Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencia
Ingeniería Ambiental

Prueba de Ensayo 1 (Pauta)

9 de abril de 2007

Prof. Juan Carlos Morgado C

Observaciones
Tiempo: 90 minutos
Sea ordenado y justifique todas sus respuestas

1. Exprese la siguiente proposición

$$(a \wedge b) \vee (r \vee t)$$

Utilizando sólo los conectivos " $\overline{\ }$ " y "$\Rightarrow$"

Respuesta:

$(a \wedge b) \vee (r \vee t)$	$\Leftrightarrow$	$\overline{(a \wedge b)} \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow t)$
	$\Leftrightarrow$	$(\bar{a} \vee \bar{b}) \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow t)$
	$\Leftrightarrow$	$(a \Rightarrow \bar{b}) \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow t)$

Por lo tanto, $(a \wedge b) \vee (r \vee t) \Leftrightarrow$ $(a \Rightarrow \bar{b}) \Rightarrow (\bar{r} \Rightarrow t)$y se cumple con el objetivo de expresar la proposición usando los conectivos" $\overline{\ }$ " y "$\Rightarrow$".

2. Sean $A, B; C \subseteq U$. Determine si la siguiente proposición es verdadera

$$C \cup [[A-(B \cap C)]-[(B \cap C)-A]] = C$$

Respuesta:

$C \cup [[A-(B \cap C)]-[(B \cap C)-A]]$	$= C \cup [[A \cap (B \cap C)^C] \cap [(B \cap C)-A]^C]$
	$= C \cup [[A \cap (B^C \cup C^C)] \cap [(B^C \cup C^C) \cup A]]$
	$= C \cup [A \cap \{(B^C \cup C^C) \cap [(B^C \cup C^C) \cup A]\}]$
	$= C \cup [A \cap (B^C \cup C^C)]$
	$= (C \cup A) \cap [C \cup (B^C \cup C^C)]$
	$= (C \cup A) \cap U$
	$= C \cup A$

Por lo tanto, la proposición es falsa debido que

$$C \cup [[A - (B \cap C)] - [(B \cap C) - A]] = C \cup A$$

3. Encontrar el valor de la constante k para que $4x^2 + (k+1)x + 2 - k = 0$ tengan como raíz al número 3

Respuesta:

En este caso debemos resolver la ecuación de segundo grado e igualarla a 3, es decir,

$$\frac{-(k+1) \pm \sqrt{[-(k+1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2-k)}}{8} = 3$$

$$-(k+1) \pm \sqrt{[-(k+1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2-k)} = 24$$

$$\pm \sqrt{[-(k+1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2-k)} = 24 + k + 1$$

$$\pm \sqrt{k^2 + 18k - 31} = 25 + k \qquad |(\ )^2$$

$$k^2 + 18k - 31 = 625 + 50k + k^2$$

$$k = -\frac{656}{32} \quad \text{entonces } k = -20.5$$

Por lo tanto, para que la ecuación $4x^2 + (k+1)x + 2 - k = 0$ tenga una solución igual a 3 el valor de k debe ser -20.5.

*** También se puede resolver, reemplazando el x = 3 (ya que es una solución de la ecuación) en $4x^2 + (k+1)x + 2 - k = 0$ y encontrar el valor de k, es decir,

4. Encuentre la solución en IR a la siguiente inecuación

$$\frac{\sqrt[6]{x^2 - x - 30} \cdot (4x^4 - 12x^2 + 9)}{(x^2 - 6x + 13) \cdot \sqrt[7]{2x+3}} \leq 0$$

Respuesta:

Restricciones

- $2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}$
- $x^2 - x - 30 \geq 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-6) \geq 0$, realizamos la tabla de ruffini

	-oo	-5	6 oo +
x-6	-	-	+
x+5	-	+	+
	+	-	+

Por lo tanto, para que $x^2 - x - 30 \geq 0 \quad \forall x \in \left]-\infty,-5\right] \cup \left[6,\infty\right[$

Finalmente, podemos decir $\forall x \in \left]-\infty,-5\right] \cup \left[6,\infty\right[$ la inecuación tiene consistencia, es decir, este intervalo es la restricción.

Por otro lado, $4x^4 - 12x^2 + 9 = \left(2x^2 - 3\right)^2$ de lo cual se deduce que: $4x^4 - 12x^2 + 9 \geq 0 \quad \forall x \in IR$.

Además $x^2 - 6x + 13 > 0$ debido que $\Delta = -16 < 0$ y $c = 13 > 0$

También sabemos que $\sqrt{x^2 - x - 30} \geq 0 \quad \forall$x $\in$Restricción

Luego, la inecuación $\dfrac{\sqrt[6]{x^2 - x - 30} \cdot \left(4x^4 - 12x^2 + 9\right)}{\left(x^2 - 6x + 13\right) \cdot \sqrt[7]{2x+3}} \leq 0$ al tener casi todos sus productos definidos como positivo, solo depende de $\sqrt[7]{2x+3}$.

Por consiguiente, la solución parcial (S.P.) está definida $\forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$

Entonces , La solución final (S.F.) estás dada por

$$SF = SP \cap restricción$$
$$SF = \left]-\infty,-5\right]$$

Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencia
Ingeniería Ambiental

Prueba de Ensayo 1

9 de abril de 2007

Prof. Juan Carlos Morgado C

Observaciones
Tiempo: 90 minutos
Sea ordenado y justifique todas sus respuestas

1. Determine (sin tabla de verdad) si la siguiente proposiciones es una tautología

$$\{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)\} \vee \{(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)\}$$

Respuesta:

$\{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)\} \vee \{(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)\}$	$=\{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee s)\} \vee \{(\overline{r} \vee q) \wedge (\overline{r} \vee s)\}$
	$= \left[\overline{p} \vee (q \wedge s)\right] \vee \left[\overline{r} \vee (q \wedge s)\right]$
	$= \left(\overline{p} \vee \overline{r}\right) \vee (q \wedge s)$

Como al reducir la proposición no llegamos a **Verdadero**, entonces podemos decir que la proposición es una contingencia. Por lo tanto, no es tautología.

2. El conectivo lógico $\downarrow$ es la *conjunción negativa;* $p \downarrow q$ se lee "ni p ni q ". Exprese la proposición

$$p \vee q$$

en término de $\downarrow$

Respuesta:
Como $\downarrow$ es la *conjunción negativa* entonces $p \downarrow q = \overline{p \vee q}$
Por lo tanto,

$$p \vee q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

3. Resuelva en IR la siguiente ecuación

$$\sqrt[3]{x^2 - 7x} + 9\sqrt[6]{x^2 - 7x} = 10$$

Resuelva:

Sea u una variable auxiliar, luego $u = \sqrt[6]{x^2 - 7x} \Rightarrow u^2 = \sqrt[6]{x^2 - 7x}$

Ahora resolvemos la siguiente ecuación

$$u^2 + 9u = 10 \Leftrightarrow u^2 + 9u - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow (u-1)(u+10) = 0$$

Por lo tanto, la solución para *u* es *u* = 1 ó *u* = -10

Finalmente, reemplazamos los valores de u en la variable auxiliar

- $-10 = \sqrt[6]{x^2 - 7x}$ falso, como la raíz es par la solución siempre será positiva

- $1 = \sqrt[6]{x^2 - 7x} \Leftrightarrow 1 = x^2 - 7x$
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$$

Luego, la solución de la ecuación es x $= \dfrac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$.

4. Resuelva en IR la siguiente inecuación

$$\frac{(2x - x^2 - 3)\cdot \sqrt[5]{2x+6}}{(x+30)(x^3 + 5x^2 + 6x)} < 0$$

Resuelva:

Restricciones

- $x + 30 \neq 0 \Rightarrow x \neq -30$
- $x^3 + 5x^2 + 6x \neq x(x^2 + 5x + 6) \neq x(x+3)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; \quad x \neq -2; \quad x \neq -3$

Además, $2x - x^2 - 3 < 0 \forall x \in IR$ debido que $\Delta = -8 < 0$ y c = -3 < 0

Ahora realizamos la tabla de Rufino

	-oo -30	-30 -3	-3 -2	-2 0	0 +oo
x +30	-	+	+	+	+
x	-	-	-	-	+
x+3	-	-	+	+	+
x+2	-	-	-	+	+
2x + 6	-	-	+	+	+

	-	+	+	-	+

Por lo tanto, la solución final está definida $\forall x \in \left(\left] -30, -2 \right[\cup \left] 0, +\infty \right[- \left\{ -3 \right\} \right)$