

Cuantificadores y Métodos de Demostración

| | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Cuantificadores..... | 1 |
| 1.1. Cuantificador Existencial | 2 |
| 1.2. Cuantificador Universal..... | 3 |
| 2. Métodos de Demostración | 4 |

1. Cuantificadores

Hasta ahora habíamos estudiado el valor de verdad de las proposiciones pero ahora analizaremos el *cuándo* son verdades y para esto necesitaremos los cuantificadores, es decir, un cuantificador se utiliza para indicar cuántos elementos de un conjunto dado cumplen con cierta propiedad.

Definición: Una **función proposicional** es una expresión que contiene una o más de una variable que al ser sustituidas por elementos del universo (U) dan origen a una proposición.

Nótese entonces que la *función proposicional no es una proposición*, por lo tanto, no se puede decir nada acerca de su valor de verdad.

Notación: Escribiremos por función proposicional, $p(x) \vee p(x, y)$ según sean una o dos variables.

Ejemplos

1 Sea $U = \mathbb{IN}$ $p(x, y) : 2x - 5y = 5$ entonces $p(1,3) : 2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 = 5$ Es Falso
 $p(5,1) : 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 5$ Es Verdadero

2 Sea $U = \mathbb{IR}$ $p(x) : x + 4 > 2$ entonces $p(5) : 5 + 4 > 2$ Es verdadero
 $p(-5) : -5 + 4 > 2$ Es Falso

Observación: Si negamos una función proposicional, formamos una nueva función proposicional.

Ejemplos

1 Sea $p(x, y) : 2x - 5y = 5$ entonces $\overline{p(x, y)} : 2x - 5y \neq 5$

2 Sea $p(u, z) : u^3 - z^2 = 4$ entonces $\overline{p(u, z)} : u^3 - z^2 \neq 4$

Cuando utilizamos funciones proposicionales podemos incorporar dos nuevos símbolos denominados **cuantificadores**. Hay dos formas de cuantificar una función proposicional:

1.1. Cuantificador Existencial

Si $p(x)$ es una función proposicional en U , entonces la expresión:

$$\exists x; p(x) \text{ Se lee "existe x tal que p(x)"}$$

y significa que hay al menos un elemento "a" que pertenece al universo, de modo que $p(a)$ es verdadera.

Ejemplos

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, considerando que $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

a. $\exists x \in U; x^2 - x = 13$

| | | |
|---------|----------------|-------|
| $x = 1$ | $1^2 - 1 = 13$ | falso |
| $x = 2$ | $2^2 - 2 = 13$ | falso |
| $x = 3$ | $3^2 - 3 = 13$ | falso |
| $x = 4$ | $4^2 - 4 = 13$ | falso |
| $x = 5$ | $5^2 - 5 = 13$ | falso |
| $x = 6$ | $6^2 - 6 = 13$ | falso |

La proposición es falsa, ya que para todos lo elementos de U la proposición es falsa

b. $\exists x \in U; x^2 - x > 20$

| | | |
|---------|----------------|-----------|
| $x = 1$ | $1^2 - 1 > 20$ | falso |
| $x = 2$ | $2^2 - 2 > 20$ | falso |
| $x = 3$ | $3^2 - 3 > 20$ | falso |
| $x = 4$ | $4^2 - 4 > 20$ | falso |
| $x = 5$ | $5^2 - 5 > 20$ | falso |
| $x = 6$ | $6^2 - 6 > 20$ | verdadero |

La proposición es verdadera, ya que existe un elemento de U que satisface la proposición.

Observación Dentro de este cuantificador nos encontramos con el cuantificador $\exists!$ que se lee **existe un único** y que es verdadero si y solo si la proposición es solamente verdadera en una ocasión.

1.2. Cuantificador Universal

Si $p(x)$ es una función proposicional en U , entonces la expresión:

$$\forall x; p(x) \text{ Se lee "para todo } x, p(x)\text{"}$$

y significa que todos los elementos x de U hacen que $p(x)$ sea verdadera.

Ejemplos

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, considerando que $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

a. $\forall x \in U; x^2 < 34$

| | | |
|---------|------------|-----------|
| $x = 1$ | $1^2 < 34$ | verdadera |
| $x = 2$ | $2^2 < 34$ | verdadera |
| $x = 3$ | $3^2 < 34$ | verdadera |
| $x = 4$ | $4^2 < 34$ | verdadera |
| $x = 5$ | $5^2 < 34$ | verdadera |
| $x = 6$ | $6^2 < 34$ | falso |

La proposición es falsa, ya que no todos los elementos de U satisfacen la proposición.

b. $\forall x \in U; 5x - 1 > 2$

| | | |
|---------|---------------------|-----------|
| $x = 1$ | $5 \cdot 1 - 1 > 2$ | verdadero |
| $x = 2$ | $5 \cdot 2 - 1 > 2$ | verdadero |
| $x = 3$ | $5 \cdot 3 - 1 > 2$ | verdadero |
| $x = 4$ | $5 \cdot 4 - 1 > 2$ | verdadero |
| $x = 5$ | $5 \cdot 5 - 1 > 2$ | verdadero |
| $x = 6$ | $5 \cdot 6 - 1 > 2$ | verdadero |

La proposición es verdadera, ya que todos los elementos de U satisfacen $p(x)$.

Observación De los cuantificadores anteriores podemos deducir las siguientes equivalencias de proposiciones cuantificadas:

$$\overline{\forall x \in U; p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in U; \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in U; p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in U; \overline{p(x)}$$

Observación Si las proposiciones son de dos variables es posible cuantificarlas en las siguientes maneras:

1. $\exists x \in U; \exists y \in U; p(x, y)$
2. $\exists x \in U; \forall y \in U; p(x, y)$
3. $\forall x \in U; \exists y \in U; p(x, y)$
4. $\forall x \in U; \forall y \in U; p(x, y)$

Nótese que los cuantificadores no son conmutativos.

2. Métodos de Demostración

Una de las preguntas que nacen cuando se estudia matemática es

¿Cómo se hace para demostrar?

$$A \Rightarrow B$$

Este proceso no es fácil aunque existen muchos escritos sobre el tema, llegar a demostrar debe ser unos de los pasos más complejos en Matemática y en todas las ciencias porque independiente el método que se utilice se necesita una agudeza y conocimiento sobre los contenidos que no llegan por arte de magia.

Definición: Un **axioma** es una verdad que se acepta por sí sola. En otras palabras, es una proposición inicial la cual se asume como verdadera.

A medida que se adentra en el estudio de la teoría matemática nos encontraremos con proposiciones instintivamente verdaderas, cuya veracidad para ser considerada debe ser demostrada de manera formal.

En este sentido, demostrar una proposición, es obtenerla a partir de los axiomas haciendo reglas de deducción lógica.

Observación: En general todos aquellos antecedentes que podemos utilizar para demostrar una proposición constituyen la *hipótesis*. La proposición a demostrar constituye la *tesis*.

Ejemplo

- 1 Andrea y Sergio son de la misma edad o Andrea es de más edad que Sergio. Si Andrea y Sergio son de la misma edad entonces Daniela y Andrea no son de la misma edad. Si Andrea es de más edad que Sergio entonces Andrea es de más edad que Luis.

Conclusión: Daniela y Andrea no son de la misma edad o Andrea es de más edad que Luis

Sea p = Andrea y Sergio son de la misma edad

q = Andrea es de más edad que Sergio

r = Daniela y Andrea no son de la misma edad

s = Andrea es de más edad que Luis

En otras palabras $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$ es verdadero y debemos demostrar $(r \vee s)$ es verdadero.

$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \Leftrightarrow (r \vee s)$ A través de las tautologías fundamentales

Demostración Directa

Consiste en obtener mediante una secuencia de proposiciones encadenadas por reglas de deducción, directamente “q” como tesis y como consecuencia de “p” como hipótesis. En la lógica escolástica este proceso se llama *Modus Ponens*

Demostración Indirecta

- a. *Por reducción al absurdo o contradicción*: esta forma de demostrar consiste en utilizar la siguiente equivalencia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F]$
- b. *Por contraposición*: en este caso debemos ocupar la siguiente equivalencia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ Este proceso es conocido como *Modus Tollens*