Lógica

1. Lógica Matemática

La lógica como disciplina tiene por objeto estudiar el pensamiento desde el punto de vista de las formas de razonar, es decir de manejar los juicios en un determinado lenguaje. Si hablamos de un lenguaje, entonces este ha de tener una estructura semántica y una estructura sintáctica. Pues bien, ahora vamos a iniciarnos en el estudio de una lógica muy especial y que en muchos casos es bien diferente de lo que comúnmente calificamos de "lógico".

En general nosotros manejamos en la vida diaria varios tipos de lenguaje, por ejemplo el oral, el escrito, el de las señales viales, el gestual, el emocional, etc., pero hay uno muy especial que es **utilizado por las personas para validar sus trabajos en ciencia** y en las TIC llamado **lógica matemática** y de la cual hacemos un buen manejo en forma implícita para el estudio de la biología, la física, las matemáticas, la química y el español, como también en muchas otras actividades cotidianas.

Para iniciarnos conscientemente en la lógica matemática debemos decir que muchas de las expresiones que utilizamos en el lenguaje cotidiano tienen su equivalente en la lógica matemática, aunque no todas.

El elemento básico de expresión que emplearemos se llama **proposición** y consiste en una frase que posee un solo sujeto el cual padece o ejecuta una sola acción. La frase **debe expresar un juicio** y de su contenido (lo que allí se expresa) se debe poder decir si es **verdadero** o **falso**, pero no ambas posibilidades simultáneamente y tampoco admite una tercera posibilidad.

Determinar si una oración ϕ es consecuencia lógica de un conjunto Γ de oraciones es prácticamente imposible: tendríamos que ser capaces de verificar si la conclusión del argumento es verdadera en todas las instancias (o interpretaciones posibles de las palabras que componen el argumento) en las que las premisas son verdaderas.

Por lo general, notamos que en el estudios de lógica surge naturalmente una suerte de álgebra, o manipulación simbólica. Veremos cómo puede usarse los diagramas de Venn para demostrar la corrección de cierto tipo de argumentos.

Por otra parte, haremos notar que la relación de consecuencia lógica depende de la estructura sintáctica de las oraciones que componen un argumento y no de su significado. Resulta natural entonces pensar que se puede estudiar este concepto usando herramientas matemáticas.

La lógica matemática no es un tipo de lógica como los mencionados más arriba, sino la disciplina que (entre otras cosas) desarrolla modelos matemáticos del concepto de consecuencia lógica, cualquiera sea la lógica involucrada.

1.1. Lógica

Definición: Una proposición es una aseveración de la cual podemos afirmar que es verdadera ó falsa. La veracidad o falsedad de dicha proposición se denomina valor de verdad.

Ejemplos

Son proposiciones:

Chile firmó el TLC con Japón

Barrick Gold es la empresa que llevará acabo el proyecto Pascua Lama

5 + 9 = 40

No son proposiciones:

¿Cuánto dinero recibiré cuando trabaje?

¿Cuándo nos mechonean?

Notación: En adelante, utilizaremos las letras $p, r, s, t, \ldots, etc$ para referirnos a proposiciones cualesquiera.

Definición: Denominaremos conectivos lógicos a ciertos símbolos utilizados para combinar proposiciones, produciendo así otra llamada proposición compuesta.

El valor de verdad de las proposiciones compuestas depende de los valores de verdad de las proposiciones que la conforman y del conectivo lógico que las une.

Según lo anterior, para la proposición “P” cualquiera hay dos alternativas: “P” es verdadera o bien “P” es falsa. Hecho que denotaremos de la siguiente forma:

P
V
F

Si la proposición "R" es compuesta, y está compuesta por dos proposiciones: "P" y "Q", tendremos tantas alternativas para el valor de verdad de "R", como se observa:

P	Q	R
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

En este caso, obtenemos 4 alternativas.

En general, si la proposición compuesta está formada por "n" proposiciones las alternativas son 2^n.

Definición: Llamaremos tabla de verdad al arreglo que nos permite tener todas las posibilidades de valor de verdad de una proposición compuesta.

1.2. Conectivos lógicos

Como mencionamos arriba para unir las proposiciones necesitamos de conectivos lógicos, los más utilizados son:

Nombre	Símbolo	Proposición Compuesta	Se lee
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Implicación	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	p implica q
Doble Implicancia	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	p si y solo si q
Disyunción exclusiva	$\veebar$	$p \veebar q$	Exclusivamente p o exclusivamente q

Los conectivos mencionados, tienen asociado la siguiente Tabla general:

P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \underline{\vee} q$	$\overline{p}$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V

Observación: A partir de una proposición p cualquiera siempre se puede construir otra denominada negación de p y se indica con el símbolo $\overline{p}$.

Una proposición compuesta puede ser:

Tautología: es una proposición cuyo valor de verdad siempre es verdadero, independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Contradicción: es una proposición cuyo valor de verdad siempre es falso, independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Contingencia: No es tautología ni contradicción

1.3. Tautologías Fundamentales

Una tautología es la repetición de un mismo pensamiento expresado de distintas maneras, por lo cual, con las tautologías fundamentales nos referimos a la equivalencias de ciertas proposiciones. Las más utilizadas son:

Conmutatividad:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$$

Asociatividad:

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

Distributividad:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Implicación:

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q \qquad p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$$

De Morgan:

$$\overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \qquad \overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Absorción:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Idempotencia

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

Identidad:

$$p \vee F \equiv p \qquad p \vee V \equiv V \qquad p \wedge F \equiv F \qquad p \wedge V \equiv p$$

2. Ejercicios Resueltos

3.1 Sabiendo que $p \wedge q \wedge r \equiv F$. Demuestre que la proposición más simplificada de

$\{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee r)\} \Rightarrow (r \wedge \overline{p})$ es la proposición $p \vee q \vee r$.

Solución Como se debe demostrar que $\{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee r)\} \Rightarrow (r \wedge \overline{p})$ se puede simplificar a la forma $p \vee q \vee r$. Se puede deducir que, al realizar una tabla con las dos proposiciones los resultados debiesen ser los mismos.

Además, se debe considerar que $p \wedge q \wedge r \equiv F$, es decir, que al realizar la tabla no se debe considerar el caso de las tres proposiciones verdaderas.

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{q} \vee r$	$r \wedge \overline{p}$	$\{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee r)\} \Rightarrow (r \wedge \overline{p})$		$p \vee q \vee r$.
V	V	F	F	F	V	F	F	**V**		**V**
V	F	V	F	V	F	V	F	**V**		**V**
V	F	F	F	V	F	V	F	**V**		**V**
F	V	V	V	F	V	V	V	**V**		**V**
F	V	F	V	F	V	F	F	**V**		**V**
F	F	V	V	V	V	V	V	**V**		**V**
F	F	F	V	V	V	V	F	**F**		**F**

De ahí que, nos damos cuenta que la primera proposición es idéntica a la segunda.

Otra manera de resolver el ejercicios es, simplificar la proposición inicial y considerar $p \wedge q \wedge r \equiv F$ lo que implica $\overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r} \equiv V$.

$\{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee r)\} \Rightarrow (r \wedge \overline{p})$	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\overline{p} \vee q)} \vee \overline{(\overline{q} \vee r)} \vee (r \wedge \overline{p})$
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{p})$
	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{r})$
	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q \vee r) \wedge V$
	$\Leftrightarrow$	$p \vee q \vee r$

3.2 Utilice álgebra de proposiciones para demostrar que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ es una tautología

Solución

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\overline{p} \vee q)} \vee (\overline{\overline{q}} \vee \overline{p})$
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \overline{q}) \vee (q \vee \overline{p})$
	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\overline{p} \vee q)} \vee (q \vee \overline{p})$
	$\Leftrightarrow$	V

3.3 Sean p, q, r proposiciones. Pruebe, sin utilizar tablas de verdad que:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

Solución

$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$	$\Leftrightarrow$	$\overline{(\overline{p} \vee r)} \vee [\overline{(p \wedge q)} \vee r]$
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \overline{r}) \vee [(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee r]$
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \overline{r}) \vee [(\overline{p} \vee r) \vee \overline{q}]$
	$\Leftrightarrow$	$[(p \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \vee r)] \vee \overline{q}$
	$\Leftrightarrow$	$[(p \wedge \overline{r}) \vee \overline{(p \wedge \overline{r})}] \vee \overline{q}$
	$\Leftrightarrow$	$V \vee \overline{q}$
	$\Leftrightarrow$	V

Por lo tanto, queda demostrado que $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

3.4 Sean p, q, r, s proposiciones. Pruebe sin usar tablas de verdad que:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$$

Solución

$\left[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})\right] \Rightarrow \left[\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)\right]$	$\Leftrightarrow$	$\overline{\left[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})\right]} \vee \left[\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)\right]$
	$\Leftrightarrow$	$\left[(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{s} \wedge r)\right] \vee \left[\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)\right]$
	$\Leftrightarrow$	$\left[(p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p}\right] \vee \left[(\overline{s} \wedge r) \vee \overline{r}\right] \vee (q \wedge s)$
	$\Leftrightarrow$	$\left[(\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})\right] \vee \left[(\overline{r} \vee \overline{s}) \wedge (\overline{r} \vee r)\right] \vee (q \wedge s)$
	$\Leftrightarrow$	$\left[\overline{q} \vee \overline{p}\right] \vee \left[\overline{s} \vee \overline{r}\right] \vee (q \wedge s)$
	$\Leftrightarrow$	$\overline{p} \vee \overline{r} \vee \left[(\overline{q \wedge s}) \vee (q \wedge s)\right]$
	$\Leftrightarrow$	V