$ $+ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2$ $- \frac{2}{3} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]^2$

§ 3.5 UTILIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE FLUJO ESTACIONARIO

Para plantear problemas de flujo, siendo la densidad y la viscosidad constantes, se necesita:

ecuación de continuidadTabla 3.4-1
(con ρ constante)
ecuación de movimientoTablas 3.4-2.3 ó 4
(Ecs. D , E , F)

y las condiciones iniciales y límite. A partir de estas dos ecuaciones se obtienen las distribuciones de presión y velocidad.

Para plantear problemas de flujo isotérmico, cuando la densidad y la viscosidad son variables, se precisa:

ecuación de continuidadTabla 3.4-1
ecuación de movimientoTabla 3.4-2. 3 ó 4
(Ecs. A , B , C , con expresiones
para los componentes de τ en
las Tablas 3.4-5, 6 o 7)
ecuación de estado..... $\rho = \rho(p)$
ecuación para la viscosidad..... $\mu = \mu(p)$

juntamente con las condiciones iniciales y límite. A partir de estas cuatro relaciones se obtienen las distribuciones de velocidad, presión, densidad y viscosidad para un determinado sistema de flujo.

En esta sección se estudia la forma de plantear problemas de flujo viscoso mediante la simplificación de las anteriores ecuaciones, descartando aquellos términos de las ecuaciones generales de valor cero (o muy próximos a cero) para el caso que se considera. Para determinar que términos han de descartarse nos valemos de nuestra percepción intuitiva acerca del comportamiento del sistema: tipo de flujo, distribución de presión, etc. Una ventaja de este procedimiento consiste en que, una vez terminado este «proceso de descartamiento», se tiene automáticamente una relación completa de las suposiciones que se han efectuado. Vamos a exponer en primer lugar este método, tomando dos problemas del Capítulo 2, para ilustrar después su utilidad mediante la resolución de algunos ejemplos algo más complicados.

Para el *flujo axial de un fluido incompresible en un tubo circular* se ha obtenido en § 2.3 la distribución de velocidad, mediante la aplicación de un balance de cantidad de movimiento. Vamos a ver ahora cómo se puede llegar al mismo resultado simplificando las ecuaciones de variación. Las coordenadas cilíndricas son evidentemente las más apropiadas para este problema. Consideremos de nuevo un tubo largo, siendo v_θ y v_r iguales a cero. Debido a la simetría cilíndrica, el componente v_z de la velocidad no será función de θ . De acuerdo con esto, el componente z de la ecuación de movimiento para ρ y μ constantes (véase Tabla 3.4-3) será

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (3.5-1)$$

Esta ecuación puede simplificarse haciendo aplicación de la ecuación de continuidad, que en este caso se reduce a

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.5-2)$$

Resulta evidente que también $\partial^2 v_z / \partial z^2$ es cero, con lo que la Ec. 3.5-1 se transforma en:

$$0 = - \frac{d\mathcal{P}}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3.5-3)$$

Integrando dos veces con respecto a r , y utilizando las condiciones límite $v_z = 0$ para $r = R$ y $v_z = \text{finito}$ para $r = 0$,

$$v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.5-4)$$

que es la misma ecuación que la 3.2-16.

Para la *película descendente de viscosidad variable*, que se ha estudiado en el ejemplo 2.2-2, se encuentra, a partir de la Ec. C de la Tabla 3.4-2, que para el estado estacionario (despreciando los efectos finales),

$$0 = \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g \cos \beta \quad (3.5-5)$$

Al introducir la expresión de τ_{xz} (Ec. F de la Tabla 3.4-5) se llega a

$$0 = + \frac{d}{dx} \mu \frac{dv_z}{dx} + \rho g \cos \beta \quad (3.5-6)$$

Insertando la Ec. 2.2-22 se obtiene

$$0 = \mu \frac{d}{dx} \left(e^{-\kappa(x/\delta)} \frac{dv_z}{dx} \right) + \rho g \cos \beta \quad (3.5-7)$$

Esta ecuación puede integrarse con las condiciones límites de que $v_z = 0$ para $x = \delta$ y $dv_z/dx = 0$ para $x = 0$, con lo que se obtiene el resultado de la Ec. 2.2-24.

Mediante la aplicación de estos métodos pueden resolverse muchos otros problemas. A continuación se exponen algunos ejemplos adicionales para el estado estacionario, y en el Capítulo 4 se resuelven unos cuantos problemas correspondientes al estado no estacionario.

Ejemplo 3.5-1. Flujo tangencial de un fluido newtoniano en tubos concéntricos

Determinar las distribuciones de velocidad y de esfuerzo cortante, para el flujo laminar tangencial de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros verticales coaxiales, cuando el cilindro exterior gira con una velocidad angular Ω_o . (Véase Fig. 3.5- 1) Los efectos finales pueden despreciarse.

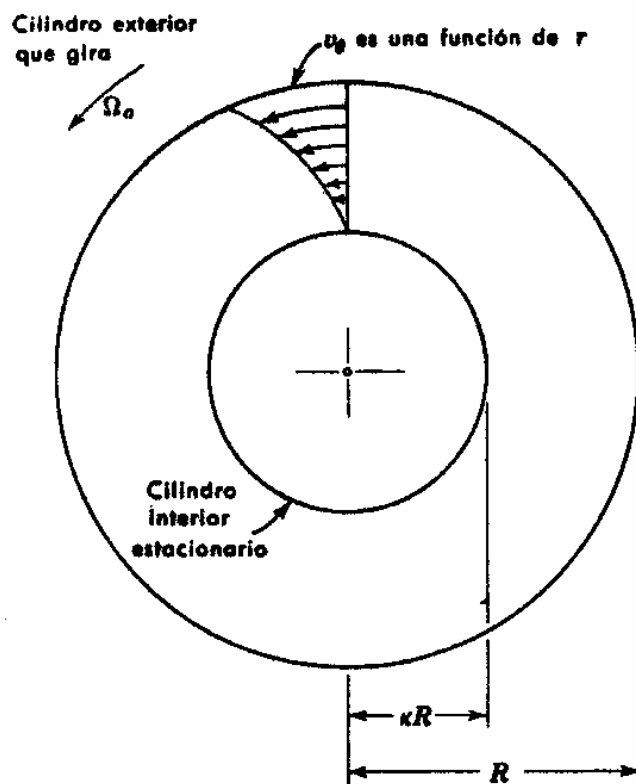


Fig. 3.5-1. Flujo laminar de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales, el exterior de los cuales gira con una velocidad angular Ω_o .

Solución. En el flujo laminar en estado estacionario, el fluido sigue un movimiento circular, y los componentes v_r y v_z , de la velocidad son cero. No existe gradiente de presión en la dirección θ . Estas afirmaciones se basan en principios físicos. Para este sistema, todos los términos de la ecuación de continuidad, expresados en coordenadas cilíndricas (Ec. B de la Tabla 3.4-1), son cero, y las ecuaciones de movimiento (Ecs. D, E, F de la Tabla 3.4-3) se reducen a

$$\text{componente } r \quad -\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.5-8)$$

$$\text{componente } \theta \quad 0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right) \quad (3.5-9)$$

$$\text{componente } z \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (3.5-10)$$

La Ec. 3.5-9 puede integrarse con respecto a r utilizando las siguientes condiciones límite $v_\theta = 0$ para $r = \kappa R$ y $v_\theta = \Omega_o R$ para $r = R$. El resultado que se obtiene es

$$v_\theta = \Omega_o R \frac{\left(\frac{\kappa R}{r} - \frac{r}{\kappa R} \right)}{\left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right)} \quad (3.5-11)$$

Con ayuda de la Tabla 3.4 -6 podemos obtener ahora la distribución del esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}(r)$:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\mu \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{\Omega_o R}{r} \frac{\left(\frac{\kappa R}{r} - \frac{r}{\kappa R} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right)} \right] \right\} \\ &= -2\mu \Omega_o R^2 \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5-12)$$

También puede calcularse fácilmente el par $\mathcal{T}$ necesario para hacer girar el eje exterior, como producto de la fuerza por el brazo de palanca:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= 2\pi R L \cdot (-\tau_{r\theta})|_{r=R} \cdot R \\ &= 4\pi \mu L \Omega_o R^2 \left(\frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5-13)$$

El sistema que estamos considerando es un modelo bastante aceptable para ciertos tipos de cojinetes de fricción. Dichos sistemas se utilizan también con frecuencia para determinar la viscosidad de fluidos midiendo el par y la velocidad angular. Los aparatos de este tipo se denominan viscosímetros de Couette-Hatschek.

Una vez que se ha obtenido la distribución de velocidad, puede calcularse la distribución de presión radial mediante la Ec. 3.5-8.

El flujo laminar en este sistema es muy estable debido a las fuerzas centrífugas. Una partícula procedente de una capa externa encuentra resistencia a moverse hacia el interior, debido a que la fuerza centrífuga que actúa sobre ella es mayor que sobre las partículas que están más próximas al eje de rotación. Por otra parte, también el movimiento hacia el exterior está dificultado, debido a la mayor fuerza centrífuga de las partículas que tendrían que ser reemplazadas. De esto resulta que la transición a flujo turbulento tiene lugar para un número de Reynolds mucho mas alto que en el sistema análogo con giro del cilindro

interior, en el que la fuerza centrífuga tiende a introducir inestabilidad. Estos dos sistemas se han estudiado experimentalmente, y se ha encontrado que los números de Reynolds correspondientes a la transición dependen grandemente de la relación existente entre el espesor del espacio anular y el radio del cilindro externo, $(1-k)$. Si el cilindro que gira es el *exterior*, el número de Reynolds correspondiente a la transición, definido por $(\Omega_0 R^2 \rho / \mu)_{\text{trans.}}$, alcanza un mínimo del orden de 50000 cuando $(1-k)$ vale aproximadamente 0,05, como se aprecia en la Fig. 3.5 -2. Cuando el cilindro *interior* gira con una velocidad angular Ω_i (y el exterior está inmóvil), el número de Reynolds de transición puede expresarse aproximadamente mediante la expresión

$$(\Omega_i k R^2 \rho / \mu)_{\text{trans.}} = 41.3 / (1-k)^{3/2} \quad (3.5-14)$$

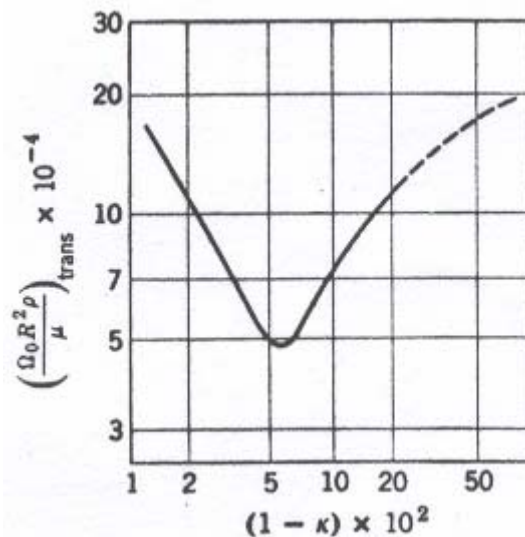


Fig. 3.5-2. Número de Reynolds crítico para el flujo tangencial en un espacio anular; gira el cilindro exterior y el interior es estacionario

Las distribuciones de velocidad angular en estos dos sistemas son muy semejantes para el intervalo laminar estable.

Ejemplo 3.5-2. Forma de la superficie de un líquido que gira

Un fluido de densidad y viscosidad constantes está contenido en un recipiente cilíndrico de radio R , tal como se indica en la Fig. 3.5- 3. El recipiente rota alrededor de su eje con una velocidad angular Ω . El eje del cilindro es vertical, de forma que $g_r = g_\theta = 0$ y $g_z = -g$. Hallar la forma de la superficie libre, una vez alcanzado el estado estacionario.

Solución. Este sistema se describe mas fácilmente en coordenadas cilíndricas, y por lo tanto vamos a utilizar las ecuaciones de variación en este sistema coordenado que se dan en la Tabla 3.4-3. Sabemos que en el estado estacionario $v_z = v_r = 0$, y que v_θ es una función exclusiva de r . Sabemos, también, que la presión dependerá de r , a causa de la fuerza centrífuga, y de z , debido a la fuerza gravitacional.

Al igual que en el ejemplo 3.5-1, no hay contribución de la ecuación de continuidad, y la ecuación de movimiento se reduce a:

componente r

$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

componente θ

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right)$$

componente z

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

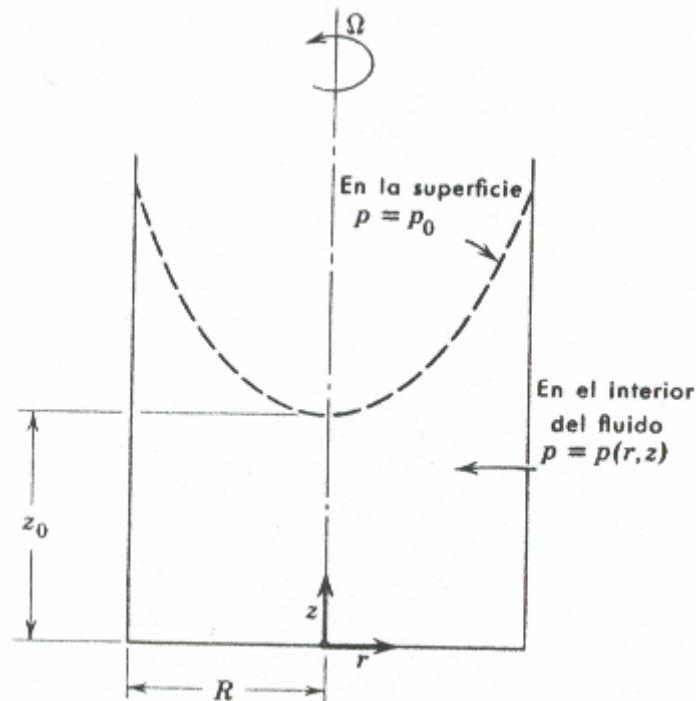


Fig.3.5-3. Superficie libre de un líquido que gira, cuya forma es la de un paraboloide de revolución.

La ecuación θ puede integrarse de forma inmediata para obtener,

$$v_\theta = \frac{1}{2} C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3.5-18)$$

en la que C_1 y C_2 son constantes de integración. Como v_θ no puede ser infinito para $r = 0$, la constante C_2 ha de ser cero. Sabemos además que para $r = R$ la velocidad v_θ , es $R\Omega$. De acuerdo con esto puede evaluarse C_1 y llegar a

$$v_\theta = \Omega r \quad (3.5-19)$$

lo que establece que cada elemento del fluido que gira se mueve de igual forma que los elementos de un cuerpo rígido. Este resultado puede substituirse en el componente r de la ecuación de movimiento.

De esta forma se obtienen dos expresiones para los gradientes de presión:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \quad (3.5-20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.5-21)$$

Como p es una función analítica de la posición, puede escribirse

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (3.5-22)$$

Substituyendo las Ecs. 3.5 -20 y 21 en esta expresión de la diferencial total de la presión e integrando, se llega a

$$P = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + C \quad (3.5-23)$$

siendo C una constante de integración, que puede determinarse teniendo en cuenta que $p = p_o$ para $r = 0$ y $z = z_o$ de forma que

$$p_o = -\rho g z_o + C \quad (3.5-24)$$

$$p - p_o = -\rho g (z - z_o) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \quad (3.5-25)$$

La superficie libre es el lugar geométrico de los puntos en los que $p = p_o$, y por lo tanto su ecuación es

$$0 = -\rho g (z - z_o) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \quad (3.5-26)$$

$$z - z_o = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \quad (3.5-27)$$

que es la ecuación de una parábola. El lector puede comprobar igualmente que la superficie libre de un líquido contenido en un recipiente anular que gira, presenta una ecuación análoga.

Ejemplo 3.5-3. Relaciones del par y distribución de velocidad en el viscosímetro de plato y cono.

El viscosímetro de plato y cono, que se representa esquemáticamente en la Fig. 3.5 - 4, consta esencialmente de una lámina plana estacionaria, sobre la que se coloca el líquido o pasta a ensayar, y un cono invertido, que se introduce en la sustancia problema hasta que la punta toca a la lámina. El cono se hace girar a una velocidad angular conocida Ω y la viscosidad del fluido se determina midiendo el par que se necesita para hacer girar el cono. En la práctica, el ángulo θ_0 , comprendido entre las superficies cónica y plana, es muy pequeño, del orden de medio grado. Este tipo de aparato presenta algunas ventajas importantes, especialmente en el caso de fluidos no-newtonianos:

- a. Solamente es importante el componente del esfuerzo $\tau_{\theta\phi}$.
- b. El valor de $\tau_{\theta\phi}$ es muy aproximadamente constante en todo el fluido.

c. Los efectos finales pueden eliminarse casi totalmente.

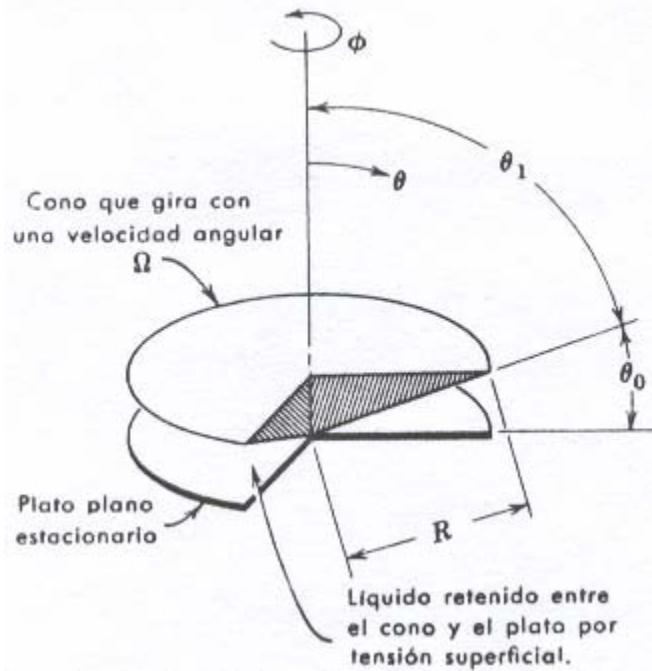


Fig. 3.5-4. Corte del viscosímetro de plato y cono.

Analizar el sistema de la siguiente forma: (i) demostrar que solamente es importante $\tau_{\theta\phi}$; (ii) determinar $\tau_{\theta\phi}$ en función de r y θ ; (iii) utilizar los resultados de (i) e (ii) con el fin de determinar $v_\phi(r, \theta)$ para el flujo estacionario de un fluido newtoniano con ρ y μ constantes (esta expresión deberá contener el par $\mathcal{T}$); (iv) obtener otra expresión para $v_\phi(r, \theta)$ que contenga la velocidad angular en vez del par.

Solución. a. Si se supone que el flujo es completamente tangencial, resulta que v_ϕ es una función de r y θ , y que $v_r = v_\theta = 0$. En la Tabla 3.4- 7 puede verse que los únicos componentes posibles de τ que no desaparecen son $\tau_{r\phi}$, $\tau_{\theta\phi}$. Por lo tanto, los tres componentes de la ecuación de movimiento (véanse Ecs. A, B, y C, de la Tabla 3.4-4) son

$$\text{componente } r \quad -\rho \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.5-28a)$$

$$\text{componente } \theta \quad -\rho \cot \theta \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (3.5-28b)$$

$$\text{componente } \phi \quad 0 = -\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + 2 \cot \theta \frac{\tau_{\theta\phi}}{r} \right) \quad (3.5-28c)$$

Se supone "flujo reptante», es decir, se admite que el flujo es suficientemente lento, de forma que los términos que contienen v_ϕ^2 pueden tomarse iguales a cero. Con esto nos queda solamente el componente ϕ de la ecuación de movimiento.

Postulamos ahora que la distribución de velocidad ha de ser de la forma $v_\phi(r, \theta) = rf(\theta)$, Ensayamos esta forma funcional debido a que satisface las condiciones límite, tanto para $\theta = \theta_1$ como para $\theta = \pi/2$. Como de acuerdo con esta hipótesis la velocidad angular v_ϕ/r es independiente de r , a partir de la Ec. F de la Tabla 3.4- 7 se encuentra que $\tau_{r\phi} = 0$.

b. Al tomar $\tau_{r\phi}$, igual a cero, se llega a la siguiente ecuación diferencial, para $\tau_{\theta\phi}$:

$$\frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = -2 \tau_{\theta\phi} \cot \theta \quad (3.5-29)$$

Integrando esta ecuación se obtiene

$$\tau_{\theta\phi} = \frac{C_1}{\sin^2 \theta} \quad (3.5-30)$$

en la que C_1 es una constante de integración, que puede evaluarse a partir de la condición límite de que para $\theta = \pi/2$ el par $\mathcal{T}$ transmitido por el fluido a la lámina es conocido. El par se evalúa multiplicando $\tau_{\theta\phi}|_{\theta=\pi/2}$ por el área diferencial $r dr d\phi$ y por el brazo de palanca r , e integrando este producto sobre la superficie de lámina completamente mojada de radio R :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau_{\theta\phi}|_{\theta=\pi/2} r^2 dr d\phi \\ &= (2\pi) \left(\frac{R^3}{3} \right) \left(\frac{C_1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.5-31)$$

Combinando las Ecs. 3.5-30 y 31 se obtiene

$$\tau_{\theta\phi} = \frac{3\mathcal{T}}{2\pi R^3 \sin^2 \theta} \quad (3.5-32)$$

Si θ_0 es pequeño, $\sin^2 \theta$ se hace muy próximo a la unidad, y $\tau_{\theta\phi}$ será prácticamente independiente de la posición,

c. A partir de la Ec. E de la Tabla 3.4- 7 se obtiene la relación entre $\tau_{\theta\phi}$ y el gradiente de v_ϕ/r . Introduciendo esta expresión en la Ec. 3.5-32 se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para la velocidad angular local v_ϕ/r :

$$-\mu \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_\phi/r}{\sin \theta} \right) = \frac{3\mathcal{T}}{2\pi R^3 \sin^2 \theta} \quad (3.5-33)$$

Separando variables e integrando, se obtiene la distribución de velocidad angular:

$$\frac{v_\phi}{r} = \frac{3\mathcal{T}}{4\pi R^3 \mu} \left[\cot \theta + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) \sin \theta \right] + \epsilon_2 \quad (3.5-34)$$

La constante de integración C_2 es cero, puesto que $v_\phi = 0$ para $\theta = \pi/2$.

d. Podemos escribir ahora la Ec. 3.5-34 para el caso especial de que $\theta = \theta_1 = \pi/2 - \theta_0$ y $v_\phi = \Omega r \sin \theta_1$.

$$\Omega \sin \theta_1 = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi R^3 \mu} \left[\cot \theta_1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \cos \theta_1}{1 - \cos \theta_1} \right) \sin \theta_1 \right] \quad (3.5-35)$$

Obsérvese que esta expresión permite determinar μ a partir de medidas de $\mathcal{T}$ y Ω .

Dividiendo la Ec. 3.5-34 por la Ec. 3.5-35 se elimina $\mathcal{T}$ con lo que se obtiene v_ϕ en función de Ω :

$$\frac{v_\phi}{r} = \Omega \sin \theta_1 \left[\frac{\cot \theta + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) \sin \theta}{\cot \theta_1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1 + \cos \theta_1}{1 - \cos \theta_1} \right) \sin \theta_1} \right] \quad (3.5-36)$$

Para valores de θ y θ_1 prácticamente iguales a $\pi/2$ esta expresión puede substituirse muy aproximadamente por

$$\frac{v_\phi}{r} \doteq \Omega \frac{\cos \theta}{\cos \theta_1} \doteq \Omega \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \theta_1} \right) \quad (3.5-37)$$

La Ec. 3.5-36 puede deducirse también por otro método descrito en el problema 3.T.

§ 3.6 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA FLUJO NO-NEWTONIANO INCOMPRESIBLE

Las ecuaciones de movimiento expresadas en función de τ (véanse las Ecs. A, B y C de las Tablas 3.4-2, 3 y 4) pueden utilizarse para describir el flujo no-newtoniano. Con este fin, sin embargo, se necesitan relaciones entre los componentes de τ y los distintos gradientes de velocidad; en otras palabras, hay que substituir las expresiones que se dan en las Tablas 3.4-5, 6 y 7, por otras adecuadas para el flujo no-newtoniano. Por consiguiente, la mayor parte de esta sección está dedicada a las expresiones de τ para modelos no-newtonianos.

En § 1.1 se ha definido el coeficiente de viscosidad de acuerdo con la ley de la viscosidad de Newton. Posteriormente, en § 1.2, se ha visto que ciertas clases de fluidos no pueden describirse mediante la ley de Newton, y que algunos «modelos no-newtonianos» resultan útiles para expresar el comportamiento reológico de los materiales no-newtonianos mas simples.

En § 3.2 se ha expuesto la ley de la viscosidad de Newton en una forma mas general. En las Ecs. 3.2-11 a 16 se dan las expresiones en coordenadas cartesianas, así como también las expresiones análogas para coordenadas cilíndricas y esféricas.

En esta sección se pretende obtener una generalización análoga de los modelos no-newtonianos. Sin embargo, este tratamiento está restringido para el flujo *incompresible*.

Recordemos que, según § 3.2, la ley de la viscosidad de Newton para un fluido incompresible es

$$\tau = -\mu\Delta \quad (3.6-1)$$

en la que Δ es el «tensor velocidad de deformación» simétrico, con componentes cartesianos $\Delta_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j) + (\partial v_j / \partial x_i)$. El coeficiente de viscosidad depende de la temperatura y presión locales, pero *no* de τ o Δ .

Para materiales no-newtonianos no existe una relación entre τ y Δ , como la que se indica en la Ec. 3.6-1. Para algunos tipos sencillos de fluidos no-newtonianos, se puede, sin embargo, escribir

$$\tau = -n\Delta \quad (3.6-2)$$

en la que la viscosidad no-newtoniana n , un escalar, es una función de Δ (o una función de τ), así como también de la temperatura y la presión. La suposición de diferentes funciones empíricas para describir la variación de n con Δ (o con τ) corresponde a los distintos «modelos» expuestos en § 1.2.

Para que n sea una función escalar del tensor Δ , es preciso que dependa solamente de los «invariantes» de Δ . Los invariantes son las combinaciones especiales de los componentes de Δ que se transforman como escalares en una rotación del sistema coordenado:

$$I_1 = (\Delta : \delta) = \sum_i \Delta_{ii} \quad (3.6-3)$$

$$I_2 = (\Delta : \Delta) = \sum_i \sum_j \Delta_{ij} \Delta_{ji} \quad (3.6-4)$$

$$I_3 = \det \Delta = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \Delta_{3k} \quad (3.6-5)$$

Puede demostrarse fácilmente que el primer invariante corresponde a $2(\nabla \cdot v)$, que es cero para un fluido incompresible. Por lo tanto,

$$n = n(I_2, I_3) \quad (3.6-6)$$

Para muchos flujos sencillos (flujo axial en un tubo, flujo tangencial entre cilindros concéntricos, flujo en una película) el tercer invariante I_3 se anula. Para otros tipos de flujo, generalmente se admite que I_3 no es muy importante. De acuerdo con esto, se acostumbra suponer que n puede tomarse como una función de $(\Delta : \Delta)$. Se han propuesto algunos modelos de materiales para los que n depende de la densidad de flujo de cantidad de movimiento; en este caso n puede tomarse como una función de $(\tau : \tau)$.

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta aquí, podemos expresar los modelos no-newtonianos de § 1.2 en una forma que nos permita describir el flujo en geometrías complejas:

$$\text{Modelo de Bingham} \quad \tau = - \left(\mu_0 - \frac{\tau_0}{\pm \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)}} \right) \Delta \quad \text{para } \frac{1}{2}(\tau : \tau) \quad (3.6-7)$$

$$\Delta = 0 \quad \text{para } \frac{1}{2}(\tau : \tau) < \tau_0^2 \quad (3.6-8)$$

$$\text{Modelo de Ostwald-de Waele} \quad \tau = - \{ m |\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)}|^{n-1} \} \Delta \quad (3.6-9)$$

$$\text{Modelo de Reiner-Philippoff} \quad \tau = - \left\{ \mu_x + \frac{\mu_0 - \mu_x}{1 + \frac{\frac{1}{2}(\tau : \tau)}{\tau_0^2}} \right\} \Delta \quad (3.6-10)$$

La utilidad de estas ecuaciones consiste en que se pueden expresar los componentes de τ para materiales no-newtonianos en coordenadas cilíndricas y esféricas, mediante el siguiente procedimiento: (a) buscar cuidadosamente hasta encontrar en las Tablas 3.4-5,6 y 7 las correspondientes relaciones newtonianas; (b) sustituir μ en la expresión newtoniana, por la magnitud entre corchetes del modelo deseado; y (c) introducir la relación $(\Delta : \Delta)$ o $(\tau : \tau)$ en las coordenadas adecuadas. De hecho, $\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)$ resulta ser exactamente la función Φ_v de la Tabla 3.4-8, en la que se ha suprimido el término $-2/3 (\nabla \cdot v)^2$ por lo tanto, se dispone de ella en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Después se ilustra este procedimiento mediante un ejemplo.

Antes de concluir esta sección es preciso hacer varias advertencias. Las expresiones tales como las de las Ecs. 3.6- 7, 8, 9 y 10, son expresiones *empíricas*, propuestas para representar de forma aproximada el comportamiento real de distintos materiales; lo único que se ha hecho aquí es escribir estas expresiones en una forma tal que se transformen adecuadamente al pasar de un sistema coordenado a otro. Sin embargo, no se puede asegurar que los parámetros (m y n por ejemplo), serían los mismos si se determinasen en distintos dispositivos geométricos. Es preciso subrayar que hemos despreciado el efecto de I_3 , debido fundamentalmente a la falta de información experimental acerca de su importancia. Por otra parte, todavía se ha restringido más el estudio, debido a que se ha supuesto que la Ec. 3.6-2 puede utilizarse para describir el comportamiento de un fluido no-newtoniano.

Se ha visto que la ecuación más general, independiente del tiempo, para fluidos no-newtonianos isotrópicos e incompresibles que no presentan elasticidad, es

$$\tau = -n\Delta - \frac{1}{2} n_c (\Delta \cdot \Delta) \quad (3.6-11)$$

en la que n_c es la «viscosidad transversal» (en inglés «*cross-viscosity*» siendo tanto n como n_c funciones de I_2 e I_3).

Todavía se pueden utilizar expresiones más generales que comprenden los efectos de elasticidad. Hasta ahora no se han sacado aplicaciones prácticas de la Ec. 3.6- 11 y otras relaciones más generales, ya que se necesita una mayor investigación con respecto a la naturaleza específica de magnitudes tales como n y n_c . Sin embargo, es interesante hacer notar que el «efecto de Weissenberg» (la tendencia de un fluido a trepar a lo largo de un eje que gira, en vez de ser despedido por fuerza centrífuga) puede explicarse cualitativamente mediante el término n_c de la Ec. 3.6 11. Se han propuesto además otros modelos distintos de la Ec. 3.6-11 que también explican cualitativamente este efecto.

Ejemplo 3.6-1. Flujo tangencial de un plástico de Bingham en tubos concéntricos

Determinar las distribuciones de velocidad y esfuerzo, para el flujo de un plástico de Bingham en el aparato del ejemplo 3.5 -1, en función del par $\mathcal{T}$ comunicado al cilindro exterior. Supóngase flujo laminar incompresible y despréciense los efectos finales.

Solucion. Para este sistema $v_r = v_z = 0$ y $v_\theta = v_\theta(r)$. Por lo tanto, el unico componente de τ que no desaparece es $\tau_{r\theta}$ y la euación de movimiento para el estado estacionario es

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad (3.6-12)$$

Al integrar se obtiene

$$\tau_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2} \quad (3.6-13)$$

Si se conoce el par $\mathcal{T}$ comunicado al cilindro exterior

$$\mathcal{T} = -\tau_{r\theta}|_{r=R} \cdot 2\pi RL \cdot R \quad (3.6-14)$$

El signo menos se debe a que la densidad de flujo de cantidad de movimiento θ tiene lugar en la dirección $-r$. Por lo tanto $C_1 = -\mathcal{T}/2\pi L$ y

$$\tau_{r\theta} = - \frac{\mathcal{T}}{2\pi L r^2} \quad (3.6-15)$$

Este resultado, que es satisfactorio para cualquier tipo de fluido, puede tambien obtenerse admitiendo que toda la impulsión angular ha de transmitirse desde el cilindro exterior al interior.

La expresión analítica que debe de utilizarse para el modelo de Bingham depende del valor de $\frac{1}{2} (\tau:\tau) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \tau_{ij}^2$. Como $\tau_{r\theta}$ es el único componente de τ que no desaparece, tenemos

$$\frac{1}{2} (\tau:\tau) = \tau_{r\theta}^2 \quad (3.6-16)$$

Por lo tanto, se utiliza la Ec. 3.6- 7 cuando $|\tau_{r\theta}| > \tau_o$ (es decir, cuando se sobrepasa el esfuerzo cortante crítico), y la Ec. 3.6-8 cuando $|\tau_{r\theta}| < \tau_o$. A partir de la Ec. 3.6-15 se puede definir una magnitud r_o , que es el valor de r para el cual $|\tau_{r\theta}| = \tau_o$:

$$r_o = \sqrt{\left| \frac{\mathcal{T}}{2\pi\tau_o L} \right|} \quad (3.6-17)$$

Se pueden distinguir tres casos:

- Si $r_o \leq R$, no existirá movimiento del fluido en ninguna parte.
- Si $r_o > R$, habrá flujo viscoso en la región $R < r < r_o$, y «flujo de tapón» para $r > r_o$.
- Si $r_o \geq R$, habrá flujo total.

A continuación escribimos la Ec. 3.6- 7 para el sistema que estamos considerando. Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2}(\Delta : \Delta) = \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2$$

se llega a

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= - \left\{ \mu_0 + \frac{\tau_0}{r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)} \right\} r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \\ &= -\tau_0 - \mu_0 r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.6-18)$$

Como v_θ/r no disminuye al aumentar r , $\tau_{r\theta}$ es negativo. Es decir, que el componente θ de la cantidad de movimiento fluye en la dirección r negativa.

Substituyendo la Ec. 3.6-18 en la Ec. 3.6-15 e integrando, se obtiene para el caso b

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega + \frac{\mathcal{F}}{4\pi L \mu_0 r_0^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad \text{para } \kappa R < r < r_0 \quad (3.6-19)$$

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega \quad \frac{v_\theta}{r} = \Omega \quad \text{para } r_0 < r < R \quad (3.6-20)$$

habiéndose utilizado la condición límite de que $v_\theta/r = \Omega$ para $r = r_0$. En el caso c se utiliza la condición límite $v_\theta/r = \Omega$ para $r = R$, y se llega a

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega + \frac{\mathcal{F}}{4\pi L \mu_0 R^2} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - \frac{\tau_0}{\mu_0} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \quad \kappa R < r < R \quad (3.6-21)$$

Si utilizamos ahora en el caso c la condición de que para $r = \kappa R$, $v_\theta = 0$, se obtiene

$$\Omega = \frac{\mathcal{F}}{4\pi L \mu_0 R^2} \left(\frac{1}{\kappa^2} - 1 \right) + \frac{\tau_0}{\mu_0} \ln \kappa \quad (3.6-22)$$

Esta relación entre $\mathcal{T}$ y Ω (conocida como ecuación de Reiner-Riwlin) permite determinar μ_0 y τ_0 a partir de datos viscosimétricos.

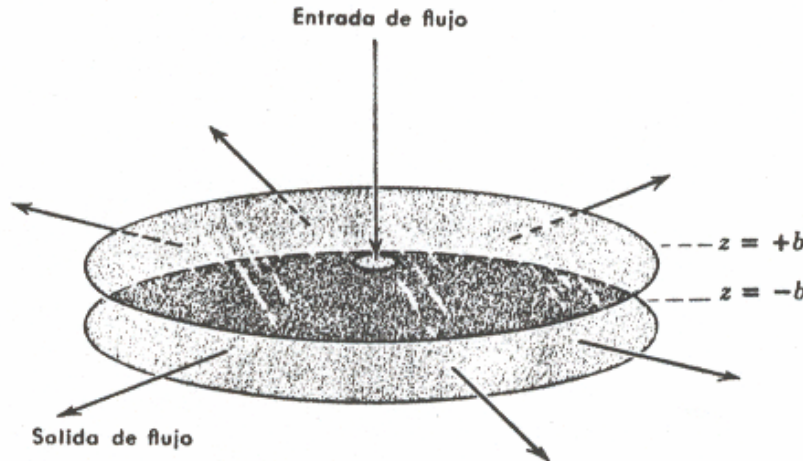


Fig.3-6-1 Flujo radial, hacia fuera, entre dos discos paralelos de radio r_2 . El radio del orificio de entrada es r_1 . La distancia entre las láminas es $2b$.

Ejemplo 3.6-2. Componentes del tensor de densidad de flujo de cantidad de movimiento, para el flujo radial no-newtoniano entre dos discos paralelos

Se considera el flujo reptante radial entre dos discos circulares, para un fluido que sigue el modelo de la potencia, tal como se indica en la Fig. 3.6-1.

a. ¿Desaparece I_3 para este sistema?

b. ¿Cuáles son los componentes de τ de acuerdo con la Ec. 3.6-9?

Solución. a. Utilizando coordenadas cilíndricas para este sistema, se observa que para flujo reptante $v_z = v_\theta = 0$, así como también que $v_r = v_r(r, z)$. Por lo tanto, Δ es de la forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2(\partial v_r / \partial r) & 0 & (\partial v_r / \partial z) \\ 0 & 2(v_r / r) & 0 \\ (\partial v_r / \partial z) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6-23)$$

Como se ve, $\det \Delta \neq 0$, y el tercer invariante *no* desaparece.

b. Para el caso de coordenadas cilíndricas, y teniendo en cuenta lo establecido en (a) con respecto a los componentes de la velocidad, resulta

$$\frac{1}{2}(\Delta : \Delta) = 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \quad (3.6-24)$$

Este resultado puede obtenerse formando el producto de doble punto de Δ consigo mismo, o bien utilizando la Ec. B de la Tabla 3.4-8, junta mente con la relación $\Phi_v = \frac{1}{2} (\Delta : \Delta)$. De acuerdo con esto, los componentes de τ que no desaparecen son

$$\tau_{rr} = -2\{m|\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)}|^{n-1}\} \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (3.6-25)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\{m|\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)}|^{n-1}\} \frac{v_r}{r} \quad (3.6-26)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\{m|\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)}|^{n-1}\} \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (3.6-27)$$

§ 3.7 ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN

Antes de abandonar el tema de la formulación general de estas ecuaciones entre derivadas parciales y su significado, vamos a estudiarlas desde el punto de vista del análisis dimensional. Para mayor sencillez, este estudio se limita a los sistemas de densidad y viscosidad constantes; sin embargo, puede ampliarse fácilmente para los casos en que estas magnitudes varían.

En muchos sistemas de flujo se puede elegir una longitud característica D y una velocidad característica V . Así, para el flujo en un tubo circular, se toma generalmente D como el diámetro del tubo y V la velocidad media de flujo. Para el flujo alrededor de una esfera, se toma habitualmente para D el diámetro de la esfera y para V la velocidad del fluido en un punto alejado de la esfera, relativa a la velocidad de esta, lo que se denomina «velocidad de aproximación». La elección es arbitraria, pero debe especificarse cuidadosamente en cada caso. Una vez que se ha efectuado esta elección, se pueden definir las siguientes variables adimensionales y operaciones diferenciales:

$$v^* = \frac{v}{V}; \quad p^* = \frac{(p - p_0)}{\rho V^2}; \quad t^* = \frac{tV}{D} \quad (3.7-1,2,3)$$

$$x^* = \frac{x}{D}; \quad y^* = \frac{y}{D}; \quad z^* = \frac{z}{D} \quad (3.7-4)$$

$$\nabla^* = D\nabla = \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x^*} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y^*} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \quad (3.7-5)$$

$$\nabla^{*2} = D^2 \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \quad (3.7-6)$$

$$\frac{D}{Dt^*} = \left(\frac{D}{V} \right) \frac{D}{Dt} \quad (3.7-7)$$

En la Ec. 3.7-2, p_0 es una presión adecuada que se toma como referencia.

Recuérdese que las ecuaciones de continuidad y movimiento para fluidos newtonianos de densidad y viscosidad constantes, son

$$\begin{array}{ll} \text{(ecuación de} & (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \\ \text{continuidad)} & \end{array} \quad (3.7-8)$$

$$\begin{array}{ll} \text{(ecuación de} & \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \\ \text{movimiento)} & \end{array} \quad (3.7-9)$$

Estas dos ecuaciones pueden expresarse en función de las siguientes variables adimensionales, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* V$, $(p - p_0) = p^* V^2$, etc.:

$$\left(\frac{1}{D} \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* V \right) = 0 \quad (3.7-10)$$

$$\rho \left(\frac{V}{D} \right) \frac{D}{Dt^*} (\mathbf{v}^* V) = - \left(\frac{1}{D} \nabla^* \cdot p^* \rho V^2 \right) + \mu \frac{1}{D^2} \nabla^{*2} (\mathbf{v}^* V) + \rho \mathbf{g} \quad (3.7-11)$$

³ Las δ_i son «vectores unitarios» (véase § A.2).

Multiplicando la Ec. 3.7-10 por D/V y la Ec. 3.7-11 por $D/\rho V^2$, se obtiene

$$(\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) = 0 \quad (3.7-12)$$

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \left[\frac{\mu}{DV\rho} \right] \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \left[\frac{gD}{V^2} \right] \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (3.7-13)^4$$

Obsérvese que en estas formas adimensionales de las ecuaciones de variación, los «factores de escala», es decir, las variables que describen el tamaño total y la velocidad del sistema, así como sus propiedades físicas, se reúnen en dos grupos adimensionales. Estos grupos intervienen con tanta frecuencia en estudios ingenieriles que se les ha dado nombre en honor de dos pioneros en mecánica de fluidos:

$$\text{Re} = \left[\frac{DV\rho}{\mu} \right] = \text{número de Reynolds} \quad (3.7-14)$$

$$\text{Fr} = \left[\frac{V^2}{gD} \right] = \text{número de Froude} \quad (3.7-15)$$

Si en dos sistemas diferentes, los factores de escala son tales que los números de Froude y Reynolds son iguales para ambos, los dos sistemas están descritos por idénticas ecuaciones diferenciales adimensionales. Si además las condiciones adimensionales inicial y límite son las mismas (lo cual sólo es posible si los dos sistemas son geoméricamente semejantes), los dos sistemas son matemáticamente idénticos; es decir, que la distribución de velocidad adimensional $\mathbf{v}^*$ (x^* , y^* , z^* y t^*) y la distribución de presión adimensional p^* (x^* , y^* , z^* y

$t^*)$ son las mismas en cada uno de ellos. Se dice entonces que tales sistemas son «dinámicamente semejantes». En el paso de escala de procesos no bien conocidos, es generalmente conveniente mantener la semejanza dinámica, tal como se indica en el ejemplo que sigue.

⁴ Obsérvese que gIg es un vector unidad en la dirección de la gravedad.

Ejemplo 3.7-1. Predicción de la profundidad del vértice en un tanque agitado .

Se desea predecir la profundidad del vértice para el flujo estacionario en un tanque de aceite de grandes dimensiones desprovisto de placas deflectoras, como se indica en la Fig. 3.7 1, en función de la velocidad del agitador. Nos proponemos obtener el resultado mediante el estudio de un modelo a escala reducida, geoméricamente semejante al tanque. Determinar las condiciones en las que debe efectuarse el estudio del modelo con el fin de que constituya un medio adecuado de predicción.

Solución. Como el tipo de flujo en este sistema es demasiado complicado para permitir un cálculo exacto, se utilizarán los métodos del análisis dimensional. La forma del vértice será la misma en los dos tanques, siempre que sean idénticas las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite adimensionales que describen el flujo. Es evidente que las ecuaciones diferenciales son las ecuaciones de continuidad y de movimiento; las condiciones límite son:

<i>Tanque grande</i>	<i>Tanque pequeño</i>	
$v = 0$ para $z = 0$	para $z = 0$	
siendo $0 < r < T_1/2$	siendo $0 < r < T_2/2$	(3.7-16)

para $r = T_1/2$	para $r = T_2/2$	
siendo $0 < z < H_1$	siendo $0 < z < H_2$	(3.7-17)

$p = p_o$ para $S_1(r, z)$	para $S_2(r, z)$	(3.7-18)
----------------------------	------------------	----------

siendo S_1 y S_2 las superficies de los vértices de los tanques grande y pequeño y p_o la presión atmosférica. También se puede escribir que la velocidad relativa a todas las superficies sólidas móviles es cero en dichas superficies, pero las condiciones anteriores son suficientes para poner de manifiesto la técnica que se utiliza. Se supondrá que la operación tiene lugar en estado estacionario y por consiguiente no se precisa ninguna condición inicial.

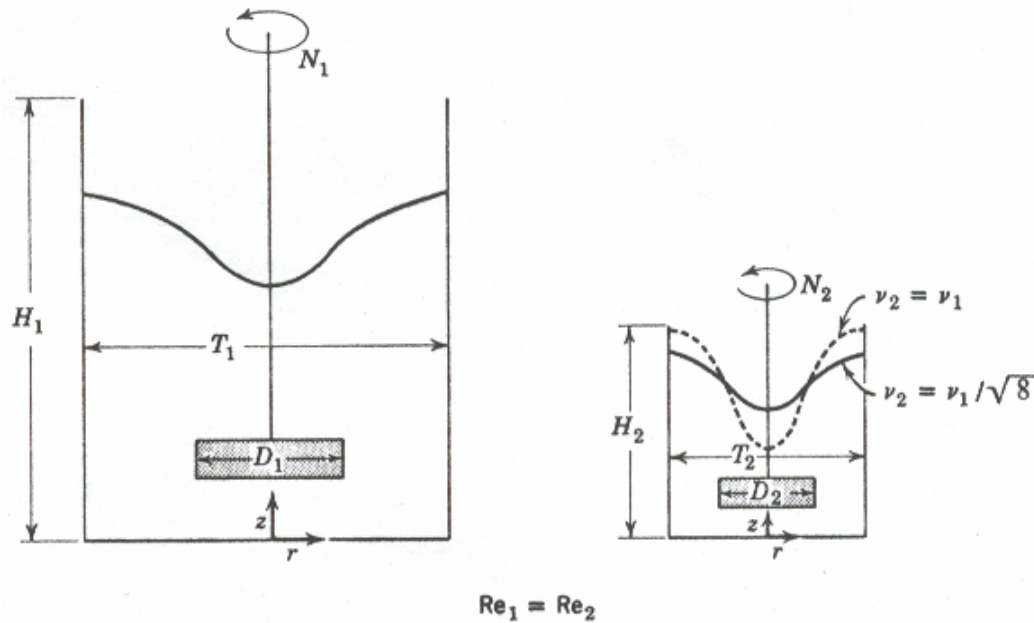


Fig. 3.7-1. Profundidad de vérlice en un tanque agitado.

Elegimos como longitud de referencia del sistema el diámetro D del agitador, y como velocidad de referencia DN , el producto del diámetro del agitador por su velocidad de rotación, expresada en revoluciones por unidad de tiempo. Los números de Reynolds y Froude para este sistema son $[D^2 N \rho / \mu]$ y $[DN^2 / g]$, respectivamente. Las condiciones límite en función de las variables adimensionales son

<i>Tanque grande</i>	<i>Tanque pequeño</i>	
$v^* = 0$ para $z^* = 0$	para $z^* = 0$	
siendo $0 < r^* < \frac{T_1}{2 D_1}$	siendo $0 < r^* < \frac{T_2}{2 D_2}$	(3.7-19)

$v^* = 0$ para $r^* = \frac{T_1}{2 D_1}$	para $r^* = \frac{T_2}{2 D_2}$	
siendo $0 < z^* < \frac{H_1}{D_1}$	siendo $0 < z^* < \frac{H_2}{D_2}$	(3.7-20)

$p^* = 0$ para $S_1^* \left(\frac{r}{D_1}, \frac{z}{D_1} \right)$	para $S_2^* \left(\frac{r}{D_2}, \frac{z}{D_2} \right)$	(3.7-21)
--	--	----------

Por lo tanto, para que el tipo de flujo sea semejante en los dos tanques es preciso que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\frac{T_1}{D_1} = \frac{T_2}{D_2} \quad (3.7-22)$$

$$\frac{H_1}{D_1} = \frac{H_2}{D_2} \quad (3.7-23)$$

$$S_1^* \left(\frac{r}{D_1}, \frac{z}{D_1} \right) = S_2^* \left(\frac{r}{D_2}, \frac{z}{D_2} \right) \quad (3.7-24)$$

$$\frac{D_1^2 N_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{D_2^2 N_2 \rho_2}{\mu_2} \quad (3.7-25)$$

$$\frac{D_1 N_1^2}{g} = \frac{D_2 N_2^2}{g} \quad (3.7-26)$$

Las Ecs. 3.7 -22 y 23 corresponden a la exigencia de semejanza geométrica. Es evidente que cuanto más detallada este la descripción de las superficies de velocidad cero, mayor número de estas relaciones de tamaño serán necesarias. En la práctica pueden incluso tener importancia la rugosidad relativa de las paredes del tanque y el tamaño de las cabezas de los pernos. Si los vértices tienen la misma forma es obvio que ha de cumplirse la Ec. 3.7 -24, puesto que $S_1^*(r/D_1, z/D_1)$ y $S_2^*(r/D_2, z/D_2)$ son las formas adimensionales de los vértices.

Las Ecs. 3.7-25 y 26 establecen las relaciones que han de existir entre los factores de escala, y que desde nuestro punto de vista son las más importantes. Como no es práctico en modo alguno variar el campo gravitacional, de la Ec. 3.7-26 se deduce que

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \quad (3.7-27)$$

Substituyendo esta expresión en la Ec. 3.7-25, se obtiene

$$\frac{\mu_2}{\rho_2} = \frac{\mu_1}{\rho_1} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{3/4} \quad (3.7-28)$$

De esta forma se llega al interesante resultado de que la semejanza dinámica, o sea vértices semejantes en este ejemplo, no puede conseguirse si se utiliza el mismo fluido en los dos tanques, si no que debe de emplearse un fluido menos viscoso en el tanque más pequeño. Si el tanque pequeño tiene unas dimensiones lineales que son la mitad de las del grande, la viscosidad cinemática del fluido en el contenido tiene que ser $1/\sqrt[4]{8}$ veces la del aceite del tanque grande. Si se tuviese en ambos el mismo fluido y el mismo número de Reynolds, el número de Froude en el tanque pequeño sería mayor y el vértice sería proporcionalmente más profundo, que es el caso que se indica mediante la curva de trazos de la Fig.3.7-1.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Expresar el significado físico de las tres derivadas $\partial T / \partial t$, dT/dt , y DT/Dt , siendo T la temperatura local del fluido.
2. ¿Puede ser Dc/Dt cero para el flujo de un fluido, cuando $\partial c / \partial t$ no es cero? ¿Puede no ser cero Dc/Dt cuando $\partial c / \partial t$ es cero? Explíquese.
3. ¿Cuál es el significado físico de la ecuación de continuidad?
4. ¿Cómo se simplifica la ecuación de continuidad para el flujo estacionario?
5. ¿Qué forma toma la ecuación de continuidad para un fluido incompresible?
6. ¿Qué se entiende por divergencia, de un vector y por gradiente de un escalar?
7. ¿Cuáles son las dimensiones de ∇p , $\nabla^2 v$, $[\nabla \cdot \tau]$?
8. ¿En qué ley física se basa la ecuación de movimiento?
9. ¿Cuál es el operador laplaciano?
10. Comparar las Ecs. 3.2-8 y 1.2-10 por lo que respecta a la interpretación física.
11. ¿Cuál es el origen del balance diferencial de energía mecánica?
12. ¿Puede en algún caso ser negativa la velocidad de disipación de energía mecánica? ¿Cuál es el significado de su respuesta?
13. Expresar el significado físico de los términos $\rho v_\theta^2/r$ y $\rho v_\theta v_r/r$ de la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas.
14. Las Ecs. 3.6-7 y 3.6-9. ¿resultan necesariamente de las definiciones de los fluidos de la ley de la potencia y de los plásticos de Bingham que se han dado en el Capítulo 1? Explíquese.
15. ¿Cómo pueden utilizarse las ecuaciones obtenidas en § 3.4 para resolver problemas de flujo viscoso.
16. ¿Cómo puede obtenerse la ecuación diferencial básica de hidrostática a partir de la Ec. 3.2-8?
17. Utilizar el resultado de la cuestión 16, para obtener la distribución de densidad en una columna isotérmica de un gas ideal.
18. Demostrar que las superficies de dos líquidos inmiscibles, contenidos en un vaso que gira con velocidad angular constante, adquieren formas parabólicas.
19. ¿Cómo se simplificarían las expresiones de las Ecs. 3.2-17, 18 y 19 para ρ y μ constantes?
20. ¿Qué información se obtiene al escribir las ecuaciones de continuidad y movimiento en forma adimensional?
21. Expresar las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite para el sistema de flujo de § 2.6.
22. Discutir algunas consecuencias de la fuerza de Coriolis en meteorología.
23. ¿Es válida la Ec. 3.5-27 si $z < Z_0$?
24. Demostrar que la Ec. 3.5-37 puede obtenerse muy fácilmente modificando la expresión del perfil de velocidad para el flujo entre dos láminas paralelas, la superior de las cuales se mueve con velocidad uniforme, mientras que la inferior está en reposo.

25. Demostrar que la solución correspondiente a la Ec. 3.5-36 satisface la Ec. 3.5- 28c, pero en cambio *no* satisface la ecuación que se obtiene para v_ϕ eliminando p entre las Ecs. 3.5-28a y b. Discútase.

PROBLEMAS

3.A₁ Par necesario para hacer girar un cojinete de fricción

Calcular el par, expresado en kgm, y la potencia en caballos, que se necesitan para hacer girar el eje en el cojinele de fricción que se indica en la Fig. 3.A. La longitud de la superficie de fricción con el eje es de 5,08 cm, el eje gira a 200 rpm, la viscosidad del lubricante es de 200 cp, y la densidad $0,80 \text{ g cm}^{-3}$.

Respuesta: 0,044 kgm
0,012 hp

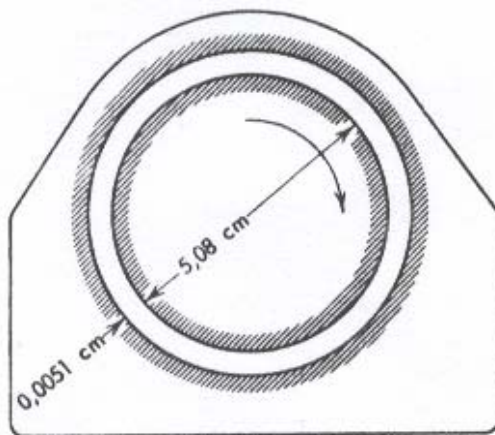


Fig. 3.A. Cojinete de fricción

3.B₁ Viscosímetro de plato y cono

Un viscosímetro de plato y cono, análogo al de la Fig. 3.5-4, cuyo radio R del cono es 10 cm y el ángulo de apertura $\theta_0 0,5^\circ$, se utiliza para medir la viscosidad de soluciones newtonianas. ¿Qué par, en dinas-cm, será necesario para girar el cono con una velocidad angular de 10 rad/min, si la viscosidad del fluido es 100 cp?

Sugerencia. Utilizar la distribución límite de velocidad para θ_0 pequeño.

Respuesta: $4,0 \times 10^4$ dina-cm.

3.C₁ Efecto de la altitud sobre la presión del aire

En la desembocadura del río Ontonagon en la orilla sur del lago Superior (183,5 m sobre el nivel medio del mar), nuestro barómetro portátil indica una presión de 750 mm Hg. Utilizar la ecuación de movimiento para estimar la presión barométrica en la cima del Government Peak (617 m sobre el nivel medio de mar) en las cercanas montañas Porcupine. Supóngase que la temperatura a1 nivel del lago es 21°C y que disminuye, al aumentar la altura, a razón constante de $0,55^\circ \text{C}/100 \text{ m}$. La aceleración de la gravedad en la orilla sur del lago Superior es $981,1 \text{ cm seg}^{-2}$ y su variación con la altura puede despreciarse en este problema.

Respuesta: 712 mm Hg.

3.D₂ Determinación de la viscosidad con un viscosímetro de Couette-Hatschek o de McMichael

Se desea medir la viscosidad de soluciones de sacarosa de concentración próxima al 60 por ciento en peso, a la temperatura aproximada de 20° C, mediante un viscosímetro de Couette-Hatschek. Este aparato consta esencialmente de un cilindro interior estacionario de 4,000 cm de diámetro y 4,00 cm de longitud, rodeado por un cilindro concéntrico móvil de 4,500 cm de diámetro y 4,00 cm de longitud efectiva. El cilindro exterior se hace girar mediante la aplicación de un par conocido y la viscosidad de la solución se determina a partir de la velocidad angular que resulta. La viscosidad de la sacarosa al 60 % es de unos 57 cp y su densidad aproximadamente 1,29 g cm⁻³.

A la vista de la experiencia anterior parece posible que los «efectos finales» pueden ser importantes, y por consiguiente se ha decidido calibrar el viscosímetro operando con algunas soluciones de viscosidad conocida, que sea aproximadamente igual a la de las soluciones de sacarosa.

Hallar el valor conveniente del par que debe de utilizarse en el calibrado, si las medidas de par pueden efectuarse con un error de 100 dinas-cm y las de la velocidad angular con un error del 0,5 por ciento. ¿cuál será la velocidad angular que resulta?

3.E₂ Aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes para la resolución de problemas sencillos

Utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes para densidad constante, con el fin de obtener las ecuaciones diferenciales de la distribución de velocidad: (a) para el flujo de una película isotérmica, igual que en § 2.2, (b) para el flujo de dos gases en una rendija horizontal, como en § 2.5, y (c) para el flujo axial en tubos concéntricos con un elemento móvil, como en el problema 2.J.

3.F₂ Distribución de velocidad en un viscosímetro de Stormer

Un viscosímetro de Stormer consta esencialmente de dos cilindros concéntricos, el interior de los cuales gira, mientras que el exterior permanece estacionario. La viscosidad se determina midiendo la velocidad de rotación del cilindro interior por efecto de la aplicación de un par conocido. Es muy parecido al viscosímetro de Couette-Hatschek descrito en § 3.5.

Deducir una expresión para la distribución de velocidad en este tipo de aparatos, en función del par aplicado, para el flujo laminar de un fluido newtoniano. Despréciense los efectos finales.

Respuesta:

$$\frac{v_\theta}{r} = \frac{\mathcal{F}}{4\pi\mu L} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right)$$

3.G₂ Esfuerzos cortantes en función del movimiento y las propiedades del fluido

Demostrar cómo se puede obtener, a partir del componente x de la ecuación de movimiento en función de los componentes de τ (Ec. 3.2 -9), la ecuación análoga en

función de μ (Ec. D de la Tabla 3.4-2 para un fluido *incompresible*). Obsérvese que para un fluido incompresible $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$, de acuerdo con la ecuación de continuidad, que debe utilizarse (a) para simplificar la expresión de τ_{xx} de la Tabla 3.4-5,

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

y (b) para simplificar el conjunto de derivadas segundas que se obtienen al diferenciar los términos de τ :

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

3.H₂ Distribución de velocidad entre dos cilindros que giran

Determinar $v_\theta(r)$ entre dos cilindros coaxiales de radios R y κR que giran con velocidades angulares Ω_o y Ω_i respectivamente. Supóngase que el espacio comprendido entre dos cilindros está ocupado por un fluido isotérmico incompresible que se mueve con flujo laminar.

Respuesta:

$$v_\theta = \frac{1}{R^2(1 - \kappa^2)} \left(r(\Omega_o R^2 - \Omega_i \kappa^2 R^2) - \frac{\kappa^2 R^4}{r} (\Omega_o - \Omega_i) \right)$$

3.I₂ Otra forma de la ecuación de movimiento

Demostrar que las dos formas de la ecuación de movimiento, expresadas para un elemento estacionario de volumen y otro que se mueve con el movimiento del fluido. Ecs. 3.2-8 y 3.2-10, respectivamente, son equivalentes.

3.J₂ La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas

a. Deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas mediante un balance de materia aplicado a un elemento estacionario de volumen $r\Delta r\Delta\theta\Delta z$.

b. Deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, a partir de la forma rectangular, mediante cambio de variables. En esta deducción pueden admitirse sin demostración las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{lll} x = r \cos \theta & r = \sqrt{x^2 + y^2} & v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ y = r \sin \theta & \theta = \arctan(y/x) & v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \\ z = z & z = z & v_z = v_z \end{array}$$

c. Demostrar la validez de las expresiones obtenidas en (b) para v_z y v_y en función de v_r y v_θ

3.K₂ Flujo radial entre dos discos paralelos

Una parte de un sistema de lubricación consta de dos discos circulares entre los que fluye radialmente un lubricante. El flujo se debe a una diferencia de presión existente entre los radios intrno y externo r_1 y r_2 . El sistema esta representado en la Fig. 3.6-1.

a. Escribir las ecuaciones de continuidad y movimiento para el sistema de flujo, suponiendo que el flujo es newtoniano, incompresible, laminar y estacionario. Considerese solamente la región $r_1 < r < r_2$, y supóngase que el flujo esta dirigido radialmente, de forma que $v_\theta = v_z = 0$.

b. Demostrar que la ecuación de continuidad permite simplificar la ecuación de movimiento para obtener

$$-\rho \frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{dp}{dr} + \frac{\mu}{r} \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (3.K-1)$$

en la que $\phi = rv_r$ es una función exclusiva de z . ¿Por qué ϕ es independiente de r ?

c. Se puede demostrar que la Ec. 3.K- 1 no tiene solución, a no ser que se desprecie el término no lineal (es decir, el término que contiene ϕ^2); para la demostración, véase el problema 3.Y.

La omisión del término ϕ^2 corresponde a la suposición de «flujo reptante» que se ha hecho al deducir la ley de Stokes en § 2.6 para el flujo alrededor de una esfera. Demostrar que cuando se descarta el término no lineal, la ecuación de movimiento puede integrarse para obtener

$$0 = \Delta p + \left(\mu \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (3.K-2)$$

d. Demostrar que la Ec. 3.K-2 conduce al siguiente perfil de velocidad

$$v_r(r, z) = \frac{b^3 \Delta p}{2\mu r \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right] \quad (3.K-3)$$

e. Demostrar finalmente, que la velocidad volumétrica de flujo Q (en $\text{m}^3 \text{seg}^{-1}$) a través de la rendija, viene dada por

$$Q = \frac{4\pi b^3 \Delta p}{3\mu \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (K-4)$$

f. Construir esquemas adecuados para representar la distribución de presión $p(r)$ y la distribución de velocidad $v_r(r, z)$.

3.L₂ Simetría del tensor τ

Considerar un elemento rectangular de volumen en el interior de un fluido tal como se indica en la Fig. 3.L, y observar que los cuatro esfuerzos cortantes perpendiculares al eje z forman dos parejas opuestas. Escribir una expresión para la aceleración angular del

elemento de volumen que resulta de la acción de estas dos parejas y demostrar, haciendo tender a cero las dimensiones del elemento, que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.L-1)$$

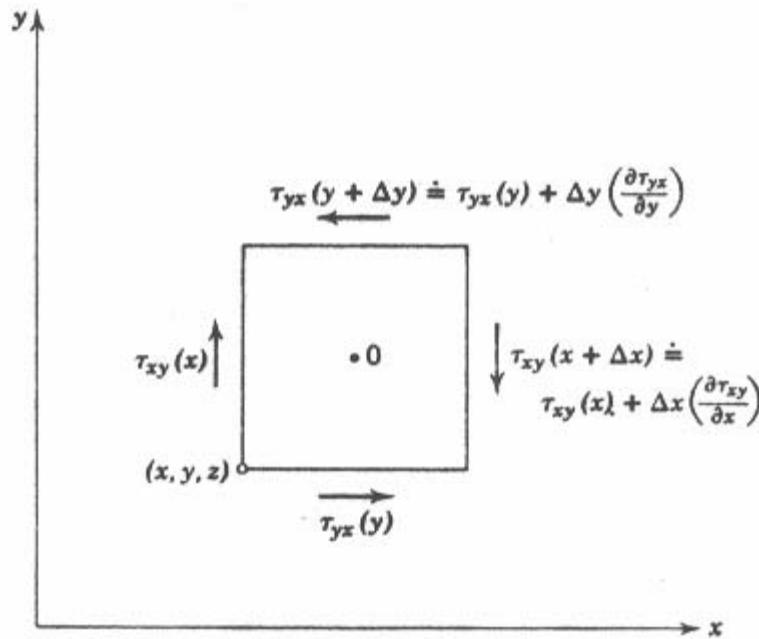


Fig.3.L-1. Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ sobre el que se aplica un balance de momento. Los momentos se calculan con respecto a un eje que pasa por 0.

(Nótese que si un tensor es simétrico en un sistema coordenado rectangular., lo es también en cualquier otro sistema coordenado ortogonal.)

3.M₂ Arrastre de aire durante el vaciado de un tanque

Se desea construir un tanque de almacenamiento de melazas de 18 m de diámetro, provisto de una tubería de desagüe de 0,3 m de diámetro, situada a 1,2 m de la pared lateral del tanque y cuya longitud por encima del fondo del tanque es de 0,3 m (véase Fig. 3. M). Se sabe por experiencia que al extraer las melazas del tanque se forma un vértice y que al disminuir el nivel del líquido, el vértice alcanza finalmente la tubería de salida, dando lugar a la succión de aire por las melazas, lo que debe evitarse.

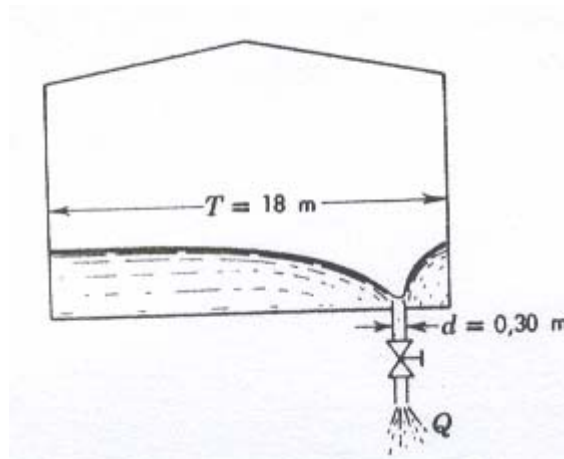


Fig. 3.M. Vaciado de un tanque de melazas.

Se desea predecir el nivel mínimo de líquido para el que se evita este arrastre de aire, operando con una velocidad de vaciado de $3 \text{ m}^3/\text{min}$, mediante el estudio de un modelo a escala reducida.

Por conveniencia se utiliza agua a 20°C para el estudio del modelo.

Determinar las dimensiones y las condiciones de operación del modelo, sabiendo que la densidad de las melazas es $1,286 \text{ g cm}^{-3}$ y su viscosidad $56,7 \text{ cp}$. Puede admitirse que, tanto en el tanque real como en el modelo, la forma del vértice depende exclusivamente de la cantidad de líquido existente en el tanque y de la velocidad de vaciado, es decir, que el vértice se establece el solo muy rápidamente.

3.N₃ Análisis dimensional para fluidos que siguen la ley de la potencia

Las ecuaciones de movimiento son útiles para el análisis dimensional del comportamiento de fluidos no-newtonianos.

Demostrar que, para el caso específico del fluido de Ostwald-de Waele (Ec. 3.6-9), los grupos adimensionales que se obtienen al expresar las ecuaciones de movimiento en forma adimensional, son

$$\left[\frac{D^n V^{3-n} \rho}{m} \right] = \text{Re}_n; \quad \left[\frac{V^2}{gD} \right] = \text{Fr}; \quad [n] \quad (3.N-1, 2,3)$$

N.B. Aunque el análisis anterior es realmente correcto, es preciso tener en cuenta que el modelo de Ostwald-de Waele del comportamiento no-newtoniano es empírico, y que los fluidos reales no lo siguen exactamente.

3.O₃ Flujo radial entre esferas concéntricas

Considerar un fluido isotérmico incompresible que fluye radialmente entre dos envolturas esféricas de un material poroso. (Véase Fig. 3.0). Supóngase flujo laminar estacionario y despréciense los efectos finales.

Observe que aquí no se supone que la velocidad sea cero en las superficies del sólido.

a. Demostrar, utilizando la ecuación de continuidad, que

$$r^2 v_r = \Psi \quad (3.0-1)$$

siendo Ψ una constante.

b. Demostrar, utilizando las ecuaciones de movimiento, que la distribución de presión en este sistema esta descrita por las ecuaciones

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} = \rho g_\phi \quad (3.0-2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho g_\theta \quad (3.0-3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} \right] - \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho g_r \quad (3.0-4)$$

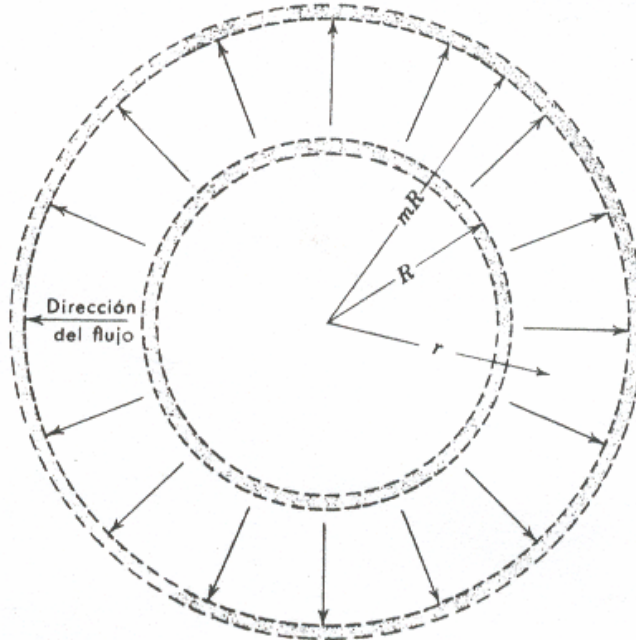


Fig. 3.0. Flujo radial entre esferas concéntricas porosas.

c. Teniendo en cuenta la nota al pie de página de la Tabla 3.4-4, demostrar que la distribución de presión radial puede expresarse en función de la magnitud $\mathcal{P}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_R = \frac{1}{2} \rho v_r^2 \Big|_{r=R} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] \quad (3.0-.5)$$

d. Escribir las expresiones de τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{\phi\phi}$, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\phi}$, y $\tau_{\theta\phi}$, para este sistema. De los esfuerzos normales ¿cuáles son de compresión y cuáles de tensión? ¿cuál es el significado físico de su respuesta ?

e. Los esfuerzos de compresión y de tensión, ejercidos por el fluido sobre las envolturas interior y exterior, ¿son iguales a $p|_R$ y $p|_{mR}$ respectivamente? ¿Por qué?

3.P₃ Flujo radial entre cilindros coaxiales

Considerar un fluido isotérmico, incompresible, que fluye radialmente entre dos envolturas cilíndricas porosas. Supóngase flujo laminar estacionario y despréciense los efectos finales.

a. Demostrar, mediante la ecuación de continuidad, que

$$rv_r = \phi \quad (3.P-1)$$

siendo ϕ una constante.

b. Simplificar las ecuaciones de movimiento con el fin de obtener las siguientes expresiones para la distribución de presión en función de $\mathcal{P}$:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dr} = -\rho v_r \frac{dv_r}{dr} \quad (3.P-2)$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\theta} = \frac{d\mathcal{P}}{dz} = 0 \quad (3.P-3)$$

c. Integrar la expresión correspondiente a $\frac{d\mathcal{P}}{dr}$ del apartado (b) con el fin de obtener

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_R = \frac{1}{2} \rho v_r^2 \Big|_{r=R} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \quad (3.P-4)$$

3.Q₃ Flujo reptante entre dos esferas concéntricas

Un fluido muy viscoso fluye en el espacio comprendido entre dos esferas concéntricas, tal como se indica en la Fig. 3.Q. Se desea hallar la velocidad de flujo en el sistema en función de la diferencia de presión que se le comunica. Despréciense los efectos finales y supóngase que $v_\theta = v_\phi(r, \theta)$ y $v_r = v_\phi = 0$.

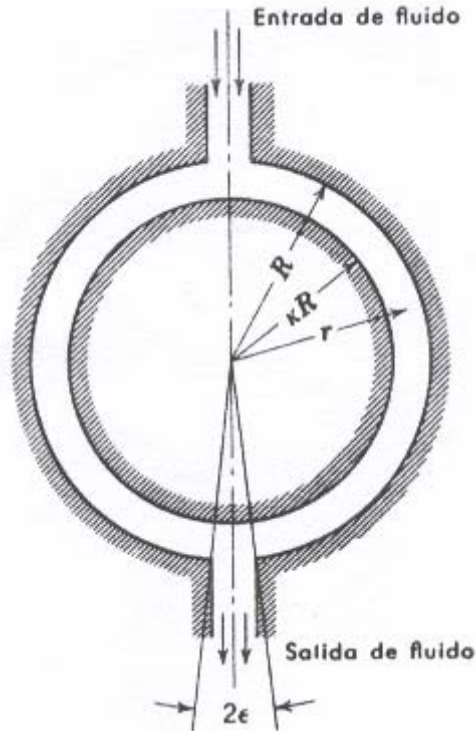


Fig. 3.Q. Flujo reptante entre dos esferas concéntricas estacionarias

a. Demostrar, utilizando la ecuación de continuidad, que $v_\theta \sin\theta = u(r)$, siendo $u(r)$ una función de r que ha de determinarse.

b. Escribir el componente θ de la ecuación de movimiento para este sistema, suponiendo velocidades de flujo suficientemente bajas, de forma que pueda despreciarse todo el primer miembro de la ecuación. Demostrar que esta ecuación queda reducida a

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) \right] \quad (3.Q-1)$$

c. Separar la relación anterior en las dos ecuaciones siguientes

$$\sin\theta \frac{dp}{d\theta} = B \quad (3.Q-2)$$

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = B \quad (3.Q-3)$$

siendo B una constante de separación.

d. Demostrar que

$$\Delta p = B \ln \left(\frac{1 - \cos \epsilon}{1 + \cos \epsilon} \right) = -BE(\epsilon) \quad (3.Q-4)$$

$$u = \frac{R \Delta p}{2\mu E(\epsilon)} \left[\left(1 - \frac{r}{R} \right) + \kappa \left(1 - \frac{R}{r} \right) \right] \quad (3.Q-5)$$

siendo Δp la diferencia de presión comunicada.

e. Utilizar el resultado anterior para demostrar que la velocidad volumétrica de flujo es

$$Q = \frac{\pi R^3 \Delta p}{6\mu E(\epsilon)} (1 - \kappa)^3 \quad (3.Q-6)$$

3.R₃ Componentes del esfuerzo en función del movimiento y propiedades del fluido en sistemas no- newtonianos .

a. Justificar la Ec. 2.3-23, partiendo de la Ec. 3.6-7.

b. Partiendo de la Ec. 3.6-9, obtener la expresión de $\tau_{r\theta}$ correspondiente a la Ec. 3.6-18, para un fluido que sigue la ley de la potencia.

c. Utilizar el resultado del apartado (b) con el fin de obtener, para un fluido que sigue la ley de la potencia, una ecuación análoga a la de Reiner-Riwlin.

3.R₄ Deducción de la ecuación de movimiento por aplicación del teorema de la divergencia

Considerar un elemento volumétrico estacionario G , de volumen V_G y superficie S_G finitos. Escribir la segunda ley del movimiento de Newton para todo el elemento, expresada en la forma de la Ec. 3.2 -1. Como las condiciones en el elemento no pueden considerarse uniformes, será preciso integrar sobre el volumen del elemento la velocidad de ganancia de cantidad de movimiento y las fuerzas que actúan sobre el volumen del mismo y sobre la superficie la densidad de flujo convectivo y las fuerzas que actúan sobre la superficie. Convertir después las integrales de superficie en integrales de volumen, mediante el teorema de la divergencia y demostrar que la expresión que resulta puede transformarse en la Ec. 3.2-8.

3.T₄ Distribución de velocidad en el viscosímetro de plato y cono por simplificación de la ecuación de movimiento

Deducir la expresión de $v_\phi(r, \theta)$ correspondiente a la Ec. 3.5-36, siguiendo este otro método:

a. Demostrar que la Ec. F de la Tabla 3.4-4 conduce a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\phi}{\sin^3 \theta} = 0 \quad (3.T-1)$$

con estas condiciones límite:

$$(3.T-2)$$

$$(3.T-3)$$

$$(3.T-4)$$

$$\begin{aligned} \text{para } \theta &= \frac{\pi}{2}, & v_\phi &= 0 \\ \text{para } \theta &= \theta_1, & v_\phi &= r \Omega \sin \theta_1 \\ \text{para } r &= 0, & v_\phi &= 0 \end{aligned}$$

b. Admítase una solución de la forma $v_\phi = R(r) \cdot e(iJ)$ y demostrar que la ecuación de movimiento puede separarse en dos ecuaciones diferenciales ordinarias :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \beta R \quad (3.T-5)$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] = \Theta \left(\frac{1}{1 - x^2} - \beta \right) \quad (3.T-6)$$

En estas ecuaciones β es una constante de separación y $x = \cos \theta$.

c. Resolver las Ecs. 3.T-5 y 3.T-6 para obtener la distribución de velocidad que se desea. Obsérvese, (i) que la Ec. 3.T-5 es una forma de la ecuación lineal de Cauchy e (ii) que la Ec. 3.T-6 es una forma de la ecuación de Legendre, que da lugar a una función asociada de Legendre de primer orden y grado n , en la que n es la raíz positiva de $n(n+1) = \beta$.

3.U₄ Otras formas de la ecuación de movimiento

a. Demostrar que para un fluido compresible de μ constante, la ecuación de movimiento puede expresarse así

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - \mu [\nabla \times [\nabla \times v]] + \frac{2}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot v) + \rho g \quad (3.U-1)$$

b. Demostrar que si el fluido es incompresible

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} - [v \times (\nabla \times v)] + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (3.U-2)$$

3.V₄ Flujo laminar periódico de un fluido viscoelástico en un tubo

El modelo más sencillo de un fluido viscoelástico incompresible es el de Maxwell, que es una superposición del sólido hookeano y el líquido newtoniano:

$$\tau_{ij} + t_0 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = -\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3V-1)$$

En esta expresión $t_0 = \mu / G$ es un tiempo característico del fluido y G es el módulo de rigidez cortante. Utilizando la Ec. 3.V -1 para los componentes de τ en las ecuaciones de

variación, pueden resolverse los problemas hidrodinámicos para el fluido de Maxwell. En este problema se estudia un ejemplo de una solución periódica linealizada de la ecuación de movimiento. Mediante la palabra «linealizada» queremos indicar que el término $[\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v}$ de la ecuación de movimiento y el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{ij}$ de la ecuación 3.V-1 pueden despreciarse. Por «periódica» se entiende que el movimiento local del fluido es una función sinusoidal del tiempo.

Vamos a considerar ahora las oscilaciones de un fluido viscoelástico en un tubo de radio R alrededor de una posición media, cuando se comunica al sistema un gradiente oscilante de presión. Según esto, las dos ecuaciones que describen el sistema son

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \quad (3.V-2)$$

$$\tau_{rz} + t_0 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (3.V-3)$$

En estas ecuaciones introducimos los postulados de que la densidad de flujo de cantidad de movimiento, el gradiente de presión, la velocidad local y la velocidad volumétrica de flujo, son todas periódicas en el tiempo, con una frecuencia ω ; con este fin utilizamos la representación compleja de los fenómenos periódicos:

$$\tau_{rz} = \tau_0 e^{i\omega t} \quad (3.V-4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = b_0 e^{i\omega t} \quad (3.V-5)$$

$$v_z = v_0(r) e^{i\omega t} \quad (3.V-6)$$

$$Q = Q_0 e^{i\omega t} \quad (3.V-7)$$

Al introducir las tres primeras expresiones en las Ecs. 3.V-2 y 3, se obtiene una ecuación de segundo orden para $v_0(r)$. Demostrar que su solución (siendo $k^2 = -i\omega \rho(1 + i\omega t_0)/\mu$) es:

$$v_0(r) = \frac{b_0}{i\omega \rho} \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \quad (3.V-8)$$

Demostrar después que la amplitud de la velocidad volumétrica de flujo es:

$$Q_0 = \frac{\pi R^2 b_0}{i\omega \rho} \left(1 - \frac{2J_1(kR)}{kJ_0(kR)} \right) \quad (3.V-9)$$

Desarrollar las funciones de Bessel de las dos ecuaciones anteriores y descartar los términos superiores a k^2 . Demostrar que si $\omega t_0 < 1$, se puede eliminar k^2 entre las dos ecuaciones para obtener

$$b_0 = \frac{8\mu Q_0}{\pi R^4} (1 - i\omega t_0 + i\omega \rho R^2/4\mu) \quad (3.V-10)$$

$$(3.V-11)$$

o, en forma real,

$$\frac{\Delta \rho}{L} \cos \omega t = \frac{8\mu Q_0}{\pi R^4} \left[\cos \omega t + \omega t_0 \left(1 - \frac{\rho R^2}{4\mu t_0} \right) \sin \omega t \right]$$

Interpretar físicamente el resultado.

3.W₄ Película descendente sobre un cono

En relación con los estudios de absorción de gases, se ha decidido investigar diversos dispositivos para el contacto gas-líquido en sistemas de geometría sencilla. Un sistema que parece prometedor es aquel en el que un chorro de líquido incide sobre el vértice de un cono, para descender por él formando una película de líquido, tal como se indica en la Fig. 3.W. Obtener una expresión aproximada de la variación del espesor de película con s , la distancia a lo largo de la superficie cónica. Relacionar cuidadosamente las suposiciones que se hagan en la deducción e indicar las restricciones que deben de afectar al resultado final.

Una respuesta:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu r_0^2 v_0}{\rho g s \sin 2\beta}}$$