

1^{era} Prueba de Matemática I (pauta)

19 de Abril de 2004

Prof. Juan Carlos Morgado C

Observaciones

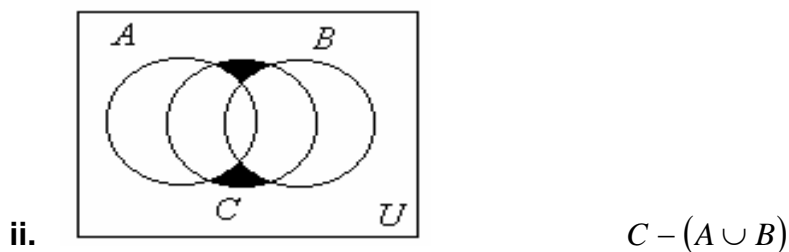
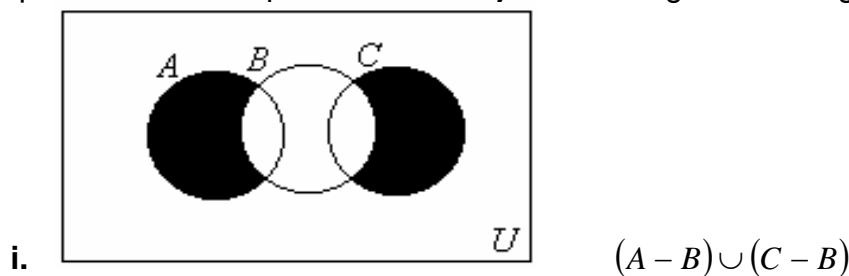
- i. Con 36 puntos se obtiene nota 4.0
- ii. Se puede utilizar calculadora
- iii. Tiempo 150 minutos
- iv. Justifique todas sus respuestas

1. Sean p, q, r, s proposiciones. Pruebe sin usar tablas de verdad que:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]$$

$$\begin{aligned} [(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)] &\Leftrightarrow [(\overline{(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})}) \vee [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]] \\ &\Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{s} \wedge r)] \vee [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)] \\ &\Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}] \vee [(\bar{s} \wedge r) \vee \bar{r}] \vee (q \wedge s) \\ &\Leftrightarrow [(\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \vee [(\bar{r} \vee \bar{s}) \wedge (\bar{r} \vee r)] \vee (q \wedge s) \\ &\Leftrightarrow [\bar{q} \vee \bar{p}] \vee [\bar{s} \vee \bar{r}] \vee (q \wedge s) \\ &\Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{r} \vee [(\overline{q \wedge s}) \vee (q \wedge s)] \\ &\Leftrightarrow \vee \end{aligned}$$

2. Exprese mediante operatoria de conjuntos los siguientes diagramas de Venn:



3. Resuelva la siguiente inecuación en \mathbb{R}

i. $\sqrt{3x - 8} - \sqrt{5x + 3} > \sqrt{x + 6}$

Restricción: $(3x - 8 \geq 0) \wedge (5x + 3 \geq 0) \wedge (x + 6 \geq 0)$

Por lo tanto, el conjunto de trabajo es $\left[\frac{8}{3}, \infty\right]$, es decir en este intervalo la inecuación está bien definida.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-8} - \sqrt{5x+3} &> \sqrt{x+6} \\ \sqrt{3x-8} &> \sqrt{x+6} + \sqrt{5x+3} && \text{Se puede elevar al cuadrado} \\ 3x-8 &> x+6 + 2\sqrt{(x+6)(5x+3)} + 5x+3 \\ -(3x+17) &> 2\sqrt{(x+6)(5x+3)} && \text{El conjunto de trabajo pertenece a } \mathbb{R}^+, \text{ de ahí que se tiene:} \\ &&& \text{Negativo} > \text{Positivo} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se llega a una contradicción. Entonces la solución es: \emptyset

$$\text{ii. } \frac{|2x+1| + \sqrt{x^2-1}}{|3x-5| - |2x-6| - |5x+8| + 4} \leq 0$$

Restricción: $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x \leq -1) \vee (x \geq 1)$

Además: $|2x+1| + \sqrt{x^2-1} > 0 \forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

Luego, para encontrar la solución a la inecuación debemos resolver, lo siguiente:

$$|3x-5| - |2x-6| - |5x+8| + 4 < 0$$

Caso 1: $\left] -\infty, \frac{-8}{5} \right]$

$$-(3x-5) + (2x-6) + (5x+8) + 4 < 0 \Rightarrow x < \frac{-11}{4}$$

Solución Caso 1: $\left] -\infty, \frac{-11}{4} \right[$

Caso 2: $\left] \frac{-8}{5}, \frac{5}{3} \right]$

$$-(3x-5) + (2x-6) - (5x+8) + 4 < 0 \Rightarrow x > \frac{-5}{6}$$

Solución Caso 2: $\left] \frac{-5}{6}, \frac{5}{3} \right[$

Caso 3: $\left] \frac{5}{3}, 3 \right]$

$$(3x-5) + (2x-6) - (5x+8) + 4 < 0 \Rightarrow -15 < 0$$

Solución Caso 3: $\left] \frac{5}{3}, 3 \right]$

Caso 4: $\left] 3, \infty \right[$

$$(3x - 5) - (2x - 6) - (5x + 8) + 4 < 0 \Rightarrow x > \frac{-3}{4}$$

Solución Caso 4: $]3, \infty[$

$$|3x - 5| - |2x - 6| - |5x + 8| + 4 < 0 \text{ Si acaso } x \in \left] -\infty, \frac{-11}{4} \right[\cup \left] \frac{-5}{6}, \infty \right[$$

$$\text{Finalmente, } \left(\left] -\infty, \frac{-11}{4} \right[\cup \left] \frac{-5}{6}, \infty \right[\right) \cap (]-\infty, -1] \cup [1, \infty])$$

$$\text{Entonces la solución es: } \left] -\infty, \frac{-11}{4} \right[\cup [1, \infty[$$

4. A una fiesta asistieron 30 personas. Ángela bailó con siete muchachos; Solange bailó con ocho; Claudia con nueve, y así hasta llegar a Bárbara que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la fiesta?

En este caso, buscaremos el número de mujeres que había, las cuales expresaremos con la variable x :

1 ^a	Ángela bailó con	6+1	muchachos
2 ^a	Solange bailó con	6+2	muchachos
3 ^a	Claudia bailó con	6+3	muchachos
...
x ^a	Bárbara bailó con	6+x	muchachos

Luego la ecuación es:

$$x + (6 + x) = 30 \quad \text{Entonces} \quad x = 12$$

Por lo tanto, había 18 muchachos.

5. Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 litros de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

Sea x la cantidad de alcohol puro añadida.

Luego, nos queda lo siguiente:

	Litros de solución	Concentración de alcohol	Litros de alcohol
Solución general	15	20%	3
Alcohol puro	x	100%	x
Mezcla resultante	15 + x	30%	30%(15 + x)

Luego la ecuación a resolver es:

$$30(15 + x) = 100(3 + x) \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

La cantidad de alcohol puro añadido es $\frac{15}{7}$ litros.