CONJUNTOS

1. Conjuntos

A menudo hemos coleccionado objetos: cuadros, latas de cervezas, libros, etc. En álgebra y en matemáticas para hablar de colecciones nos referimos a un conjunto. Un conjunto es una colección de objetos arbitrarios.

De una colección sólo podemos saber (por ejemplo, por inspección exhaustiva, aunque no siempre es posible) si un objeto está o no está en la colección. Formalmente diremos que el objeto pertenece o no pertenece al conjunto. Y nada más... salvo quizás enumerar la colección... lo cual suele ser difícil o ... en algunos casos y sentidos, imposible.

Definición: Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos.

Notación: Denotaremos con letras mayúsculas A, B, C,… a los conjuntos y con letras minúsculas a, b, c,… a sus elementos.

Sea **U** un conjunto de referencia al que llamaremos **conjunto Universo** y p(x) una función proposicional definida para los elementos de U, podemos obtener un nuevo conjunto:

$$A = \{x \in U \mid p(x)\}$$

que se lee, A es el conjunto de elementos que están U de tal forma que p(x) es verdadero.

Ejemplo

Sea U = IR y $p(x): x^2 - 2x = -1$

$A = \{x \in IR \mid x^2 - 2x = -1\}$ Se dice que este conjunto está definido por **comprensión**

$A = \{1\}$ Se dice que este conjunto está definido por **extensión**

Notación:

a. Si p(x) es verdadera, es decir, x satisface p(x) diremos: $x \in A$
b. Si p(x) es falsa, es decir, x no satisface p(x) diremos: $x \notin A$

Definición

Sea $A^c = \{x \in U \mid \overline{p(x)}\}$ es el conjunto denominado **complemento** de A

Sea $\phi = \{x \in U \mid p(x) \wedge \overline{p(x)}\}$ es el conjunto denominado **vacío**

Notemos que $\phi^c = U$

Además tenemos el conjunto singleton, que son aquellos que contienen un elemento. Por ejemplo $\{2\};\{j\},\{Chile\}$

Definición: Diremos que **A es subconjunto de B**, si todos los elementos de A están en B, es decir, si $x \in A$ entonces $x \in B$. Y denotaremos como $A \subseteq B$

Observación:

a. $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$
b. $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$

Definición

Sean p(x), q(x), y r(x) funciones proposicionales y

$$A = \{x \in U \mid p(x)\},\ \ B = \{x \in U \mid q(x)\},\ C = \{x \in U \mid r(x)\}$$

tenemos lo sigtes. Conjuntos:

a. El conjunto **A intersección B,** que se define $A \cap B = \{x \in U \mid p(x) \wedge q(x)\}$

b. El conjunto **A unión B**, que se define $A \cup B = \{x \in U \mid p(x) \vee q(x)\}$

c. **La diferencia de A y B**, se define $A - B = \{x \in U \mid p(x) \wedge \overline{q(x)}\}$

d. **La diferencia simétrica de A y B** $A \Delta B = \{x \in U \mid p(x) \underline{\vee} q(x)\}$

Observación

Los conjuntos pueden ser *finitos* o *infinitos*. Un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar puede acabar, de lo contrario el conjunto es infinito. Más adelante se dará una definición formal de dichos conjuntos.

Ejemplos

1. Si A es el conjunto de los signos zodiacales, entonces A es finito
2. Si B es el conjunto de los números pares, entonces el conjunto es infinito

Definición Dos conjuntos A y B se dice **comparables** si $(A \subset B) \vee (B \subset A)$ esto es, si uno de los conjuntos es subconjunto del otro, de lo contrario se denominan **no comparables** y se denotan $(A \not\subset B) \vee (B \not\subset A)$

O bien, Si un conjunto B estrictamente contenido en A, es decir, que exista al menos un elemento de A que no pertenece a B, se dirá que es un **subconjunto propio:**

$$B \subset A \Leftrightarrow (B \subseteq A) \wedge (B \neq A)$$

2. Propiedades Fundamentales

Notemos que las siguientes propiedades son análogas a las propiedades citadas para los conectivos lógicos.

Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

Asociativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Diferencia

$$A - B = A \cap B^c$$

Absorción

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

Involución

$$(A^c)^c = A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

Diferencia Simétrica

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

3. Conjunto potencia de un conjunto

Sea $A = \{2,3,5,8,13,21\}$ El objeto 5 es un elemento del conjunto A, pero 5 no se observa como un conjunto; pero {5} no es un elemento de A, pero si es subconjunto de A. Lo anterior lo podemos describir de la siguiente manera: $(5 \in A) \wedge (\{5\} \subseteq A)$

En ocasiones los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos; como el conjunto de todos los subconjuntos de A. Para evitar decir "conjuntos de conjuntos" se denomina **familia de conjuntos**.

Ejemplo
Sea $A = \{2,3,5,8,13,21\}$ no es una familia de conjuntos, debido a que sus elementos no son conjuntos. Pero $\Omega = \{\{2\}, \{13,21\}\}$ es una familia de conjuntos por que sus elementos a su vez conjuntos.

Definición Se define como **conjunto potencia** de un conjunto A al conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A, el que denotaremos P(A).

Observación

1. Si $a \in A$ entonces no necesariamente $a \in P(A)$ y si $\{a\} \in P(A)$
2. $A \in P(A)$, debido que $A \subseteq A$ y $\phi \in P(A)$, debido que $\phi \subset A$

Ejemplo
1. Sea $A = \{1,2,3\}$ entonces $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
2. Sea $A = \phi$ entonces $P(A) = \{\phi\}$

Propiedades
1. Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
3. $[P(A) \cup P(B)] \subset P(A \cup B)$

Notar que $\phi \neq \{\phi\}$

Una colección de subconjuntos de un conjunto dado es una partición de ese conjunto si cumple:
- Ninguno de los subconjuntos es vacío.
- La unión de los subconjuntos de la colección es igual al conjunto original.
- La intersección de dichos subconjuntos dos a dos es vacía. (No tienen elementos comunes).

3.1 Cardinalidad

Definición se llama **cardinalidad** de un conjunto al número de objetos distintos que lo forman, y lo denotaremos como #B o |B| o card(B).

A demás se tiene que:
i. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
ii. $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C + \#(A \cap B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)$
iii. Si $\#A = n \Rightarrow \#P(A) = 2^n$

4. Ejercicios Resueltos

4.1 Si $A, B; C \subseteq U$ y $B - A = \phi$ Demuestre que

$$\left[(A - C)^C - (B \cup C)^C\right] \cap \left[A \cup (C - B)\right] = C$$

Solución

Como $B-A=\phi$, es decir, $B\cap A^{C}=\phi$ se deduce que $B^{C}\cup A=U$

$\left[(A-C)^{C}-(B\cup C)^{C}\right]\cap\left[A\cup(C-B)\right]$	$\Leftrightarrow$	$\left[\left(A\cap C^{C}\right)^{C}\cap(B\cup C)\right]\cap\left[A\cup\left(C\cap B^{C}\right)\right]$
	$\Leftrightarrow$	$\left[\left(A^{C}\cup C\right)\cap(B\cup C)\right]\cap\left[(A\cup C)\cap\left(A\cup B^{C}\right)\right]$
	$\Leftrightarrow$	$\left[C\cup\left(A^{C}\cap B\right)\right]\cap\left[(A\cup C)\cap\left(A\cup B^{C}\right)\right]$
	$\Leftrightarrow$	$\left[C\cup(\phi)\right]\cap\left[(A\cup C)\cap(U)\right]$
	$\Leftrightarrow$	$[C]\cap[(A\cup C)]$
	$\Leftrightarrow$	C 2

Por lo tanto, queda demostrado que $\left[(A-C)^{C}-(B\cup C)^{C}\right]\cap\left[A\cup(C-B)\right]=C$