

3. TIPOS DE SEQÜÊNCIAS RANDÔMICAS E DISTRIBUIÇÕES

3.1. INTRODUÇÃO

Para se realizar experimentos computacionais com as seqüência de números pseudo-randômicos há a necessidade, na maioria das vezes, de levá-la a um novo intervalo. Os geradores apresentados no capítulo anterior, geram números no intervalo $[0, m[$, ou seja, U_j com $0 \leq j < m$. Para se fazer os testes das seqüências de números pseudo-randômicos usaremos a seqüência V_j , a qual é constituída de números no intervalo $[0, 1[$ e para isso há a necessidade de se reduzir o intervalo $[0, m[$ para $[0, 1[$. Para se fazer essa redução, basta tomarmos $V_j = \frac{U_j}{m}$.

Um outro tipo de seqüência muito útil obtida a partir da seqüência V_j é a Y_j que é definida como $\text{floor}(d V_j)$ a qual é constituída de números inteiros entre zero e d , onde d é um inteiro positivo.

Há diversas maneiras de se reduzir uma seqüência de números pseudo-randômicos. O usuário deve escolher a que melhor lhe sirva para os experimentos. O usuário deve também tomar o cuidado para que a seqüência reduzida não perca as propriedades desejadas.

Redução de seqüências de números pseudo-randômicos é um caso particular de modificação de seqüências. As seqüências podem ser modificadas para as aplicações e podem ser feitas de várias formas, mantendo as propriedades de randomicidade da seqüência original.

Um dos tipos de seqüências mais simples e comum que é requisitada, na prática, é uma seqüência que é formada por números inteiros num dado intervalo. Por exemplo, a seqüência Y_j . Em geral, para uma seqüência de inteiros entre zero e $k - 1$ fazemos $Y_j = \text{floor}(k V_j)$. Para conseguirmos um inteiro entre 1 e k é só adicionar um à Y_j e para obter um inteiro entre m e $k + (m - 1)$ basta tomarmos $m + Y_j$.

Os métodos de modificação acima criam seqüências de inteiros com distribuição uniforme, se a seqüência original for uniforme, e com erro superficial na randomicidade, devido à redução, o qual é insignificante para um valor pequeno de k , por exemplo, se

$$\frac{k}{m} < \frac{1}{10000}$$

Uma outra forma de modificar seqüências, muito usada em simulação, é dar à seqüência

x diferentes probabilidades de aparecer numa nova seqüência X , isto é, cada elemento x_i tem uma probabilidade diferente de aparecer na seqüência X . Fazemos isso da seguinte forma: o elemento $X_n = x_n$ deve ser obtido com probabilidade p_n , para $1 \leq n$ e $n \leq k$.

A seqüência X é definida como

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{se } 0 \leq V \text{ e } V < p_1; \\ x_2, & \text{se } p_1 \leq V \text{ e } V < p_1 + p_2; \\ \dots & \\ x_k, & \text{se } p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} \leq V \text{ e } V < 1. \end{cases}$$

Onde V é uma seqüência randômica de números entre zero e um.

Uma observação importante e que devemos sempre lembrar ao se escolher os p_j é que $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

3.2. DISTRIBUIÇÕES

Existem vários tipos de distribuições, como já foi comentado e alguns desses tipos serão mostrados aqui. Quando construímos a seqüência X acima, nós utilizamos probabilidades distintas para diferentes elementos de X . Existem casos em que essa probabilidade deva ser definida por uma função. Por exemplo, poderia-se utilizar a função Gamma para obter as probabilidades, ou outra função qualquer.

3.2.1. FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

As seqüências que foram estudadas até aqui são seqüências com distribuição uniforme, vejamos agora a distribuição em termos da função de distribuição $F(x)$, onde

$$F(x) = \text{probabilidade } (X \leq x).$$

A função acima é uma função crescente no intervalo $[0, 1[$, ou seja, $F(x_1) < F(x_2)$ se $x_1 \leq x_2$ e $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

Se $F(x)$ é contínua e estritamente crescente no intervalo $[0, 1[$ então existe uma função inversa $G(y)$ tal que $0 < y$ e $y < 1$. Nas condições acima $y = F(x)$ se, e somente se, $x = G(y)$.

A forma geral de calcular a seqüência X com a função de distribuição estritamente crescente $F(x)$ é fazer $X = G(V)$, então a probabilidade que $X \leq x$ é a probabilidade que

$V \leq F(x)$.

Seja X_1 um número pseudo-aleatório com a distribuição $F_1(x)$ e seja X_2 um número pseudo-aleatório com a distribuição $F_2(x)$, então

$\max(X_1, X_2)$ tem a distribuição $F_1(x) F_2(x)$

$\min(X_1, X_2)$ tem a distribuição $F(x) = x$, para $0 \leq x < 1$. Se V_1, V_2, \dots, V_t são números uniformemente independentes, então o $\max(V_1, V_2, \dots, V_t)$ tem a função de distribuição $F(x) = x^t$ para $0 \leq x < 1$. A função inversa neste caso é $G(y) = \text{root}(y, t)$.

3.2.2. DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A função de distribuição exponencial é da seguinte forma:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$$

para $0 \leq x$ onde $\mu =$ média estatística.

Um exemplo desse tipo de distribuição é encontrado na Química; quando uma substância emite partículas α à razão de uma partícula a cada μ segundo temos uma variação aleatória que pode ser simulada com números pseudo-aleatórios com distribuição exponencial através dos métodos de Monte Carlo.

Agora vamos considerar o caso em que $\mu = 1$, podemos usar o método abaixo para conseguir a quantidade aleatória X .

Método do Logaritmo: Certamente se $y = F(x) = 1 - e^{-x}$, $x = G(y) = -\ln(1 - y)$. Assim pela equação $X = G(V)$, com $V_i \neq 0$ temos $X = -\ln(1 - V)$ que tem a distribuição exponencial. Como V é uma seqüência uniformemente distribuída então a seqüência $1 - V$ também é, logo podemos fazer $X = -\ln(V)$

O caso $V_i = 0$ deve ser evitado no programa do computador porque não está definido nos reais o logaritmo natural de 0.

3.2.3. OUTRAS FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO ÚTEIS:

$$\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

A função de distribuição normal é da forma: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\int_0^x t^{\left(\frac{v}{2}-1\right)} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

A função de distribuição χ^2 ou Gamma é da forma: $F(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{v}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$

Se $v = 2k$, $X = 2(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k)$ onde Y_j é uma seqüência com a distribuição normal com $1 \leq j \leq k$, então $Y_1 + \dots + Y_k = -\ln(V_1 \dots V_k)$.