Guía N°11

Funciones

1. Grafique las siguientes relaciones. Diga si son funciones.
   a. $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$
   b. $|y| = 1 - |x|$
   c. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
   d. $f(x) = |x-3| + |x+4|$
   e. $f(x) = |x-3| - |x+4|$
   f. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & , \text{ si } \quad x < 0 \\ x & , \text{ si } \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & , \text{ si } \quad x > 2 \end{cases}$

2. Dada la sigte. Función: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$
   a. Calcule $f(1)$; $f(3)$; $f(\sqrt{3})$; $f(f(2))$; $f\left(\dfrac{f(-2)-f(-1)}{f(4)}\right)$; $f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
   b. Halle x tal que $f(x) = -2$
   c. Halle x tal que $f(x) = f(x+1)$

3. Dada las siguientes relaciones de IR en IR. Encuentre el dominio y el recorrido para que sean funciones:
   a. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ Sol: $Domf = [-3,3] \wedge \operatorname{Re}cf = [0,1]$
   b. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ Sol: $Domf =]1,\infty[\wedge \operatorname{Re}cf =]0,\infty[$
   c. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ Sol: $Domf =]-1,0] \cup]1,\infty[\wedge \operatorname{Re}cf = [0,\infty[$

4. Verifique si las siguientes funciones son biyectivas, y en el caso de no serlo, hacer las restricciones necesarias para que lo sean.
   a. $f: IR \to IR \quad tal \quad que \quad f(x) = 2x - \sqrt{6}$
   b. $f: IR - \{0\} \to IR \quad tal \quad que \quad f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
   c. $f: [10;\infty[\to [100;\infty[\quad tal \quad que \quad f(x) = x^2$
   d. $f: IR \to IR \quad tal \quad que \quad f(x) = \dfrac{2x}{x^2+10}$
   e. $f:]\infty;6] \to IR \quad tal \quad que \quad f(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x}{3}} + 1$
   f. $f: IR \to IR \quad tal \quad que \quad f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$
   g. $f:]2,\infty[\to IR \quad tal \quad que \quad f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}$

h. $f: IR-\{5\} \to IR$ tal que $f(x)=\dfrac{6}{x-5}$

i. $f:[0;2]\cup[3;5] \to IR$ tal que $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[0;2] \\ 4-x & x\in[3;5] \end{cases}$

5. Determine si las siguientes funciones son pares o impares, descomponga en parte par e impar
   a. $f(x)=5x$
   b. $f(x)=x^2+1$
   c. $f(x)=x^3+x^2+1$
   d. $f(x)=x^4+x^3+x^2+1$
   e. $f(x)=|x|+x^2$
   f. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$

6. Dada las siguientes relaciones de IR en IR. Encuentre el dominio y recorrido para que las siguientes funciones tengan inversa. Encuentre la inversa.
   a. $f(x)=5x-1$
   b. $f(x)=4-\sqrt{1-x^2}$
   c. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-2}$
   d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

7. Determinar A para la función $f: A\subseteq IR \to B$, donde $f(x)=-4+\dfrac{3}{2}\sqrt{-x^2-4x}$ y $B=recf=[-3,-1[$. Sol: $A=[-3.89;-0.11]$

8. Dada la siguiente expresión $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$ y la función $g(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt{3}}$. Encuentre $Dom(g\circ f)$; $Rec(g\circ f)$; $(g\circ f)(x)$

9. Determine $(f\circ g)(x)$ en los casos que se pueda. Además calcule su dominio y recorrido.
   a. $f: IR^+ \to IR^+$ tal que $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g: IR-\{1\}\to IR$ tal que $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$
   b. $f:[0;10]\to[0;103]$ tal que $f(x)=x^2+3$ $\quad g:[1;\infty[\to[20;\infty[$ tal que $g(x)=\sqrt{x-1}+20$
   c. $f:[0;1]\to[0;1]$ tal que $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 1-x & 1<x\le 2\end{cases}$
   d. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 2\le x\le 5 \\ 4 & 5<x\le 12\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} 3x+4 & 0\le x\le 2 \\ x+1 & 2<x<4\end{cases}$

10. Sea $g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad h(x) = x^2$ $\quad l(x) = x + 1$

Determinar una función talque $\quad (l \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$

11. Sean a, b, c y d números reales fijos y sean f y g funciones lineales definidas por:

$$f(x) = ax + b \quad , \quad g(x) = cx + d$$

Encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes a, b, c y d de modo que:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

12. Encontrar $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$ y simplifique la expresión correspondiente para las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

13. Con una hoja rectangular de cartón cuyas dimensiones son 30 cms por 15 cms. se va a construir una caja abierta recortando cuadrados iguales de lado en cada una de las esquinas y luego doblándolos bordes hacia arriba. Exprese el volumen de la caja en función de.

14. La magnitud M de un temblor en la escala de Richter es

$$M = 0.67 \log (0.37\,E) + 1.46$$

donde E es la energía de un temblor en kilowatt - horas. Encontrar la energía de un temblor de magnitud 6.6.

15. Cuando el aire seco se desplaza hacia arriba se dilata y se enfría a razón de aproximadamente 1º C por cada 100 mts. de elevación, hasta aproximadamente 12 Km.
    a. Si la temperatura a nivel del suelo es 20º C, obtenga una fórmula para la temperatura correspondiente a la altura h.
    b. ¿Qué gama de valores de la temperatura se puede esperar si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 Km?

16. La razón de cambio de la presión atmosférica P con respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. Esta relación implica que:

$$P(h) = P_0 \, e^{kh}$$

Donde P_0 es la presión a nivel del mar y k es la constante de proporcionalidad. A una temperatura de 15º C la presión es de 101.3 kPa a nivel del mar y de 87.14 kPa a una altitud $h = 1000\ m$. ¿Cuál es la presión atmosférica a la que trabajan los mineros de Chuquicamata?

17. Luis da una ventaja a Andrés de 10 metros en una carrera de 100 metros. Si Andrés recorre 6 metros en cada segundo y Luis recorre 8 metros en cada segundo.
    a. Dibuja el gráfico que relacione la distancia recorrida respecto del tiempo empleado.
    b. ¿En cuánto tiempo alcanzar Luis a Andrés?

18. Un vendedor callejero compra cajas que traen 32 helados por un valor de $ 2000, los cuales vende en $ 100 cada uno.
    a. Establecer una ecuación que muestre la *ganancia* del vendedor por un número n de helados
    b. Determinar cuántos helados debe vender para ganar una U.F por día.

19. Un taxista cobra $ 250 por tarifa mínima y luego $ 50 por cada 200 mts. De recorrido. Un segundo taxista no cobra tarifa mínima, pero cobra $60 por cada 200 mts
    a. Plantear la "ecuación de cobro por viaje" correspondiente a cada taxista
    b. Determinar en cuál taxi me conviene viajar una distancia de 1.600 metros
    c. ¿En qué distancia ambos taxistas cobran lo mismo?

20. Para estudiar el ritmo al que aprenden los animales, un grupo de estudiantes de psicología realizaron un experimento en el que una rata blanca era enviada través de un laberinto en el laboratorio. Los estudiantes encontraron que el tiempo requerido por la rata para atravesar el laberinto en la n-ésima prueba era aproximadamente de $f(n) = 3 + \frac{5}{n}$ minutos
    a. ¿Cuál es el dominio de la función?
    b. ¿Cuánto tiempo se tomará la rata para atravesar el laberinto en la tercera prueba?

21. La cantidad de calor H (en joules) requerida para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura T (en C°) de la atmósfera. A 10° C esta conversión requiere 2480 joules, y cada aumento de 15° C baja 40 joules la cantidad de calor necesaria. Exprese H en términos de T.

22. La rapidez "y" de crecimiento (en libras por mes) de un menor está relacionada con el peso actual "x" en libras por la fórmula:

$$y = cx(21 - x)$$

Donde "c" es una constante positiva y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se presentará la máxima rapidez de crecimiento?

23. La ley de Poiseuille indica que la rapidez de la circulación sanguínea F (en *L/min.*), que hay en una arteria principal, es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio "r" y la presión sanguínea P.
    a. Encuentre F en términos de P, r y una constante de proporcionalidad k.
    b. Durante un ejercicio fuerte, la rapidez normal de la circulación sanguínea a veces se triplica. Si el radio de una arteria importante aumenta 10%, ¿Cuánto más rápido debe bombear el corazón?

24. Un arco tiene una forma de parábola $y = 4 - x^2$. Se escoge un punto (x,y) de la parábola y se coloca un rectángulo bajo el arco.
    a. Expresa el área “A” del rectángulo en términos de “x”.
    b. Si x = 1, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Hallar la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área.

25. En un estanque se introducen 1000 especimenes de un año de edad. El número de truchas todavía vivas después de “t” años se calcula mediante:

$$N(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^t$$

Utilizar la grafica de N para hallar cuando estarán vivos 500 ejemplares

26. La relación de Ehrenberg $\ln(W) = \ln(2{,}4) + 1{,}84 \cdot h$ es la fórmula empírica que relaciona la altura “h” en mts. Con el peso promedio “W” en kg. Para niños entre 5 y 13 años de edad.
    a. Expresa W como función de h, que no contenga ln.
    b. Calcula el peso promedio de un niño de 8 años que mide 1.5 mts.

27. La longitud L de un pez se relaciona con su edad por medio de la fórmula de crecimiento de Von Bertalanffy

$$L = a \cdot \left(1 - b \cdot e^{-k \cdot t}\right)$$

Donde a, b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. Resuelva la ecuación para “t” a fin de obtener una fórmula que permita calcular la edad de un ejemplar a partir de su longitud.

28. La presión P de vapor de un líquido (en lb/pulg^2), que es una medida de su volatibilidad, se relaciona con su temperatura T (en F°) por la ecuación de Antonie

$$Log(P) = a + \frac{b}{c + T}$$

Donde a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente con un incremento en su temperatura
    a. Exprese P en función de T
    b. Exprese P en C°.

29. Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha calculado que el nivel “y” de contaminantes disminuiría según la fórmula

$$y = y_0 \cdot e^{-0{,}3821 \cdot t}$$

donde t es el tiempo en años y y_0 el nivel de contaminantes en que dejó de haber más contaminantes. ¿Cuantos meses tardaría en limpiarse 50% de los contaminantes?