Funciones

1. Introducción

1.1 Relaciones

Dados dos conjuntos A y B una relación definida de A en B es un conjunto de parejas ordenadas que hacen verdadera una proposición, dicho de otro modo una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B

Ejemplo
Si A={2,3} y B={1,4,5} , encontrar tres relaciones definidas de A en B.

El producto cartesiano de AxB está conformado por las siguientes parejas:

$$AxB=\{(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,4),(3,5)\}$$

Y cada uno de los siguientes conjuntos corresponden a relaciones definidas de A en B:

$$R_1= \{(2,1),(3,1)\}$$
$$R_2= \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$
$$R_3= \{(2,4),(3,5)\}$$

La relación R_1 se puede definir como el conjunto de parejas cuyo segundo elemento es 1, esto es, $R_1= \{(x, y) / y =1\}$.

R_2 está formada por las parejas cuya primera componente es menor que la segunda componente, $R_1= \{(x, y) / x < y\}$

R_3 está conformada por todas las parejas que cumplen que la segunda componente es dos unidades mayor que la primera, dicho de otro modo, $R_1= \{(x, y) / y = x +2\}$

Así se puede continuar enumerando relaciones definidas a partir de AxB. Como se puede ver la regla que define la relación se pude escribir mediante ecuaciones o desigualdades que relacionan los valores de *x* e *y*. Estas reglas son un medio conveniente para aparear los elementos de los dos conjuntos.

Ejemplo
Dados los conjuntos C = {1,-3} y D = {2,3,6}, encontrar todos los pares ordenados (*x*, *y*) que satisfagan la relación.

$$R= \{(x, y) / x + y =3\}$$

El producto cartesiano de CxD está formado por los siguientes pares ordenados

$$CxD = \{(1,2),(1,3),(1,6),(-3,2),(-3,3),(-3,6)\}$$

Las parejas ordenadas que satisfacen que la suma de sus componentes sea igual a 3 son:

R= {(1,2),(-3,6)}

Toda relación queda definida si se conoce el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla mediante la cual se asocian los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto de partida corresponde al conjunto **C**, el conjunto de llegada es el conjunto **D** y la expresión ***x* + *y* =3** es la regla que asocia los elementos de los dos conjuntos.

1.2 Dominio y rango de una relación

El dominio de una relación es el conjunto de pre-imágenes, es decir el conjunto formado por los elementos del conjunto de partida que están relacionados. Al conjunto de imágenes, esto es, elementos del conjunto de llegada que están relacionados se le denomina recorrido.

Ejemplo
Sea A={1,2,3,4} y B={4,5,6,7,8} y R la relación definida de A en B determinada por la regla "*y* es el doble de *x*" o "*y* = 2*x*", encontrar dominio y rango de la relación.

Las parejas que pertenecen a la relación R son:

R={(2,4),(3,6),(4,8)}

En esta relación vemos que: "4 es el doble de 2", esto es, "4 es la imagen de 2 bajo R", dicho de otro modo, "2 es pre-imagen de 4".

Así, el dominio y recorrido es:

Dominio = {2, 3,4}

Rec = {4, 6,8}

- ¿Qué relación hay entre el Dominio y el conjunto de partida?
- ¿Todo elemento del conjunto de llegada es elemento del rango?

1.3 Representación gráfica de las relaciones
Las parejas ordenadas se pueden representar gráficamente por medio de diagramas sagitales o por medio de puntos en el plano cartesiano. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo
Si A ={1,2,3,4,5} y B ={1,3,5,7,9} y R la relación definida por la regla

R = {(*x*, *y*) / *y* = 2*x* +1}, graficar R.

Los pares ordenados que pertenecen a la relación son:

R = {(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)}

Y la gráfica correspondiente es la siguiente:

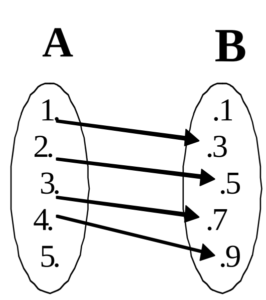
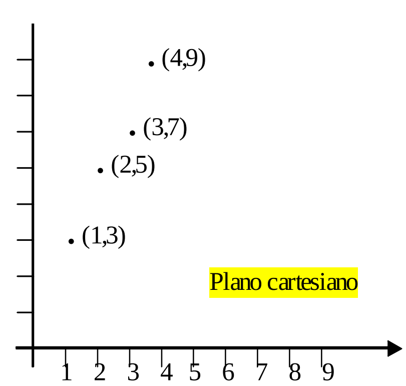


Diagrama sagital



Plano cartesiano

2 Funciones

Para describir matemáticamente los diferentes fenómenos de la naturaleza o los resultados de análisis entre ellos no siempre basta con números o conjuntos, sino que se hace necesario establecer una correspondencia entre los elementos de los diferentes conjuntos, de tal manera que elementos de un conjunto estén relacionados mediante alguna regla con uno o más elementos de otro conjunto.

En la vida diaria nos encontramos (a veces sin darnos cuenta) con la noción de correspondencia**.** Por ejemplo, a cada persona le corresponde una fecha de nacimiento, a cada libro le corresponde un número de páginas, a cada objeto le corresponde un peso, a cada rectángulo le corresponde un área, a cada número no negativo le corresponde su raíz cuadrada, etc.

En cada uno de los ejemplos anteriores hay dos conjuntos D y C entre los que se dá la correspondencia.

En el primer ejemplo el conjunto D es el conjunto de personas y el conjunto C es el conjunto de fechas (día, mes y año).

En el segundo ejemplo el conjunto D es el conjunto de libros y el conjunto C es un número entero (el número de páginas).

¿Cuáles serían los conjuntos D y C para los otros tres ejemplos?

Estas correspondencias se ilustran a menudo mediante diagramas como el que sigue:

Con esta idea intuitiva, podemos introducir ella concepto de función; que es esencial en la teoría matemática y en las ciencias y disciplinas que se nutren de ella. Por lo general en todo estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos o que necesite el análisis empírico emplea este concepto matemático. El concepto de función se introduce a partir de ejemplos y elementos relacionados con el tema para más adelante tratar algunas funciones elementales con sus principales propiedades.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra, por ejemplo el número de bacterias en un cultivo depende de la cantidad de alimento presente. El área del círculo depende de su radio. La utilidad de una empresa depende del número de artículos vendidos.

Desde otro punto de vista podemos concebir a una función como un aparato de cálculo. La entrada es el dominio, los cálculos que haga el aparato con la entrada son en sí la función y la salida sería la imagen.

Ejemplos

1. La ley que relaciona el valor del área de un cuadrado con la longitud de su lado es una función. Sabemos que la expresión que nos relacionas ambas variables es $A = l^2$. Observa que dependiendo del valor del lado del cuadrado vamos a obtener distintos valores en el área del mismo. Así, aparece una variable que no depende de nada (variable independiente: la l) y otra que si depende de los valores elegidos en la l (variable independiente: la A). Puedes pues construir una tabla con algunos valores:

l	A
1	1
2	4
10	100
1/2	1/4
-3	No existe
0,5	0,25

En esta función, el dominio será el conjunto de todos los números reales positivos pues el lado de un cuadrado nunca puede tener una medida negativa. Su recorrido es también el conjunto de todos los números positivos pues un área no puede ser negativa. Además siempre existe un cuadrado que tenga por área cualquier número positivo (bastará construir un cuadrado cuyo lado sea la raíz cuadrada del área elegida).

2. Cualquier expresión del tipo y = f(x) de las estudiadas en las clases anteriores (ecuación de la recta, parábola) representa una función real de variable real.

Definición

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función definida de A en B es una regla que asocia a cada elemento del conjunto A uno y solamente un elemento del conjunto B. Esto es, una función es toda relación que cumple las siguientes condiciones:

i) Todo elemento de A esta relacionado

ii) Cada elemento de A tiene una y solo una imagen en B

Ejemplos

1. El volumen de un gas está determinado por la presión a unas temperaturas determinadas, esta relación viene dada por la ley de Boyle-Mariotte:

$$v = \frac{c}{p}$$

donde *v* representa el volumen del gas en litros, *p* es la presión en atmósferas y *c* es una constante de proporcionalidad.
Se observa que al variar la presión a la que está sometido el gas varía el volumen, es decir los valores del volumen dependen de los valores de la presión del gas y para cada valor de la presión existe un único valor del volumen.

2. Calcula la imagen de los números 0, -1, 2, y 10 en las siguientes funciones

a. $f(x) = 5x^2 + 2x-1$
b. $f(x) = 3$
c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
d. $f(x) = \dfrac{3x-1}{\sqrt{4-x^2}}$

Dominio de una función

El dominio de una función es el conjunto de valores para los cuales la función está definida, es decir son todos los valores que puede tomar la función.

Ejercicio
Encuentre el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x+4}{x-1}$

d) $f(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = x^3$

Observación

i) Si la función tiene radicales de índice par, el dominio está conformado por todos los números reales para los cuales la cantidad subradical sea mayor o igual a cero.

ii) Si la función es un polinomio, es decir una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

(donde a_0 ,a_1,a_2,..., a_n son constantes y n un entero no negativo), el dominio está conformado por el conjunto de todos los números reales.

iii) Si la función es racional, esto es, si es el cociente dos polinomios, el dominio está conformado por todos los números reales para los cuales el denominador sea diferente de cero.

Recorrido de una función

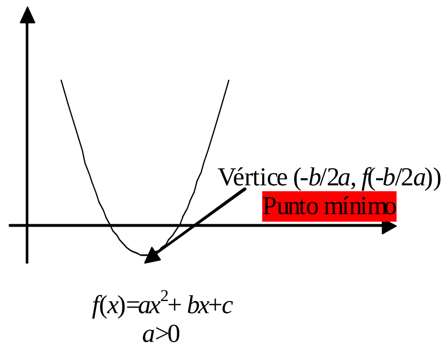
El recorrido es el conjunto formado por todas las imágenes, es decir, es el conjunto conformado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente; estos valores están determinados además, por el dominio de la función. Es decir,

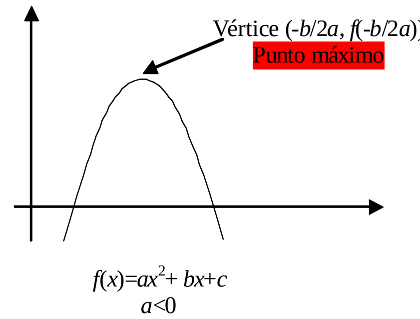
$$\{ y \in B \mid \exists x \in A \quad tal \quad que \quad y = f(x) \}$$

Por lo tanto podemos describir a una función con su dominio y recorrido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f : A \subset IR \quad &\rightarrow \quad B \subset IR \\ x \quad &\rightarrow \quad f(x) \end{aligned}$$

Ejemplo
Toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática, donde a, b, y c son constantes. Su representación gráfica corresponde a una parábola. Y sabemos que el dominio son todos los números reales. Pero, ¿El dominio cuál es?





a) Dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\begin{cases} -2 & si \quad x<-1 \\ -x-3 & si \quad -1\le x<2 \\ x-7 & si \quad x>2 \end{cases}$$

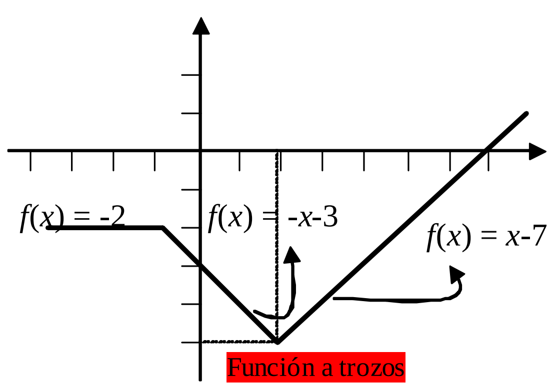
La gráfica se traza por separado para cada uno de los intervalos en que se encuentra definida la función., esto es:

En el intervalo]-1-1[,la función toma el valor constante de –2, ($f(x)$= -2). Por lo tanto su gráfica es la semirrecta paralela al eje X que corta al eje Y en –2.

En el intervalo [-1,2[se tiene una función lineal ($f(x)$ = -x-3) cuya pendiente es negativa.

Por último, en el intervalo]2, 1[la función es también lineal ($f(x)$= x-7) cuya pendiente es positiva.

Se puede ver que los intervalos son abiertos en 2, por lo tanto la función no está definida en x = 2, gráficamente este hecho se representa con un agujero en ese punto.



Definición
La gráfica de la función f es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación y = f(x)

Ejercicios
Encuentre el dominio y recorrido de las siguientes funciones

a) $f(x)=c \Rightarrow f(x)=-5/4$ función constante
b) $f(x)=ax+b \Rightarrow f(x)=-2x-6$ función lineal
c) $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(x)=x^2+x+1$
d) $f(x)=c\cdot x^n \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2x^3 \\ f(x)=x^4+1 \end{cases}$ función potencia
e) $f(x)=\dfrac{ax-b}{x-c} \Rightarrow f(t)=\dfrac{2t}{t-1}$ función racional

f) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 2 \\ x-3 & 2<x<4 \\ 5 & x\ge 4 \end{cases}$ función definida a tramos

Observación
Una condición necesaria para que una relación sea función, es que toda vertical, corte al gráfico en un único punto.

Características Principales de las Funciones

Definición
Se dice que una función

$$\begin{array}{lll} f: A\subset IR & \to & B\subset IR \\ x & \to & f(x) \end{array}$$

es :

Inyectiva sí y sólo sí $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

Sobreyectiva sí y sólo si Recf = B

Además si la función es inyectiva y sobreyectiva, se dice que la función es biyectiva.

Ejercicios
Determine dominio y recorrido de las siguientes funciones. Además determine si es biyectiva, si no lo es, redefina para que lo sea:

a) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-3}$
b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
c) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$
d) $f(x)=6x+5$
e) $f(x)=x^2-4x+1$
f) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & x\le -2 \\ x^2-3 & -2<x<0 \\ 5x & x\ge 0 \end{cases}$

Definición
Sea f una función biyectiva

$$\begin{array}{lll} f: A\subset IR & \to & B\subset IR \\ x & \to & f(x) \end{array}$$

Denominamos función inversa de f a

$$\begin{array}{lll} f: B\subset IR & \to & A\subset IR \\ x & \to & f^{-1}(x) \end{array}$$

Conclusión: f tiene inversa si y solamente sí f es biyectiva.

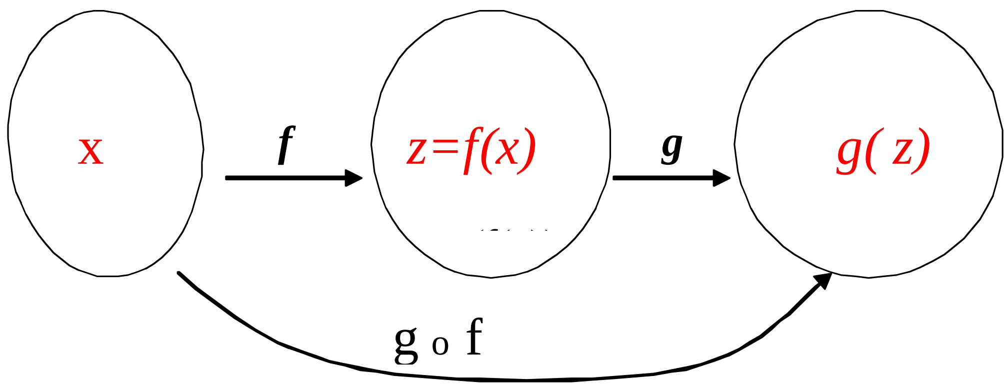
Ejercicios

Obtenga las funciones inversas del ejercicio anterior y grafique, tanto la función como la función inversa.

Definición
Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones tales que $\operatorname{Re} cf \subseteq C$. La función $g \circ f : A \to D$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se denomina la composición de *f* con *g*.

Luego la condición para que $(g \circ f)(x)$ exista es: $\operatorname{Re} cf \cap Domg \neq \phi$

Además, si $\operatorname{Re} cf \subseteq Domg$ *entonces* $Dom(g \circ f) = Domf$



Ejemplos

1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-5}$. Calcule $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$
2. Sea $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 1-x & 1 < x \le 2 \end{cases}$ y $g(x) = x^2$ $\forall x \in [0;1]$. Calcule $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$
3. En Londres se realizó un estudio ambiental que sugiere que el nivel diario de monóxido de carbono en el aire está dado por la fórmula $C(p) = 0.5p + 2$ partes por millón cuando la población sea de p miles. Se estima además, que dentro de t años la población de la comunidad está dada por la función $p(t) = 0.2t^2 + 10$ en miles. Cuál es el nivel de monóxido de carbono en el aire al cabo de 5 años.

Definición
Sean $f, g : A \subseteq IR \to IR$ funciones, se tiene que:

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
c) $(k \cdot g)(x) = k \cdot g(x)$, k constante

Algunas funciones importantes son:

- Función nula, es decir; $\hat{0}(x) = 0$ para todo $x \in IR$
- Función Identidad, es decir; $\hat{1}(x) = 1$ para todo $x \in IR$
- Función parte entera, es decir; $f(x) = [x]$ para todo $x \in IR$
- Función parte decimal, es decir; $f(x) = x - [x]$ para todo $x \in IR$

Definición
Sea $f : A \subseteq IR \to IR$ función, se tiene que:

- f es una función par si $\forall x \in IR$, $f(-x) = f(x)$
- f es una función impar si $\forall x \in IR$, $f(-x) = -f(x)$

Observación

Si la función es par su gráfico es simétrico con respecto al eje vertical, en tanto, si la función es impar el gráfico es simétrico con el origen.

Observación
Existen funciones que no son ni pares ni impares. Luego estas mismas, las podemos separar en su parte par e impar. Es decir;

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x)$$

Donde

$$f_p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$$

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

Ejercicios
Separe en las siguientes funciones, la parte par e impar de estas:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Definición
Una función *f* es (estrictamente) creciente si para cualquier par de puntos *a* y *b* de su dominio, con *a*<*b* , se tiene que (f(a) < f(b).) f(a) ≤ f(b).

f es (estrictamente) decreciente, si para cualquier par de puntos *a* y *b* de su dominio, con *a*<*b* , se tiene que (*f*(*a*)>*f*(*b*)) f(a) ≥ f(b).

4. Funciones Exponenciales

Sea $b > 0 \wedge b \neq 1$ la función exponencial con base b es $f(x) = b^x$

Ejemplos
Grafique las siguientes funciones

1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Algunas de las características más importantes de estas funciones son:

a) El dominio es el conjunto de todos los números reales
b) El recorrido son sólo los números positivos
c) La intersección con el eje y siempre es en 1
d) La función es creciente o decreciente, depende del valor de b.

Ejemplos
Obviamente podemos existen funciones que nacen a partir de las exponenciales como las siguientes:

1. $f(x) = 2^{3x+5}$
2. $f(x) = 2^{4x^2}$

3. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

5. Funciones Logarítmicas

La función logarítmica con base b, $f(x) = \log_b(x)$ y la función inversa es $f(x) = b^x$

Propiedades

$\forall x, y \in IR^+$ se tiene que

1. $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
2. $\log_b(\dfrac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$
3. $\log_b(x^A) = A\log_b(x)$ para cualquier A
4. $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(x)}$ cambio de base
5. $\log_b(b) = 1$
6. $\log_b(1) = 0$
7. $y = \log_b(x) \Leftrightarrow x = b^y$
8. $x = b^{\log_b(x)}$
9. $x = e^{\ln(x)}$

Ejercicios

1. Exprese mediante un solo logaritmo
   a. $1 + \log(8) + \log_8(10)$
   b. $3\log_a(b) - \dfrac{1}{2}\log_a(c) - \log_a(b^3) + \log_a(c^{-1/2})$
2. Determine el valor de x
   a. $\log_4(x+2) = \dfrac{-2}{3}$
3. Resuelva las siguientes ecuaciones
   a. $\log_5(\dfrac{x+2}{4x+2}) = 1$
   b. $\log_3(x+2) - 2\log_3(x+5) = 2$
   c. $5^{2x-3} = 7^{4x-9}$
   d. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \ln(2x^2) = 1$
   e. $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}}(2)}{\log_{2x}(2)} + \log_{2x}(2)\cdot\log_{1/2}(2x) = 0$
   f. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
   g. Resuelva el sistema $\left.\begin{array}{r} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y)3^x = 279936 \end{array}\right|$
4. El número de bacterias existentes en un cultivo después de t horas dada por $B(t) = N_0 e^{kt}$
   a. Encuentre k si se sabe que, después de una hora, la colonia ha extendido a 3 veces su población inicial
   b. Encuentre el tiempo en que la colonia se demora en cuadruplicar su tamaño
5. Para extensiones de agua salada o dulce, la intensidad de la luz se reduce a la fórmula $I = I_0 \cdot e^{-K\cdot d}$ donde I es la intensidad de la luz a d pies bajo la superficie. Y K es la

constante de extensión. Dos de los lagos más claros del mundo son el lago Cristal de agua dulce en Wisconsin (K = 0,0485) y el mar Sargasso de agua salada al norte de la India (K = 0,00942). Encontrar la profundidad (con aproximación de un pie) para cual los dos lagos lña luz se reduce a un 10% respecto de la luz de la superficie.