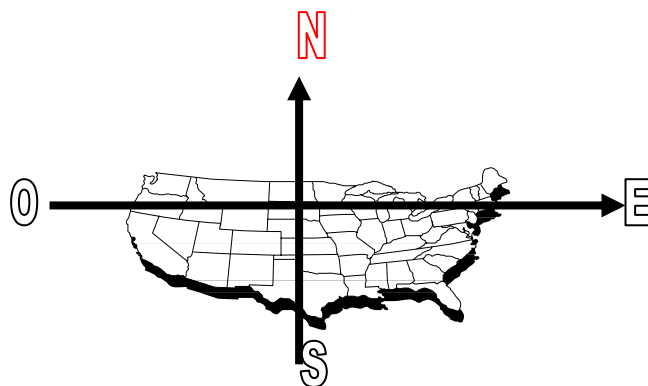


Geometría Analítica

1.	Plano Cartesiano y Rectas.....	1
2.	Producto Cartesiano.....	3
3.	Distancia.....	3
4.	Gráficas de líneas rectas.....	4
5.	Ecuación de la recta.....	6
6.	Paralelismo y perpendicularidad.....	8
7.	Sistemas de ecuaciones lineales.....	9
8.	Distancia de un punto a una recta.....	10
9.	Circunferencia.....	11
10.	Parábola.....	11
11.	Elipse.....	12
12.	Hipérbola.....	13

1. Plano Cartesiano y Rectas

Al viajar en una embarcación por el mar para conocer especies marinas y explorar varias rutas es indispensable llevar una brújula y un mapa de navegación. Con ellos se puede leer la dirección hacia donde se debe girar y la distancia que se debe recorrer. Para consignar las distintas posiciones en un papel, no es suficiente con la recta, sino que se requiere ahora de un plano donde se puedan consignar los dos datos: dirección y distancia recorrida.



La localización de lugares en la superficie del planeta requiere también de dos valores: latitud y longitud que se ubican en un sistema de coordenadas geométricas o geográficas. La latitud, proporciona la localización de un lugar al norte o al sur del ecuador, y la longitud, la localización de un lugar al este

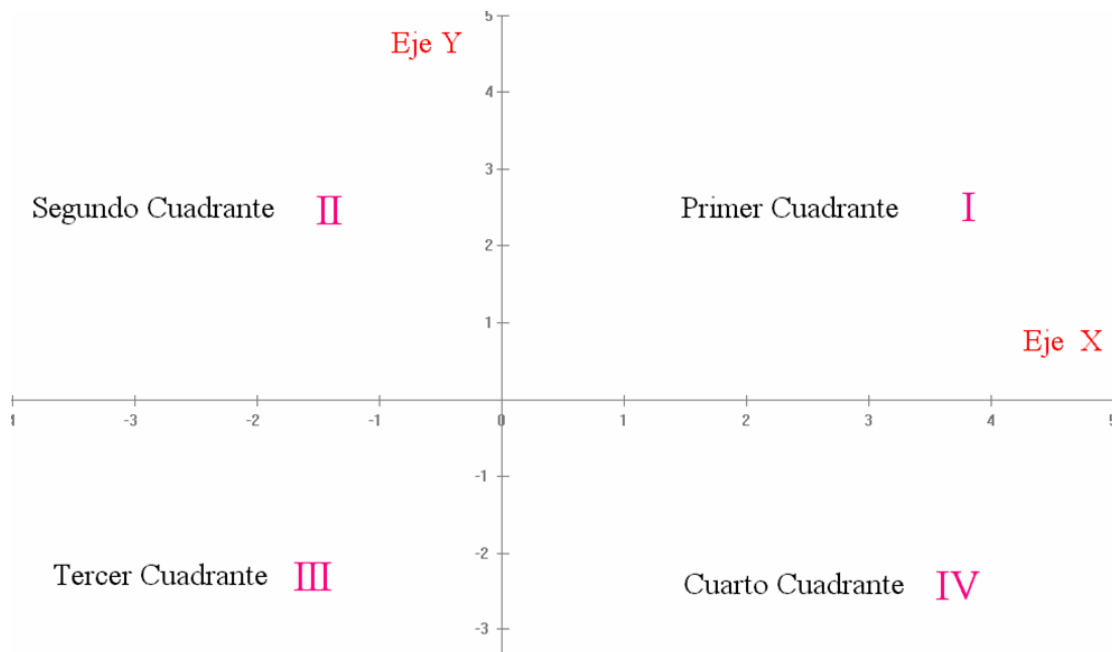


o al oeste de una línea norte - sur denominada meridiano de referencia.

Los Sistema de Coordenadas son sistemas de identificación de elementos en un conjunto de puntos marcados con números. Estos números se denominan **coordenadas** y se puede considerar que dan la posición de un punto dentro del conjunto.

El **Sistema Coordenado Rectangular** o **Cartesiano** es uno de los más usados. Para su construcción, se trazan dos rectas formando un ángulo recto. Estas rectas se denominan **ejes** y el punto de corte **origen**. Los ejes se dibujan habitualmente como la horizontal con dirección positiva hacia la derecha y la vertical con dirección positiva hacia arriba, normalmente se les denomina Eje X y Eje Y, respectivamente.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes que se designan con números romanos: I, II, III y IV, respectivamente.



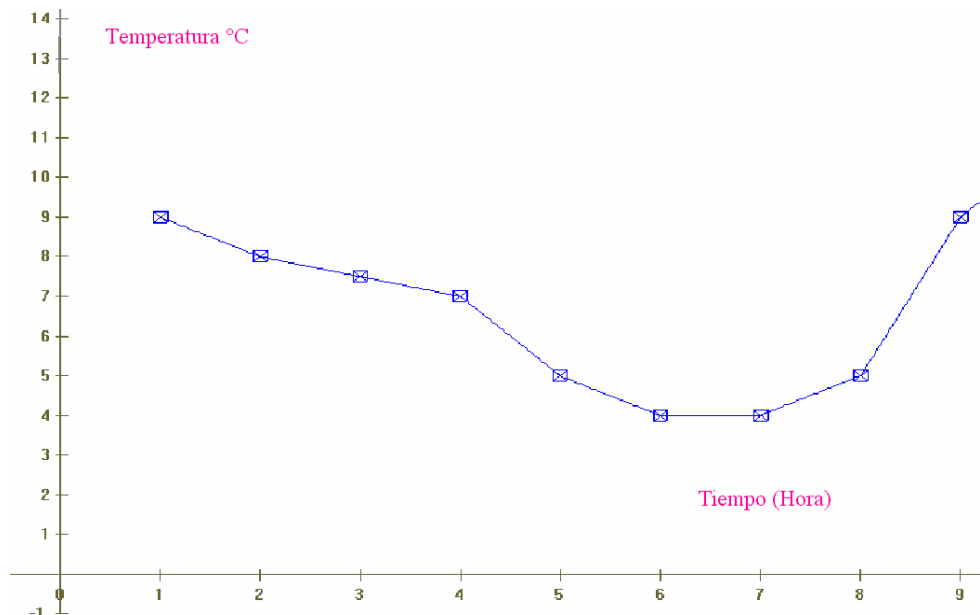
A cada punto P en el plano se le asignan un par de números reales ordenados representados por el símbolo (x, y). El primer elemento del par ordenado se denomina **abscisa** y el segundo **ordenada**.

Ejemplo

En el sistema se representan las diferentes temperaturas horarias en grados centígrados, registradas en el día.

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
°C	9	8	7.5	7	5	4	4	5	9	11	14

En eje X, se consignaron las horas y en el eje vertical la temperatura observada. Los puntos se unieron para tener una mejor visualización del fenómeno atmosférico.



2. Producto Cartesiano

Los anteriores conceptos se pueden generalizar mediante una nueva operación entre conjuntos denominada Producto Cartesiano, la cual se define a continuación:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, se define el **Producto Cartesiano** entre A y B como el conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}, \quad \text{con } A, B \neq \emptyset$$

Tanto en el Eje X, como en el Eje Y, se representa el conjunto de los números reales.

En lo sucesivo, **el par ordenado (x, y) , se entenderá como un elemento de \mathbb{R}^2** , es decir, ubicado en el Sistema Coordenado Rectangular o Cartesiano

3. Distancia

En geometría se requiere el **concepto de distancia entre puntos**, la cual se puede formular a partir del Teorema de Pitágoras:

La distancia entre los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es equivalente a la hipotenusa del triángulo rectángulo, que satisface:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Recuerdo

La distancia entre dos números reales A y B es el valor absoluto $|B - A|$.

Observación

Todo segmento AB contiene un único punto M que cumple $AM \equiv MB$. Se le llama punto medio del segmento.

En otras palabras,

$$[d(A, M) = d(M, B)] \wedge [d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)] \Leftrightarrow M \text{ es el punto medio del Segmento } \overline{AB}$$

4. Gráficas de líneas rectas

Cuando graficamos una recta debemos introducir el concepto de pendiente.

Haciendo uso del Teorema de Pitágoras, definimos la distancia “d” entre dos puntos. Ahora, determinaremos la pendiente de la recta, no vertical, que une dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$.

Se define la pendiente de la recta que une los puntos A y B como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En otras palabras la pendiente es el grado de inclinación que tiene la recta

La siguiente Tabla nos indica los diferentes casos que se presentan en el cálculo de las pendientes.

VALOR DE LA PENDIENTE	RECTA
$m > 0$	Creciente
$m < 0$	Decreciente
$m = 0$	Horizontal
m no definida	Vertical

De otra parte, la lectura de la magnitud de m es la siguiente:

“Por cada incremento en una unidad de la variable x, la pendiente indica el número de unidades de incremento o decremento en la variable y”.

Ejemplo

Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pies y pesan 3 toneladas. Estas ballenas jóvenes son amamantadas durante 7 meses y cuando se destetan, miden la impresionante cantidad de 53 pies y pesan 23 toneladas. En la siguiente tabla se registran los datos anteriores, t denota la edad de la ballena en meses, L la longitud en pies y W el peso en toneladas.

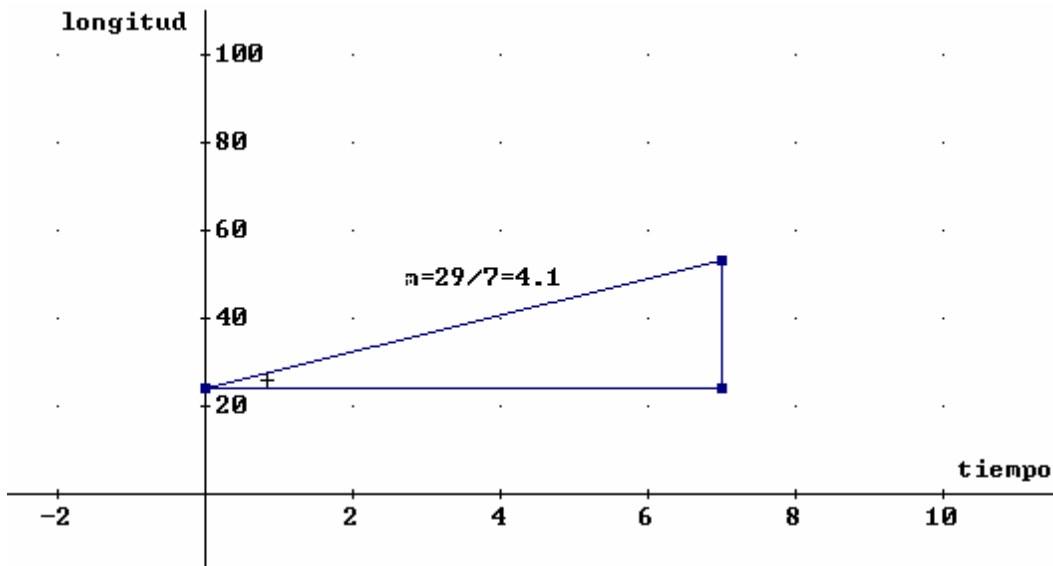
T	0	7
L	24	53
W	3	23

Unos investigadores marinos encontraron que estas variables dos a dos tienen un comportamiento lineal. ¿Qué deducciones se pueden obtener de los anteriores datos?

Representemos los datos en 3 sistemas de coordenadas:

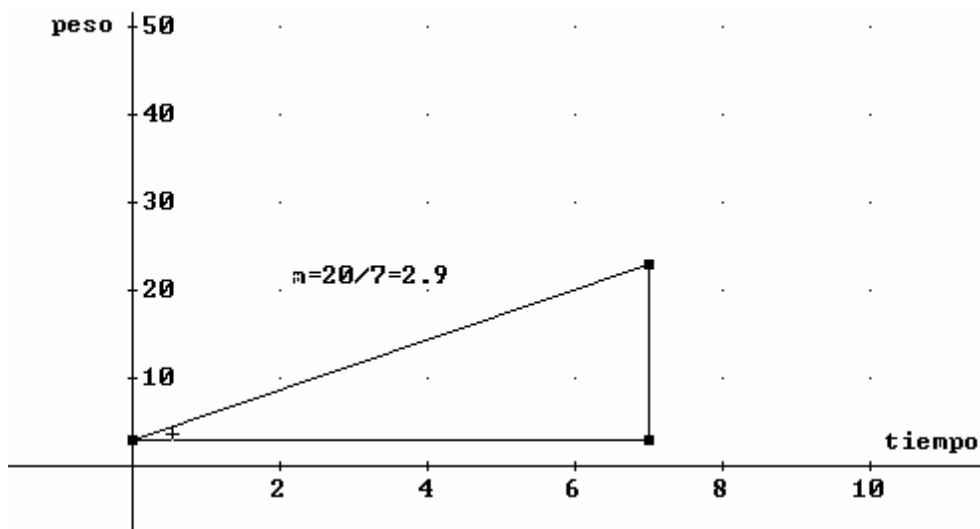
#	Eje Horizontal	Eje Vertical	Puntos
1.	Tiempo	Longitud	A(0,24); B(7,53)
2.	Tiempo	Peso	C(0,3); D(7,23)
3.	Longitud	Peso	E(24,3); F(53,23)

Tiempo - Longitud



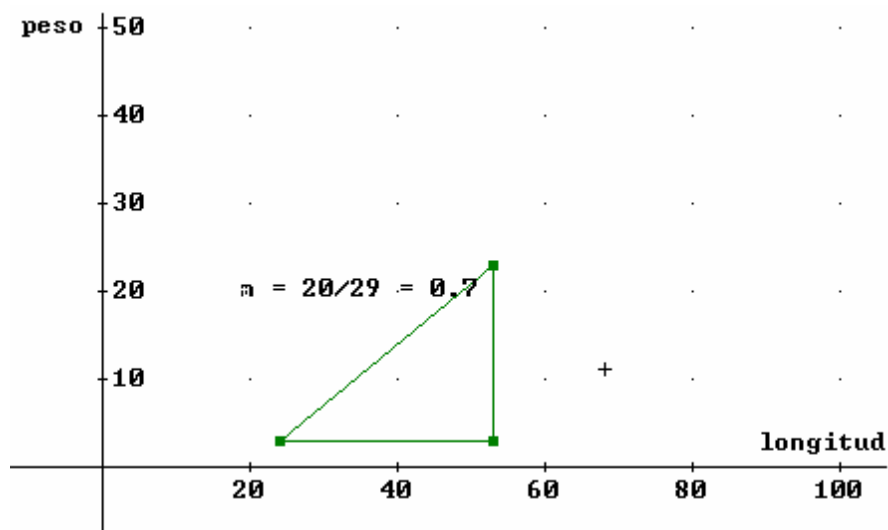
La pendiente de la recta es aproximadamente igual a 4.1, por lo anterior, por cada mes de vida, las ballenas crecen alrededor de 4 pies.

Tiempo - Peso



La pendiente tiene un valor aproximado a 2.9. Por lo tanto, por cada mes de vida, las ballenas ganan casi 3 toneladas de peso.

Longitud – Peso



Se deduce que por cada pie de aumento en la longitud, las ballenas incrementan 0.7 toneladas, aproximadamente.

Los resultados anteriores, se pueden generalizar para algunos rangos de ballenas en etapa de crecimiento. Es importante describir las anteriores rectas, por medio de ecuaciones para poder predecir otras edades, tallas y pesos¹.

5. Ecuación de la recta

De acuerdo con la información adquirida, la recta se puede representar por medio de una ecuación adecuada a las necesidades del investigador. Las cuales las podemos diferenciar en oblicuas, horizontal, vertical.

En general, la ecuación de la recta la podemos escribir de las siguientes maneras:

Ecuación pendiente – intercepto

- $y = mx + b$ m es la pendiente de la recta y b el intercepto con el eje y

Ecuación punto pendiente

- $y - y_0 = m(x - x_0)$ m es la pendiente de la recta y (x_0, y_0) es un punto de la recta

Ecuación general

- $Ax + By + C = 0$

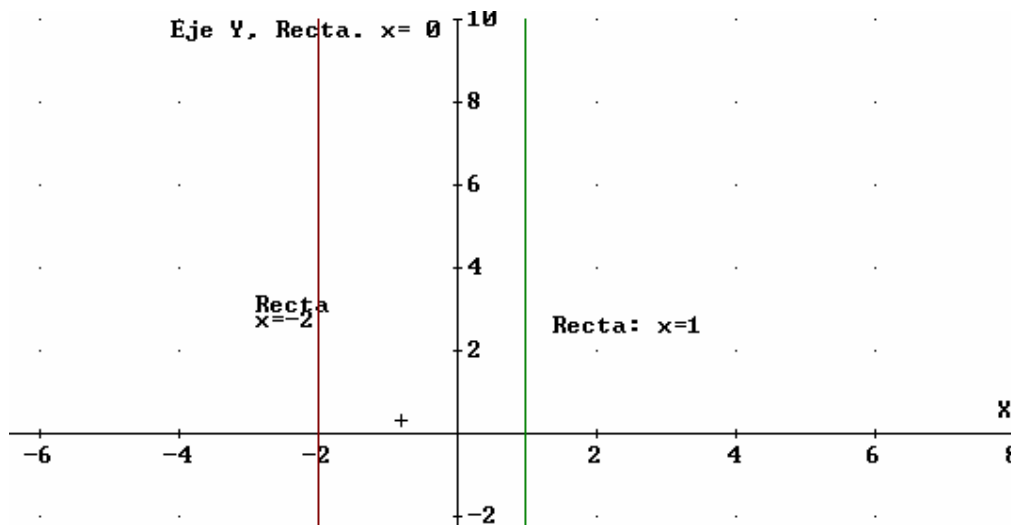
¹ Más información en Ecología Matemática tomo I y II de Jorge González Guzmán

Rectas Verticales

La ecuación de una recta vertical es de la forma

$$x = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Si la constante $c > 0$, la recta se traza a la derecha del eje, si $c < 0$, se traza a la izquierda y si $c = 0$, la recta coincide con el eje vertical. En el siguiente sistema, se trazaron las rectas. $x=1$, $x=0$, $x=-2$.

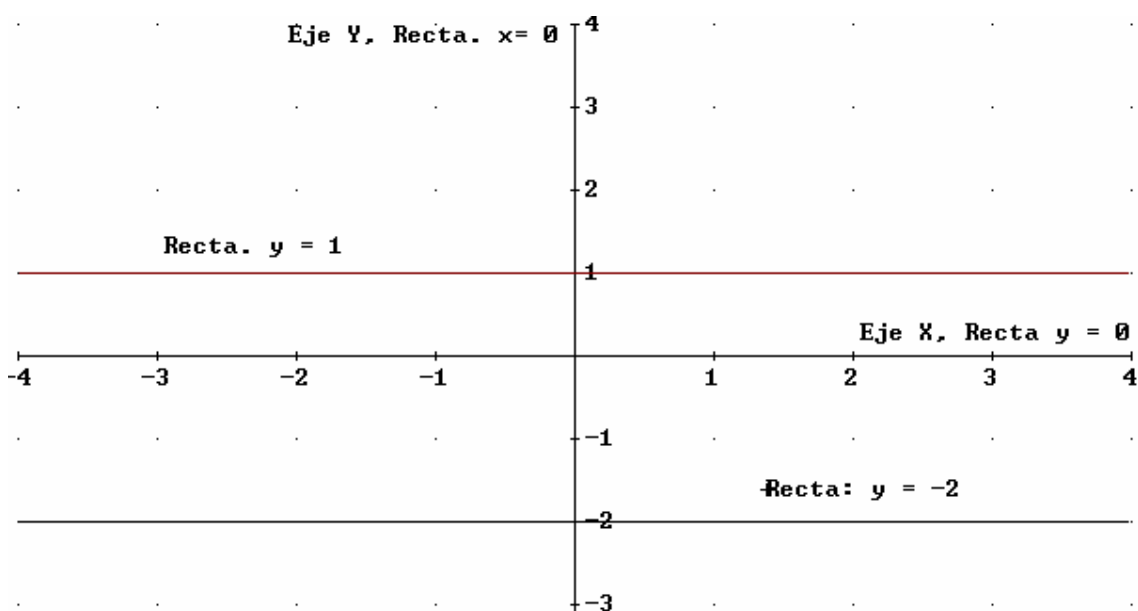


Rectas Horizontales

La ecuación de una recta horizontal es de la forma

$$y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

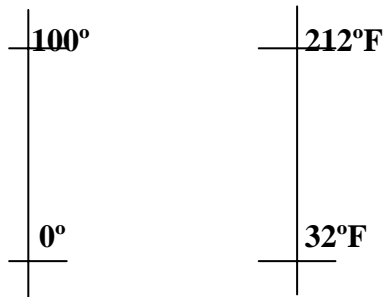
Si la constante $c > 0$, la recta se traza arriba del eje, si $c < 0$, se traza abajo y si $c = 0$, la recta coincide con el eje horizontal. En el siguiente sistema, se graficaron las rectas. $y=1$, $y=0$, $y=-2$.



Ejercicio

Carla tiene un termómetro en escala centígrada y María José uno en escala Fahrenheit, los cuales registraron las siguientes mediciones:

Punto de ebullición del agua:



Punto de congelación del agua:

Escala Centígrada Escala Fahrenheit

Con los datos anteriores, determine diferentes ecuaciones de la recta que relaciona estas dos escalas de medición

6. Paralelismo y perpendicularidad

Dos rectas son paralelas, si permanecen equidistantes independientemente de su prolongación en uno u otro sentido. Las paralelas constituyen la base de muchas figuras geométricas.

Dos rectas son perpendiculares, si se cruzan en ángulo recto. Por tanto, cualquier línea horizontal es perpendicular a cualquier línea vertical y las rectas verticales son paralelas entre sí.

Cuando dos rectas son no verticales, con ayuda de sus pendientes es posible determinar si se trata de rectas paralelas o perpendiculares, así:

Sean L y M rectas no verticales. Sean

$$\begin{array}{ll} L : y = m_1x + b_1 & \text{entonces} \\ M : y = m_2x + b_2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} L \perp M \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \\ L \parallel M \Leftrightarrow m_1 = m_2 \end{array}$$

Ejercicios

- Determine si el cuadrilátero de vértices $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(5,2)$, $D(4,1)$ es un paralelogramo.
- Halle la ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular al lado AD .
- Grafique la situación

7. Sistemas de ecuaciones lineales

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y dos ecuaciones obtenemos tres casos, las rectas pueden ser:

- Son concurrentes *Pendientes diferentes.*
- Son paralelas distintas *Misma pendiente*
- Son paralelas superpuestas. *Son paralelas tienen todos los puntos en común*

Un conjunto de dos ecuaciones de rectas, se denomina sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual se denota por

$$\begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \text{Recta L} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \text{Recta M} \end{array}$$

Los valores a_{11} , a_{12} , a_{21} y a_{22} son los coeficientes de las incógnitas x e y . Los primeros subíndices informan sobre la ubicación del coeficiente, el coeficiente es 1, si está ubicado en la primera ecuación y 2 si está ubicado en la segunda. El segundo subíndice es 1, si es coeficiente de la primera variable x , es 2 si multiplica a la segunda variable y .

La solución del sistema es el conjunto de todos los pares ordenados que satisfacen las dos ecuaciones, por lo tanto se pueden presentar dos casos:

Rectas concurrentes

$$\begin{array}{l} \text{L:} \quad -x + y = 1 \\ \text{N:} \quad x + y = 1 \end{array}$$

La única solución es el punto de corte. Por lo tanto el conjunto solución es un conjunto unitario de la forma $S = \{(x, y)\}$, en el ejemplo, $S = \{(0, 1)\}$.

Rectas paralelas distintas

$$\begin{array}{ll} \text{L:} \quad -x + y = 1 & m = 1 \\ \text{M:} \quad -x + y = -1 & m = 1 \end{array}$$

Ningún par ordenado satisface las dos ecuaciones, el sistema no tiene solución. Por tanto el conjunto solución es el conjunto vacío. $S = \emptyset$

Rectas paralelas superpuestas

$$\begin{array}{ll} \text{L:} \quad -x + y = 1 & m = 1 \\ \tilde{\text{N}}: \quad -2x + 2y = 2 & m = 1 \end{array}$$

Infinitas soluciones, porque todos los puntos satisfacen las ecuaciones del sistema. El conjunto solución está conformado por los pares ordenados que satisfacen la ecuación de la recta, el conjunto es de la forma:

$$S = \{ (x,y) \mid Ax + By + C = 0 \}$$

En la condición del conjunto S se puede reemplazar la ecuación general por cualquier otra ecuación equivalente.

Ejercicio

Un granjero prepara una mezcla de avena y maíz para alimentar a su ganado. Cada onza de avena contiene 4 g de proteína y 18 g de carbohidratos, mientras que cada onza de maíz contiene 3 g de proteína y 24 g de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada uno pueden usarse para cumplir con los requerimientos nutricionales de 200 g de proteínas y 1320 g de carbohidratos por comida? (20,40)

8. Distancia de un punto a una recta

Sean $P = (x_0, y_0)$ un punto cualquiera y $L : y = mx + b$ una recta de pendiente m . Se define la distancia de un punto a una recta, el número no negativo:

$$D(P, L) = \frac{|y_0 - mx_0 - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

En el caso que la recta no tenga pendiente, se tiene que:

$$D(P, L) = |x_1 - x_0|$$

En algunas ocasiones la recta se escribe de este modo $L : Ax + By = C$, por lo tanto

$$D(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Un conjunto de elementos que poseen una determinada propiedad, y que sólo ellos la poseen, constituye un **lugar geométrico**. Esta noción se utiliza habitualmente cuando estos conjuntos son una recta, una circunferencia, una elipse, etc.

A modo de ejemplo, diremos que una ‘recta’ es el lugar geométrico de los puntos alineados con un punto dado A y con una dirección dada v ; es decir, un punto P está en la recta si, y sólo si, el vector determinado por los puntos A y P es paralelo al vector v .

Dentro de la geometría cartesiana, un punto P de coordenadas $(x; y)$ pertenece a un lugar geométrico si, y sólo si, sus coordenadas satisfacen una relación o ecuación.

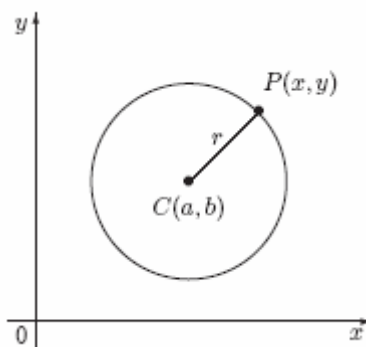
La **ecuación de un lugar geométrico** de puntos P de coordenadas $(x; y)$ es una ecuación entre las variables x e y tal que las coordenadas $(x; y)$ de cualquier punto P satisfacen dicha ecuación si, y sólo si, el punto P pertenece al lugar geométrico.

9. Circunferencia

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro*. La distancia constante al centro se denomina *radio*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

La ecuación se representa en el plano de la siguiente forma.



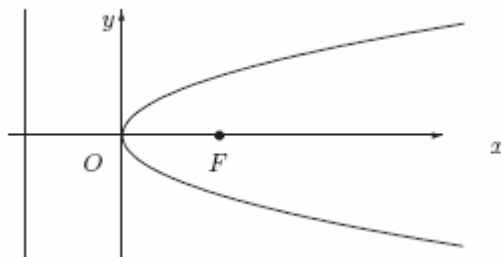
En algunas ocasiones la ecuación de la circunferencia está dada por:

$$x^2 + y^2 + Cx + Dy + F = 0$$

10. Parábola

Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

Consideremos como eje de abscisas a la recta que, pasando por el foco, es perpendicular a la directriz; por eje de ordenadas se toma la recta paralela a la directriz por el punto medio O entre el foco y la directriz; esta recta se denomina *eje* de la parábola. El punto O es el punto en que la parábola corta a su eje y se denomina *vértice* de la parábola. Realizando un procedimiento similar a los anteriores deducimos que la ecuación reducida de la parábola es



$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Para un mejor análisis podemos decir que

Ecuación	Vértice	Eje	Foco	Directriz
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	(h, k)	$y=k$	$(h+p, k)$	$x = k-p$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	(h, k)	$x=h$	$(h, k+p)$	$y=h-p$

En algunas ocasiones la ecuación de la parábola está dada por:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$

11. Elipse

Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante.

Para determinar la ecuación, denotemos por F y F' los focos de la elipse, y sean $2a$ y $2c$ la suma de distancias a los focos y la distancia focal, respectivamente.

Sea $P(x; y)$ un punto genérico y denotemos por $r = PF$ y $r' = PF'$ los radios vectores, de tal forma que $r + r' = 2a$. Por fijar una referencia, supongamos que los focos son los puntos $F(c; 0)$ y $F'(-c; 0)$.

Entonces

$$r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$r' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

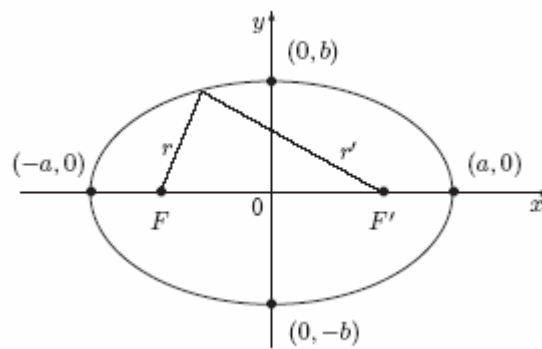
Un cálculo sencillo conduce a

$$\begin{aligned} r &= a + ex \\ r' &= a - ex \end{aligned}$$

donde $e = \frac{c}{a}$ es la *excentricidad* de la elipse. Comparando las dos expresiones para r o r' anteriores deducimos, después de laboriosos cálculos, que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b$. Esta es la ecuación reducida o canónica de la elipse



Para un mejor análisis podemos decir que:
 $a > b$

Ecuación	centro	Eje mayor o principal	Foco
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$(0,0)$	Eje x	$(c,0)$ y $(-c,0)$
$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$	$(0,0)$	Eje y	$(0,c)$ y $(0,-c)$

12. Hipérbola

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante.

Para determinar la ecuación, denotemos por F y F' los focos de la hipérbola, y sean $2a$ y $2c$ la diferencia de distancias a los focos y la distancia focal, respectivamente. Sea $P(x; y)$ un punto genérico y denotemos por $r = PF$ y $r' = PF'$ los radios vectores, de tal forma que

$$r - r' = 2a.$$

Por fijar una referencia, supongamos que los focos son los puntos $F(c; 0)$ y $F'(-c; 0)$. Entonces

$$r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$r' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

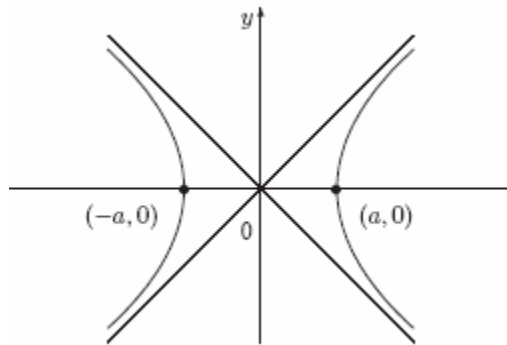
Un cálculo sencillo conduce a

$$\begin{aligned} r &= a + ex \\ r' &= a - ex \end{aligned}$$

donde $e = \frac{c}{a}$ es la *excentricidad* de la hipérbola. Comparando las dos expresiones para r o r' anteriores deducimos,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b$. Esta es la ecuación reducida o canónica de la hipérbola.



Para un mejor análisis podemos decir que:

Ecuación	centro	Eje Transversal	Foco	Asíntotas
$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$(0,0)$	Horizontal Eje x	$(c,0)$ y $(-c,0)$	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$
$\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$	$(0,0)$	Vertical Eje y	$(0,c)$ y $(0,-c)$	$\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 0$