Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencia
Ingeniería Ambiental

Prueba 1(pauta)

16 de abril de 2007

Prof. Juan Carlos Morgado C

Observaciones
Tiempo: 90 minutos
Sea ordenado y justifique todas sus respuestas
Cada pregunta tiene asignado el mismo puntaje.
Resuelva solamente 4 ejercicios.

1. Simplifique al máximo la siguiente expresión, indicando las restricciones

$$\frac{3a}{\frac{1}{a-1}-\frac{a-1}{a^2+a+1}}+\frac{1+a\cdot(-a)}{a^3-1-(a-1)(a-2)(a-3)-6(a-1)^2}$$

Solución

$$=\frac{3a}{\frac{1}{a-1}-\frac{a-1}{a^2+a+1}}+\frac{1+a\cdot(-a)}{a^3-1-(a-1)(a-2)(a-3)-6(a-1)^2}$$

$$=\frac{3a}{\frac{a^2+a+1-(a-1)^2}{a^3-1}}+\frac{1-a^2}{(a-1)(a^2+a+1)-(a-1)(a-2)(a-3)-6(a-1)^2}$$

$$=\frac{3a}{\frac{3a}{a^3-1}}+\frac{(1-a)\cdot(1+a)}{(a-1)\left[a^2+a+1-(a-2)(a-3)-6(a-1)\right]} \qquad a\neq 0;\quad a\neq 1$$

$$=a^3-1-\frac{(1+a)}{\left[a^2+a+1-(a-2)(a-3)-6(a-1)\right]}$$

$$=a^3-1-\frac{(1+a)}{\left[a^2+a+1-a^2+5a-6-6a+6\right]}$$

$$=a^3-1-(1+a)$$

$$=a^3-a-2$$

2. Dadas las proposiciones p, q y r. Simplifique

$$r\Rightarrow\left[\left(r\vee\overline{p}\right)\wedge\left(\overline{p}\Rightarrow\left(q\wedge\overline{r}\right)\right)\right]$$

Solución:

$$=r\Rightarrow\left[\left(r\vee\overline{p}\right)\wedge\left(\overline{p}\Rightarrow\left(q\wedge\overline{r}\right)\right)\right]$$

$$=\overline{r}\vee\left[\left(r\vee\overline{p}\right)\wedge\left(p\vee\left(q\wedge\overline{r}\right)\right)\right]$$

$$=\left[\overline{r}\vee\left(r\vee\overline{p}\right)\right]\wedge\left[\overline{r}\vee\left(p\vee\left(q\wedge\overline{r}\right)\right)\right]$$

$= \quad V \quad \wedge \left[p \vee \left(\bar{r} \vee \left(q \wedge \bar{r}\right)\right)\right]$

$= \left[p \vee \left(\bar{r} \vee \left(q \wedge \bar{r}\right)\right)\right]$

$= \left[p \vee \bar{r}\right]$

3. El padre tiene 32 años; el hijo 5 años. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre diez veces mayor que la del hijo?

Solución:
Sea x la cantidad de años en los cuales el padre logra tener diez veces la edad de hijo

	Padre	Hijo
Edad Actual	32	5
x años más	32 + x	5 + x

Como en "x" años más el padre logra tener diez veces la edad del hijo, se debe cumplir la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} 32 + x &= 10(5 + x) \\ 32 + x &= 50 + 10x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = -2$ significa que hace dos años la igualdad buscada se cumplió.

De ahí que en el futuro la edad del padre **no será nunca 10 veces superior a la del hijo**

4. Encuentra la solución en IR a la siguiente inecuación

$$\frac{\sqrt[4]{x^2 - x - 2}\left(x^4 - x^2 - 30\right)}{\sqrt[3]{2x + 3}} \leq 0$$

Solución:
- Restricciones
  - $2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}$
  - $x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) \geq 0$

  Ahora realizamos la tabla de Ruffini

	-oo	-1	2	oo
x – 2	-	-	+	
x + 1	-	+	+	
(x + 1)(x – 2)	+	-	+	

  Por lo tanto, $x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[2,\infty\right[$

  Entonces la **restricción final** está dada para los $x \in \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[2,+\infty\right[\right) - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Además, podemos señalar que:

- $\sqrt[4]{x^2 - x - 2} \geq 0 \qquad \forall \in \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[2,+\infty\right[\right)$

- $\left(x^4 - x^2 - 30\right) = \left(x^2 + 5\right)\cdot\left(x^2 - 6\right) = \left(x^2 + 5\right)\cdot\left(x - \sqrt{6}\right)\cdot\left(x - \sqrt{6}\right)$
  Donde $x^2 + 5 > 0 \quad \forall x \in IR$

Con los datos anteriores se concluye que la solución de la inecuación depende de

$$\frac{\left(x - \sqrt{6}\right)\cdot\left(x + \sqrt{6}\right)}{\sqrt[3]{2x + 3}} \leq 0$$

Ahora se realiza la tabla de Ruffini

-oo $\quad -\sqrt{6} \quad$ -3/2 $\quad \sqrt{6} \quad$ oo

$x + \sqrt{6}$	-	+	+	+
$x - \sqrt{6}$	-	-	-	+
$\sqrt[3]{2x + 3}$	-	-	+	+
$\frac{\left(x - \sqrt{6}\right)\cdot\left(x + \sqrt{6}\right)}{\sqrt[3]{2x + 3}}$	-	+	-	+

Con lo que concluimos que la ***solución parcial*** de la inecuación está definida para

$$x \in \left]-\infty, -\sqrt{6}\right] \cup \left]-\frac{3}{2}, \sqrt{6}\right]$$

Para finalizar, la ***Solución Final*** está dada por la intersección de la Solución parcial y la restricción inicial quedando:

$$x \in \left]-\infty, -\sqrt{6}\right] \cup \left]-\frac{3}{2}, -1\right] \cup \left[2, \sqrt{6}\right]$$

5. Determine el conjunto solución de siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{ccc} \sqrt{4x^2 - 8} & \leq & \frac{1}{2} - x \\ |3x - 5| & \geq & 9 \end{array}\right|$$

Solución:
Del sistema de inecuaciones dado,

$$\left.\begin{array}{cccc} \sqrt{4x^2 - 8} & \leq & \frac{1}{2} - x & (a) \\ |3x - 5| & \geq & 9 & (b) \end{array}\right|$$

Resolvemos las dos inecuaciones por separado e intersectamos sus resultados

- Sea $\sqrt{4x^2 - 8} \leq \frac{1}{2} - x$

  Restricción $4x^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2$
  $$\Rightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$$

  Por otro lado $\frac{1}{2} - x \geq 0$, de lo que se desprenden 2 casos

  - **Caso 1** Si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$$\sqrt{4x^2-8} \le \frac{1}{2} - x$$
$$4x^2 - 8 \le \frac{1}{4} - x + x^2$$
$$3x^2 + x - \frac{33}{4} \le 0$$ Resuelven la ecuación de segundo grado
$$3\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{11}{6}\right) \le 0$$

Realizamos la tabla de ruffini, obtenemos el siguiente resultado

	-oo — -11/6	-11/6 — 3/2	3/2 — +oo
x – 3/2	-	-	+
x +11/6	-	+	+
3(x -3/2)(x+11/6)	+	-	+

Con lo cual podemos decir que, la solución parcial del caso 1 está dada para

$$\forall x \in \left[-\frac{11}{6}, \frac{3}{2}\right]$$

Para obtener la solución del caso 1, intersectamos la solución parcial con la restricción del caso. Por lo tanto, l la ***solución final del caso 1*** está dada

$$\forall x \in \left[-\frac{11}{6}, \frac{1}{2}\right]$$

- **Caso 2** Si $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$\sqrt{4x^2-8} \le \frac{1}{2} - x$$
$$positivo \le negativo$$

La solución final del caso 2 es vacía

Para terminar la **solución final** debemos unir las soluciones de los casos intersectándolas con la restricción original, resultando:

$$\forall x \in \left[-\frac{11}{6}, -\sqrt{2}\right]$$ la solución para (a)

- Sea $|3x-5| \ge 9 \quad \Rightarrow \quad 3x - 5 \ge 9 \quad \vee \quad 3x - 5 \le -9$

$$x \ge \frac{14}{3} \quad \vee \quad x \le -\frac{4}{3}$$

Solución de la inecuación (b) $x \in \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{14}{3}, +\infty\right[$

Para Concluir la solución final, la encintramos de la intersección de la solución final de (a) y (b) resultando

$$\forall x \in \left[-\frac{11}{6}, -\sqrt{2}\right]$$