

PRODUCTOS NOTABLES

Tanto en la multiplicación algebraica como en la aritmética se sigue un algoritmo cuyos pasos conducen al resultado. Sin embargo, existen productos algebraicos que responden a una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado. Estos productos reciben el nombre de **productos notables**.

Se llama **producto notable** a un producto que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación término a término.



Algunos de ellos son los siguientes:

CUADRADO DEL BINOMIO

Recordemos que a la expresión algebraica que consta de dos términos se le llama **binomio**. El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de **cuadrado del binomio**. El desarrollo de un cuadrado de binomio siempre tiene la misma estructura. Por ejemplo, al elevar al cuadrado el binomio " $a+b$ ", multiplicando término a término, se obtendría:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Pero si comparamos la expresión " $(a+b)^2$ " con el resultado de su expansión " $a^2 + 2ab + b^2$ " podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square + \triangle)^2 = (\square)^2 + 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

Donde \square representa al primer término del binomio y \triangle al segundo.

Si tomamos como ejemplo al binomio " $a-b$ ", ocurre lo mismo que para $a+b$ sólo que en la reducción de términos semejantes se conserva el signo menos delante del doble producto, o sea:

$$(\square - \triangle)^2 = (\square)^2 - 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

En ambos casos vemos que se tiene la misma estructura diferenciándose sólo en un signo. A partir de este hecho podemos presentar la fórmula para desarrollar el producto notable **cuadrado del binomio**:

"El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término"

La estructura que representa esta fórmula es:

$$(\square \pm \triangle)^2 = (\square)^2 \pm 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

Algunos ejemplos:

- i. $(p+2b)^2 = p^2 + 2 \cdot p \cdot 2b + (2b)^2 = p^2 + 4pb + 4b^2$
- ii. $(3m+4n)^2 = (3m)^2 + 2 \cdot 3m \cdot 4n + (4n)^2 = 9m^2 + 24mn + 16n^2$
- iii. $(5x-y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-y) + (y)^2 = 25x^2 - 10xy + y^2$

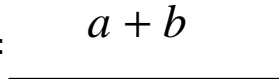
Representación Geométrica del Cuadrado del Binomio

El cuadrado del binomio, como otros productos notables, tiene una representación geométrica en el plano.

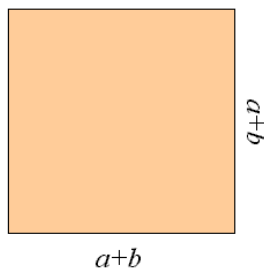
Consiste en considerar el área de un cuadrado de lado " $a+b$ " y las regiones que estas medidas generan en el cuadrado. Consideremos dos trazos " a " y " b " :



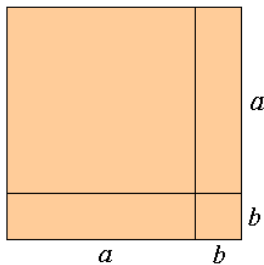
Con ellos se construye un trazo de longitud " $a+b$ ":



Y con él un cuadrado de la misma longitud:

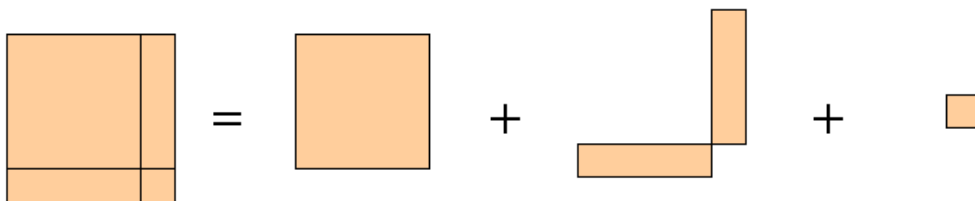


Si se extienden los extremos de los trazos " a " y " b " éstos dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado " a " y otro menor de lado " b ", y dos rectángulos de largo " a " y ancho " b ".



La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado $a+b$, es decir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



SUMA POR DIFERENCIA

Consideremos el producto de la suma de dos términos " $a+b$ " por su diferencia " $a-b$ ". Al desarrollar el producto:

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

Podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square + \triangle)(\square - \triangle) = (\square)^2 - (\triangle)^2$$

Es decir, la suma de dos términos por su diferencia es equivalente a la diferencia de los cuadrados de los términos. La fórmula para el producto notable **suma por diferencia** se enuncia como sigue:

"El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo"

Algunos ejemplos son:

I. $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

II. $(a^2-3)(a^2+3) = a^4 - 9$

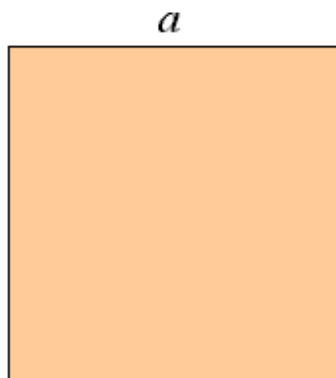
III. $(2p^5+6q^4)(2p^5-6q^4) = 4p^{10} - 36q^8$

Representación Geométrica de la Suma por Diferencia

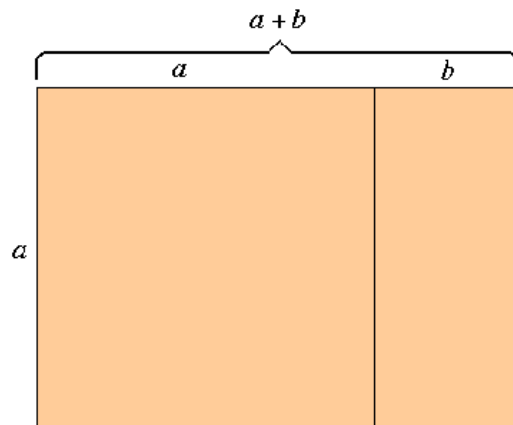
Para representar la suma por diferencia, utilizaremos un rectángulo de largo " $a+b$ " y ancho " $a-b$ ". Considere dos trazos " a " y " b " cualesquiera:



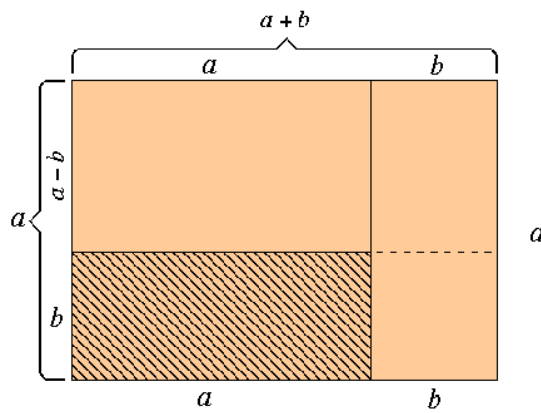
Con el trazo a se construye el siguiente cuadrado:



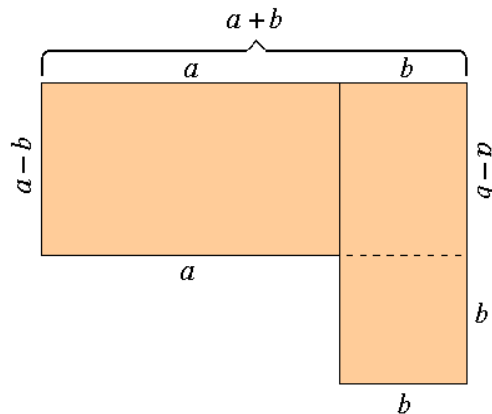
A este cuadrado se le agrega un rectángulo de lados " a " y " b ":



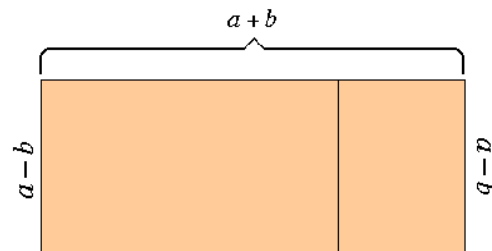
De este rectángulo (de lados " a " y " $a+b$ ") se le recorta un rectángulo de lados " a " y " b " (el achurado en la figura):



Quedando:

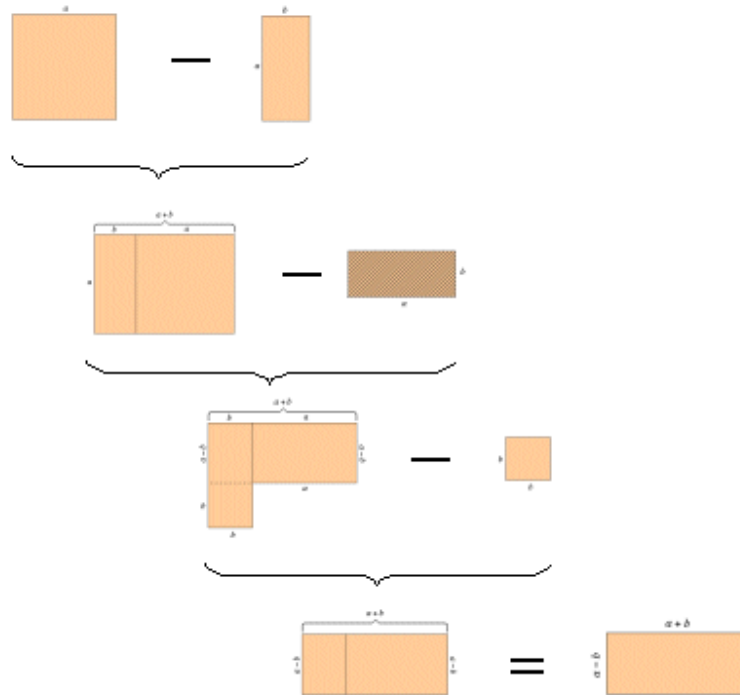


El área buscada es la del rectángulo de lados " $a+b$ " y " $a-b$ ", para lo que debemos recortarle a la figura anterior el cuadrado de lado " b ",



Finalmente, la representación geométrica de la suma por diferencia se puede resumir por el siguiente esquema:

$$a^2 + ab - ab - b^2 = (a+b)(a-b)$$



MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Este producto notable corresponde a la multiplicación de binomios de la forma "a + b" por "a + c". Al desarrollar el producto:

$$(a+b) \cdot (a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$$

Se observa que la estructura es la siguiente:

$$(\square + \star)(\square + \triangle) = (\square)^2 + (\star + \triangle) \cdot \square + \star \cdot \triangle$$

La fórmula para el producto de **BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN** se enuncia como sigue:

"Cuadrado del primer término, más la suma de los términos distintos multiplicada por el término común y más el producto de los términos distintos"

Ejemplos:

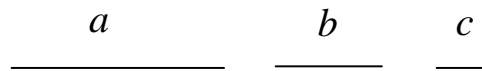
- $(x+3) \cdot (x+2) = x^2 + (3+2)x + 3 \cdot 2 = x^2 + 5x + 6$, observa que $\begin{cases} 3+5=5 \\ 3 \cdot 2=6 \end{cases}$
- $(a+8) \cdot (a-7) = a^2 + (8-7)a + 8 \cdot -7 = a^2 + a - 56$, observa que $\begin{cases} 8 + -7 = 1 \\ 8 \cdot -7 = -56 \end{cases}$

- $(p-9) \cdot (p-12) = p^2 + (-9-12) \cdot p + 9 \cdot 12 = p^2 - 21p + 108$, observa que

$$\begin{cases} -9-12=1 \\ -9 \cdot 12=108 \end{cases}$$

Representación Geométrica de la Multiplicación de Binomios con un Término Común

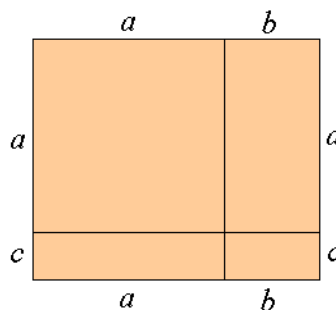
Se consideran tres trazos "a", "b" y "c" de medidas distintas, por ejemplo:



Con ellos se construyen dos trazos de longitudes "a+b" y "a+c":



Y a partir de estos se construye un rectángulo de lados "a+b" y "a+c":

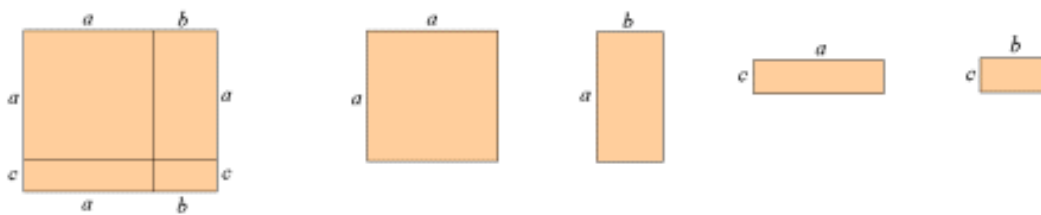


De aquí podemos establecer la siguiente igualdad entre áreas:

$$(a+b) \cdot (a+c) = a^2 + ab + ac + bc$$

El siguiente esquema muestra este producto:

$$(a+b) \cdot (a+c) = a^2 + ab + ac + bc$$



A continuación presentamos **otros productos notables** con sus respectivas fórmulas:

- Cubo de un binomio**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Cuadrado de un trinomio**

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

- Suma y resta de cubos**

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



Practica lo aprendido!!!

1. Completar el término que falta en los siguientes productos notables:

1) $(x + 3)^2 = x^2 + \underline{\hspace{1cm}} + 9$

2) $(x - 5)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 10x + 25$

3) $(x - 7)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} + 49$

4) $(x + 9)^2 = x^2 + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$

5) $(\underline{\hspace{1cm}} - 8)^2 = x^2 - \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$

6) $(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 14x + \underline{\hspace{1cm}}$

7) $(x + 12)(x - 12) = x^2 - \underline{\hspace{1cm}}$

8) $(x - \underline{\hspace{1cm}})(x + 13) = x^2 - \underline{\hspace{1cm}}$

9) $(x + \underline{\hspace{1cm}})(x - \underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{1cm}} - 225$

10) $(x - 25)(x + 25) = x^2 - \underline{\hspace{1cm}}$

11) $(x + 7)(x - 4) = x^2 + \underline{\hspace{1cm}} - 28$

12) $(x - 5)(x - 8) = \underline{\hspace{1cm}} - 13x + \underline{\hspace{1cm}}$

13) $(x + 5)(x + 12) = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 60$

14) $(x - 9)(x - 7) = x^2 + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$

15) $(x + 6)^3 = x^3 + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 216$

16) $(x - 1)^3 = \underline{\hspace{1cm}} - 3x^2 + \underline{\hspace{1cm}} - 1$

2. En los siguientes productos notables corregir el error o los errores

1) $(x - 6)^2 = x^2 + 12x + 36$

2) $(x + 8)^2 = x^2 + 8x + 16$

3) $(x - 11)^2 = x^3 + 22x - 121$

4) $(x + 16)^2 = x^2 - 32x + 526$

5) $(x + 3)^3 = x^3 + 9x - 27x + 27$

6) $(x - 4)^3 = x^3 - 48x^2 - 12x + 64$

7) $(x - 7)(x + 15) = x^2 - 8x - 105$

8) $(x - 13)(x + 13) = x^2 + 169$

3. Calcular:

1) $(x + 5)^2 =$

5) $(5x + 9y)^2 =$

2) $(a - 3)^2 =$

6) $(9x - 4)(9x + 4) =$

3) $(2x + 7)^2 =$

7) $(7 - x)(7 + x)$

4) $(ax^2 + by)^2 =$

8) $(r + 5s)^2 =$

4. Desarrolla y después reduce:

1) $9 + (x + 4)^2 =$

2) $-(8x + 3)^2 =$

3) $2(y + 5)^2 =$

4) $(3x + 1)^2 + (4x + 1)(2x - 5) =$

5) $6x + 1 - (7x - 4)^2 =$

5. Resuelve los siguientes cuadrados de binomios:

1. $(x + 5)^2$

2. $(x - 7)^2$

3. $(a + 1)^2$

4. $(m + 21)^2$

5. $(x - 2)^2$

6. $(x - 18)^2$

7. $(p + 5q)^2$

8. $(x - 3y)^2$

9. $(2x + 6)^2$

10. $(3x - 5)^2$

11. $(6x - 8y)^2$

12. $(2x - 3)^2$

13. $(5a - 0,3)^2$

6. Determina el área del cuadrado cuyo lado mide:

a) $x + 12$

b) $2x - 1$

CUADRADO DE UN BINOMIO



1. Completa la siguiente tabla:

a	b	a+b	$(a + b)^2$	a^2	$2 \cdot a \cdot b$	b^2	$a^2 + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
2	3							
6	4							
2	5							
4	2							

2. Observando los resultados de la tabla verificamos que la expresión algebraica equivalente a $(a + b)^2$ es: _____

3. Construye ahora la siguiente tabla:

a	b	a-b	$(a - b)^2$	a^2	$2 \cdot a \cdot b$	b^2	$a^2 + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
5	2							
4	1							
2	4							
1	3							

4. Observando los resultados de la tabla verificamos que la expresión algebraica equivalente a $(a - b)^2$ es: _____