Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Ingeniería Ambiental

1[era] Prueba de Matemática I (pauta)

17 de abril de 2006

Profesores: Morgado, Juan Carlos

Observaciones
Tiempo: 90 minutos
Cada pregunta vale 15 puntos, con 30 puntos obtiene nota 4.0
Justifique todas sus respuestas

1. Sean p, q, r proposiciones. Pruebe, sin utilizar tablas de verdad que:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

Solución

$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\bar{p} \vee r)} \vee [\overline{(p \wedge q)} \vee r]$	2
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \bar{r}) \vee [(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r]$	2
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \bar{r}) \vee [(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}]$	3
	$\Leftrightarrow$	$[(p \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \vee r)] \vee \bar{q}$	2
	$\Leftrightarrow$	$[(p \wedge \bar{r}) \vee \overline{(p \wedge \bar{r})}] \vee \bar{q}$	3
	$\Leftrightarrow$	$V \vee \bar{q}$	2
	$\Leftrightarrow$	V	1

Por lo tanto, queda demostrado que $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

2. Si $A, B; C \subseteq U$ y $B - A = \phi$ Demuestre que

$$\left[(A - C)^C - (B \cup C)^C\right] \cap [A \cup (C - B)] = C$$

Solución

Como $B - A = \phi$, es decir, $B \cap A^C = \phi$ se deduce que $B^C \cup A = U$ **** 3

$\left[(A - C)^C - (B \cup C)^C\right] \cap [A \cup (C - B)]$	$\Leftrightarrow$	$\left[(A \cap C^C)^C \cap (B \cup C)\right] \cap \left[A \cup (C \cap B^C)\right]$	2
	$\Leftrightarrow$	$\left[(A^C \cup C) \cap (B \cup C)\right] \cap \left[(A \cup C) \cap (A \cup B^C)\right]$	2
	$\Leftrightarrow$	$\left[C \cup (A^C \cap B)\right] \cap \left[(A \cup C) \cap (A \cup B^C)\right]$	2
	$\Leftrightarrow$	$[C \cup (\phi)] \cap [(A \cup C) \cap (U)]$ ****	2
	$\Leftrightarrow$	$[C] \cap [(A \cup C)]$	2
	$\Leftrightarrow$	C	2

Por lo tanto, queda demostrado que $\left[(A - C)^C - (B \cup C)^C\right] \cap [A \cup (C - B)] = C$

3. Simplifique al máximo la siguiente expresión, indicando restricciones

$$\left[\frac{x-y-\dfrac{(x+y)^2}{x-y}}{x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x-y}}\right]:\left[\frac{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}{\dfrac{x-1}{y+y^2}+\dfrac{x+1}{y-y^2}}\right]$$

Solución

Restricciones $x \neq \pm y \quad y \neq \pm 1;\ y \neq 0$ 2

$$\left[\frac{\dfrac{(x-y)^2-(x+y)^2}{x-y}}{\dfrac{x^2-y^2-x^2-y^2}{x-y}}\right]:\left[\frac{\dfrac{x^2(1-y^2)-(1-x^2)y^2}{y^2(1-y^2)}}{\dfrac{[(x-1)(1-y)+(x+1)(1+y)]\cdot y}{y^2(1-y^2)}}\right]$$ 3

$$\left[\frac{(x-y)^2-(x+y)^2}{-2y^2}\right]:\left[\frac{x^2(1-y^2)-(1-x^2)y^2}{y\cdot[(x-1)(1-y)+(x+1)(1+y)]}\right]$$ 3

$$\left[\frac{-4xy}{-2y^2}\right]:\left[\frac{(x-y)(x+y)}{2y(x+y)}\right]$$ 3

$$\left[\frac{2x}{y}\right]\cdot\left[\frac{2y}{x-y}\right]$$ 2

$$\frac{4x}{x-y}$$ 2

4. Resuelva la siguiente inecuación en IR

$$\frac{x^3-26x^2+25x}{(x^2+x+1)(2x-2)}>x$$

Solución

$$\frac{x(x-25)(x-1)}{2(x^2+x+1)(x-1)}-x>0$$ Restricción $x \neq 1$

$$\frac{x(x-25)}{2(x^2+x+1)}-x>0$$

$$\frac{x(x-25)-2x(x^2+x+1)}{2(x^2+x+1)}>0$$

$$\frac{-2x^3-x^2-27x}{2(x^2+x+1)}>0$$

$$\frac{x(-2x^2-x-27)}{2(x^2+x+1)}>0$$ 8

Pero $x^2+x+1>0\,\forall x\in IR$ y $-2x^2-x-27<0\,\forall x\in IR$,luego la desigualdad depende solamente de "x"

4

debe ser negativo

$$\frac{\overset{\downarrow}{x}\qquad(-2x^2-x-27)}{2(x^2+x+1)}>0$$

Por lo tanto, $\dfrac{x^3-26x^2+25x}{(x^2+x+1)(2x-2)}>x$ si acaso x<0, decir, $\forall x\in\,]-\infty,0[$ 3