

1. INTRODUCCION

1.1 Introducción:

En los últimos años, el vertiginoso avance de la electrónica digital y especialmente de los microprocesadores ha traído como consecuencia un aumento considerable en el número de aplicaciones, tanto a nivel Industrial como doméstico.

En el nivel Industrial, los microprocesadores han entrado de lleno en el campo de la instrumentación y del control. En este último, los controladores digitales basados en microprocesador han reemplazado a los otrora robustos controladores neumáticos y electrónicos análogos de componentes discretos.

Más recientemente, el auge de la informática y especialmente de las computadoras personales, ha propiciado que muchas compañías desarrollen tecnología para el control de procesos continuos y de manufactura utilizando como plataforma principal el PC. La gama de nuevos productos para el control, va desde los controladores lógicos programables, hasta las tarjetas de adquisición de datos y control, así como el software especializado para este tipo de aplicaciones.

En el campo de control, las computadoras se utilizan para dos fines concretos. En primer lugar, para el análisis y síntesis de sistemas de control, empleándose como herramienta para la simulación y el cálculo de controladores digitales. En segundo lugar, para la realización física del propio sistema de control.

Un esquema de control en el que una computadora digital se introduce en un lazo de control para procesar una señal del modo deseado recibe el nombre de: ***Control digital directo.***

El control digital directo se aplica desde los sesenta en sistemas de control de procesos a gran escala; en la industria química y en otros procesos ha contribuido en gran medida en el mejoramiento de la productividad y al aumento en la calidad de los productos.

El control digital de un proceso tiene las siguientes ventajas frente al correspondiente control analógico:

- **Potencia:** El procesamiento de datos en un controlador digital se ejecuta fácilmente a pesar de la complejidad en los algoritmos de cálculo.
- **Versatilidad:** Las estrategias de control pueden cambiarse fácilmente para adaptarse a diversas situaciones.
- **Precisión:** Los controladores digitales tienen una alta inmunidad al ruido eléctrico y a los efectos de deriva (variación en los parámetros de los componentes).
- **Eficacia:** En un controlador digital se pueden implementar varios algoritmos de control simultáneamente en un mismo computador.

Sin embargo, el control digital tiene algunos inconvenientes:

- El proceso de control no resulta instantáneo en el tiempo, lo cual da lugar a alteraciones no previstas en su comportamiento.
- El proceso de muestreo y cuantificación genera muchos errores que degradan la bondad de los cálculos.
- El diseño de controladores digitales que compensen tal degradación es más complejo que el diseño de controladores analógicos.

La figura 1. Muestra un diagrama de bloques de un sistema de control digital:

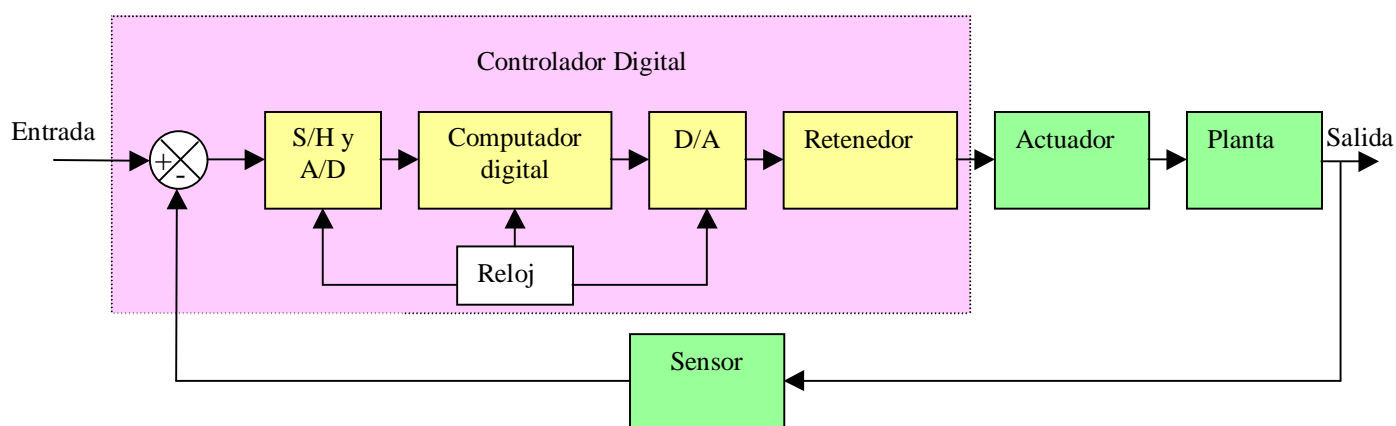


FIGURA 1. Sistema de control digital.

1.2. Tipos de señales:

En un sistema de control digital, se manejan diversos tipos de señal a través de cada uno de los elementos indicados en el diagrama de bloques de la Figura 1.

Señal analógica: Una señal analógica es aquella que posee un número infinito de valores en un intervalo continuo de tiempo.

Las señales eléctricas provenientes de sensores que captan las variables físicas son generalmente análogas, por ejemplo, una señal de 4 a 20 mA proveniente de un transmisor de presión. (Figura 2)

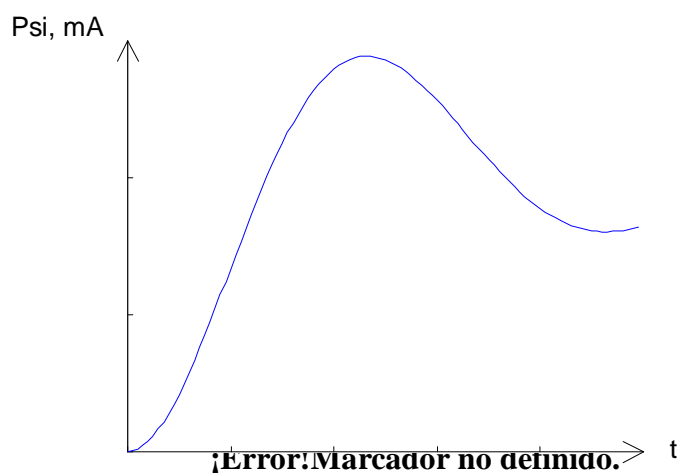


FIGURA 2. Señal Análoga.

Señal cuantificada: La señal cuantificada en tiempo continuo como la de la Figura 3, es una señal que posee un número discreto de valores de amplitud (cuantificada sólo en amplitud).

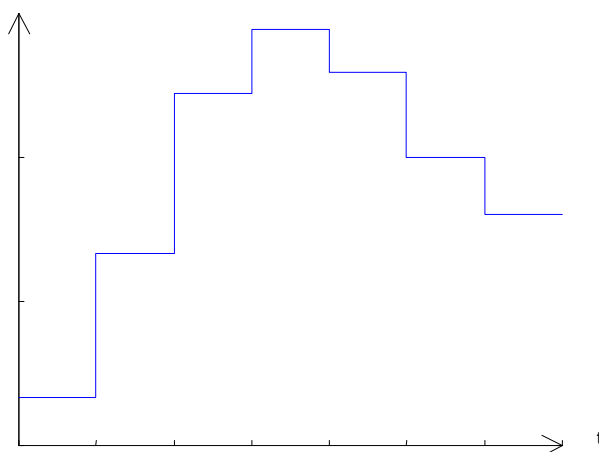


FIGURA 2. Señal Cuantificada.

Señal muestreada: La señal muestreada es una señal en tiempo discreto, la cual se define sólo en instantes de tiempo precisos. Esto significa que, la señal está cuantificada en tiempo.

Este tipo de señal se puede obtener muestreando una señal analógica.(Figura 3)

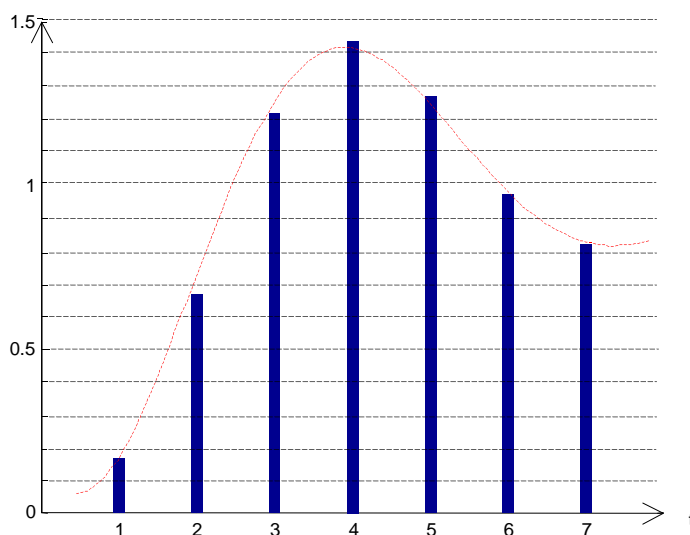


FIGURA 3. Señal de datos muestreada.

Señal digital: La señal digital es una señal en tiempo discreto con amplitud cuantificada.

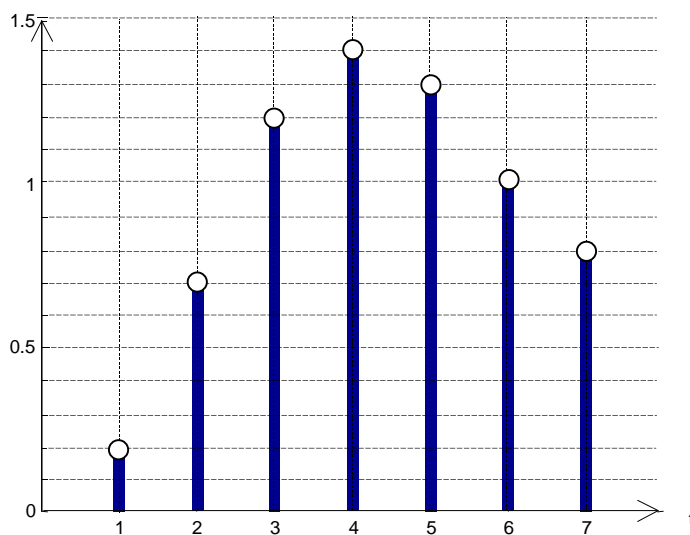


FIGURA 4. Señal digital o discretizada.

1.3. Elementos de un sistema de control digital:

Cada uno de los elementos del sistema de control digital mostrado en la Figura 1 cumple una función específica:

Muestreador y retenedor (S/H): Este es un circuito amplificador de muestreo y retención (Sample and Hold), el cual recibe como entrada una señal analógica y mantiene dicha señal en un valor constante durante un tiempo específico.

Convertidor analógico-digital (A/D): El convertidor analógico digital o ADC es un dispositivo electrónico que codifica una señal analógica en una secuencia de números binarios. Los convertidores A/D comerciales, generalmente integran el circuito de muestreo y retención.

Hay que tener en cuenta que la salida de un A/D es aproximada, ya que la correspondiente señal analógica puede adoptar un número infinito de valores. Este proceso de aproximación recibe el nombre de **cuantificación**.

Convertidor digital-analógico (D/A): El convertidor D/A o DAC (por sus siglas en inglés) es un dispositivo que decodifica la señal digital binaria proveniente de un computador o microprocesador en una señal analógica.

El proceso de convertir una secuencia de números binarios en una señal analógica se denomina **retención**.

Planta o proceso: La planta o proceso es cualquier sistema físico, químico o biológico, el cual es susceptible de ser controlado, como en el caso de los hornos, reactores o máquinas.

Sensor: El sensor es el elemento que está en contacto con la variable física a ser controlada y que generalmente la transforma en una señal más adecuada para el procesamiento, bien sea de corriente o de voltaje.

1.4. Sistemas de Adquisición de datos y control:

En los últimos años muchos científicos e ingenieros están utilizando computadores personales (PC) con buses de expansión o interfases de entrada/salida (I/O) como sistemas de adquisición de datos y control en aplicaciones industriales y de laboratorio, entre las que se encuentran: monitoreo de señales, control de procesos, adquisición de datos, mediciones y pruebas automatizadas.

Un sistema de adquisición de datos y control consta de los siguientes elementos:

- Transductores y actuadores
- Circuitos para acondicionamiento de señal

- Hardware de adquisición de datos y control (DAQ)
- Computador personal (PC)
- Software

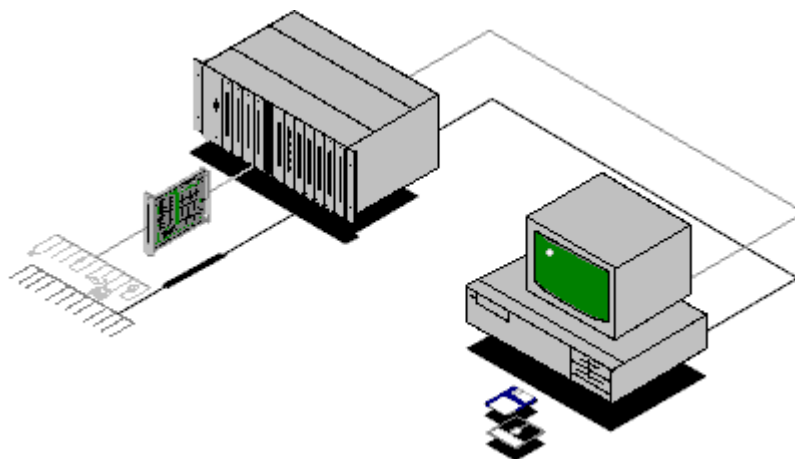


FIGURA 5. Sistema típico de adquisición de datos

Transductores y Actuadores:

Un transductor convierte temperatura, presión, nivel, longitud, posición, etc, en una señal de voltaje, corriente, frecuencia, pulsos u otras señales eléctricas. En cada caso, la señal eléctrica producida es proporcional a las variables físicas que se están monitoreando.

Las termocuplas, termistores y RTDs son transductores comúnmente utilizados para medición de temperatura. Otros tipos de transductores incluyen sensores de flujo, sensores de presión, galgas extensiométricas, celdas de carga y LVDTs las cuales miden rata de flujo, variaciones de presión, fuerza o desplazamiento, respectivamente.

Un actuador es un dispositivo que activa un equipo de control de procesos por medio del uso de la potencia eléctrica, neumática o hidráulica. Por ejemplo, una válvula de control es un actuador que se abre o se cierra para controlar la rata de flujo.

Acondicionamiento de señal :

Los circuitos para acondicionamiento de señales mejoran la calidad de las señales generadas por los transductores, antes que éstas sean convertidas en señales digitales por el hardware de adquisición de datos del PC.

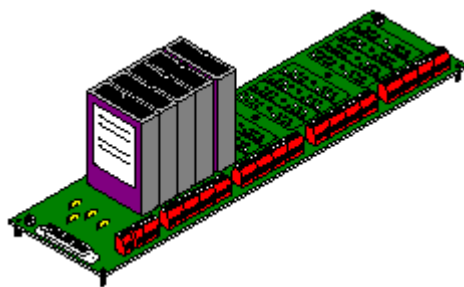


FIGURA 6. Tarjeta acondicionadora de señales

Algunos ejemplos de acondicionamiento de señal son: escalización de señal, amplificación, linealización, compensación de junta fría, filtrado, atenuación, excitación, rechazo de modo común, etc.

Amplificación: El tipo más común de acondicionamiento es la amplificación. Las señales provenientes de termocuplas que son de muy bajo nivel (del orden de los mV) pueden ser amplificadas para incrementar la resolución y reducir el ruido.

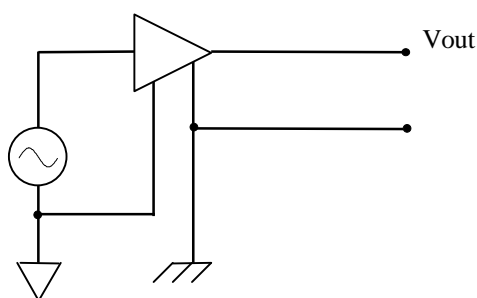


FIGURA 7. Amplificación de señales.

Para obtener la más alta exactitud posible, la señal debe ser amplificada de forma tal que el máximo rango de voltaje de la señal acondicionada sea igual máximo rango de entrada del convertidor análogo-digital (ADC).

Aislamiento: Otra aplicación común de acondicionamiento es el aislamiento de señales entre los transductores y el PC por razones de seguridad, ya que en el sistema que está siendo monitoreado se pueden producir transitorios de alto voltaje que pueden dañar el computador.

Una razón adicional por la cual se necesita aislamiento es para asegurarse que las lecturas provenientes de la tarjeta DAQ no son afectadas por diferencias en los potenciales de tierra o voltajes en modo común. Cuando la entrada de la tarjeta DAQ y la señal que está siendo adquirida están aterrizadas en puntos diferentes, pueden ocurrir problemas si hay diferencias de potencial entre las dos tierras.

Estas diferencias conducen a lo que se conoce como “lazo de tierra”, el cual puede causar representaciones inexactas de la señal adquirida, o si es muy grande, puede

dañar el sistema de medición. Utilizando módulos acondicionadores de señal de aislamiento se eliminan los lazos de tierra y se asegura que las señales se adquieran con exactitud.

Filtrado: Los filtros remueven señales desconocidas de la señal que se está verdaderamente interesado en medir. Los filtros de ruido se utilizan en señales de corriente directa (DC) tales como temperatura con el fin de atenuar las altas frecuencias que reducen la exactitud de la medición.

Las señales de AC (corriente alterna) tales como vibraciones requieren un tipo diferente de filtro, conocido como filtro “**antialiasing**”. Al igual que el filtro de ruido, el filtro antialiasing es también un filtro pasabajas; sin embargo éste tiene además una pendiente alta en la frecuencia de corte, de tal forma que remueve todas las componentes de frecuencia que son más altas que el ancho de banda de entrada de la tarjeta. El **aliasing** es un efecto que consiste en que, señales de entrada con componentes de muy alta frecuencia aparecen en el código digital como señales erróneas de baja frecuencia. (Ver figura 2)

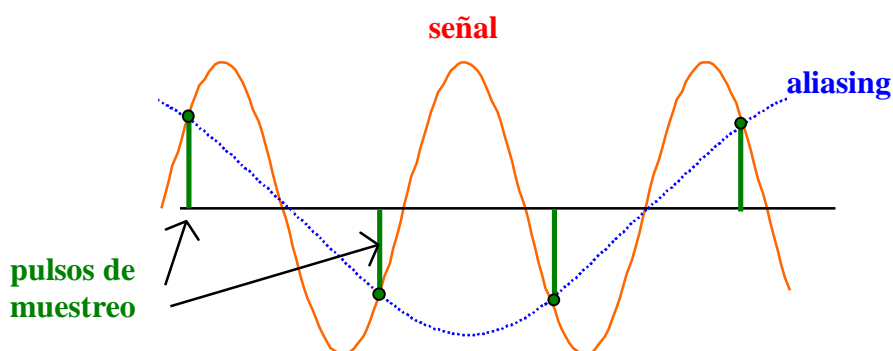


FIGURA 8. Aliasing

El aliasing también ocurre cuando la tasa de muestreo es muy baja y la señal de entrada es de baja frecuencia. Esta frecuencia errónea del aliasing no puede ser distinguida de los datos verdaderos.

Cuando las entradas contienen componentes de frecuencias desconocidas, se muestrea a la más alta tasa de frecuencia que es posible o se remueven las muy altas frecuencias pasándolas a través de filtros pasabajas.

El filtro antialiasing, es entonces un filtro análogo pasabajas que realiza el corte de las señales de alta frecuencia no deseadas.

Excitación: El acondicionamiento de señal también se utiliza como voltaje o corriente de alimentación para algunos transductores. Las galgas extensiométricas, las

RTDs y termistores, requieren fuentes externas de voltaje o de corriente. Los módulos acondicionadores de señal para éstos transductores usualmente proveen dichas señales. Las mediciones con RTDs, por ejemplo, se hacen comúnmente con fuentes de corriente que convierten una variación de resistencia en un voltaje.

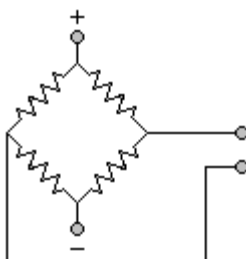


FIGURA 9. Puente para medición con galgas.

Linealización: Otra función de acondicionamiento de señal es la linealización. Muchos transductores, como las termocuplas, tienen una respuesta no lineal a los cambios en las variables que están siendo medidas. Esta linealización se puede hacer también por software, pero tiene algunas desventajas cuando se requieren altas velocidades de muestreo.

Hardware de adquisición de datos:

El núcleo del sistema de adquisición de datos es el hardware que realiza la interfase entre el PC y el mundo real. El hardware por lo general está disponible en forma de tarjetas enchufables en el bus de expansión del PC o en los puertos del PC. También existen tarjetas en las cuales se encuentra el PC y el DAQ integrados en una solo conjunto.

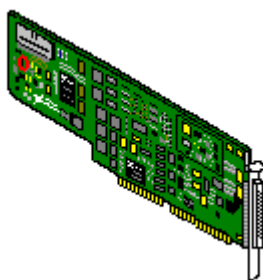


FIGURA 10. Tarjeta de adquisición de datos. (Cortesía: National Instruments)

Un hardware DAQ generalmente está conformado por uno o varios elementos con las siguientes funciones:

- entradas análogas
- salidas análogas

- entradas digitales
- salidas digitales
- temporización y conteo.

Entradas análogas:

Después de que la señal ha sido acondicionada, la señal del sensor pasa a la sección de entrada análogo-digital, la cual convierte el voltaje acondicionado o señal de corriente en una señal digital la cual es leída por el PC .

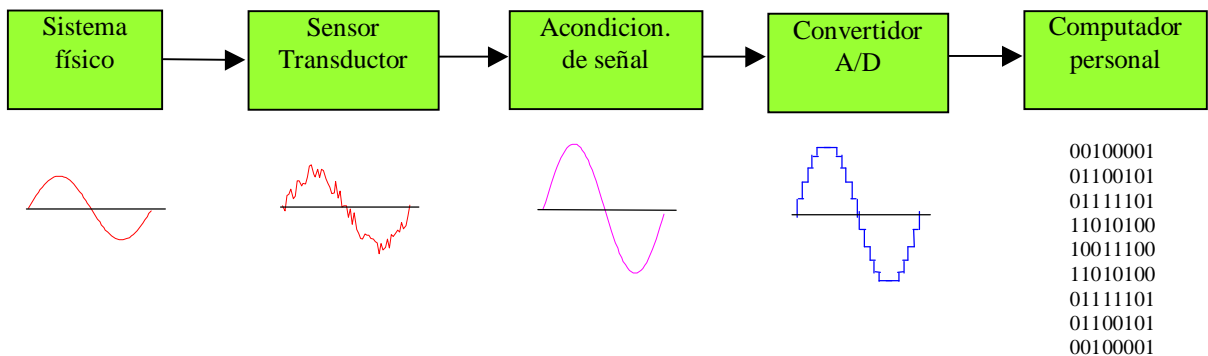
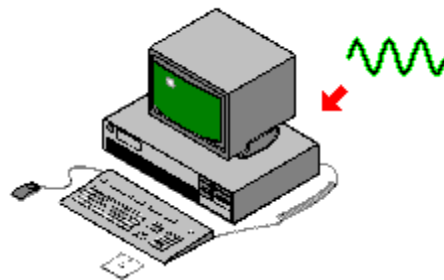


FIGURA 11. Tipos de señales en un sistema de adquisición de datos.

Las especificaciones de las entradas análogas proveen información sobre las capacidad y exactitud de la tarjeta de adquisición de datos. Las especificaciones básicas, indican el número de canales, la rata de muestreo, la resolución y el rango de entrada.

El número de canales de entradas análogas puede ser especificado de dos maneras: como entradas simples (**single-ended**) o entradas diferenciales (**differential**)

Las entradas simples están todas referenciadas a una tierra común. Estas se utilizan cuando las señales de entrada tienen un nivel de voltaje alto (>1 volt) y la distancia entre el sensor o acondicionador y la tarjeta DAQ es corta (<5 m).

Las entradas diferenciales deben ser consideradas en los siguientes casos:

- Cuando las señales medidas tienen grandes voltajes en modo común, p.ej. las galgas extensiométricas.
- Cuando se van a tomar mediciones de varios sensores, que no tienen tierra común. Al conectar el terminal negativo de cada sensor al mismo punto común, pueden crearse corrientes de tierra inesperadas, resultando en offset y errores de ruido.
- Cuando el sensor está muy distante del sistema de adquisición de datos. El rechazo de modo común (**Common mode rejection**) de una entrada diferencial ofrece alta inmunidad al ruido en el cable o línea de transmisión.

Un sistema de medición diferencial responde sólo a la diferencia de potencial entre dos terminales: el positivo (+) y el negativo (-) de la señal de entrada. Cualquier voltaje medido con respecto a la tierra del amplificador de instrumentación presenta a ambas entradas del amplificador un voltaje en modo común.

El término rango de voltaje en modo común describe la capacidad de la tarjeta DAQ con entradas diferenciales para rechazar las señales de voltaje en modo común. En una entrada diferencial, los errores de ruido se reducen porque los voltajes de ruido en modo común existentes en ambos terminales se cancelan mutuamente.

Rata de muestreo (sampling rate): Uno de los factores más críticos cuando se selecciona una tarjeta A/D es la rata (velocidad) de muestreo . La rata de muestreo es una medida de cuán rápido la tarjeta A/D puede registrar el canal de entrada e identificar el valor discreto presente con respecto a la señal de referencia.

Para un mejor entendimiento de la rata de muestreo, considere el siguiente ejemplo: Si se desea adquirir una onda senoidal que tiene una frecuencia de 1 Hz (1 ciclo por segundo), cuántos puntos deben ser necesarios para reconstruir aproximadamente la forma de onda?

Si la rata de muestreo es muy baja, entonces una forma de onda completamente diferente de una frecuencia baja es reconstruida a partir de los datos adquiridos. Este efecto es llamado **aliasing** . Para prevenir el aliasing, es necesario que la rata de muestreo sea al menos dos veces la frecuencia más alta esperada en la entrada, y que la señal sea de banda limitada. Así, para muestrear una onda senoidal de 1 HZ, la rata de muestreo debe ser al menos de 2 Hz. Sin embargo, una rata de muestreo de 8 a 16 Hz resultará en una más exacta representación de la señal que está siendo adquirida. la figura 4 ilustra el efecto del muestreo a diferentes ratas.

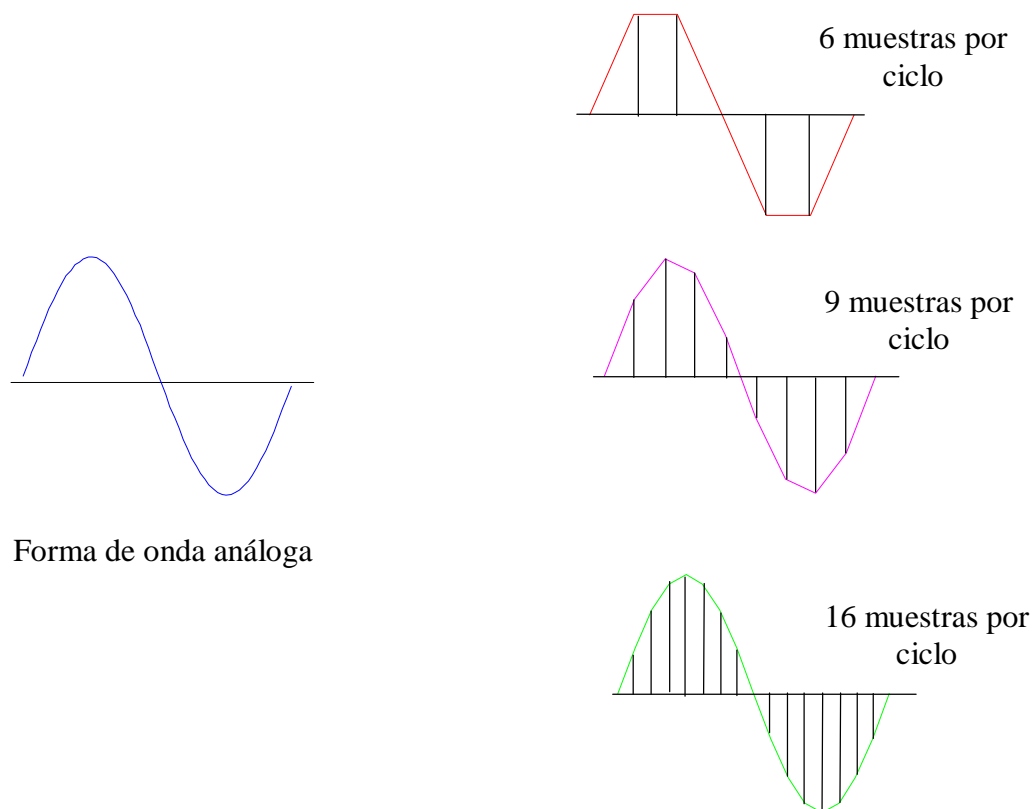


FIGURA 12. Efecto de la Rata de muestreo

El muestreo de al menos dos veces la máxima componente de frecuencia en la señal, para prevenir el aliasing tiene sus fundamentos en el **teorema de Nyquist**. La frecuencia cuyo valor es la mitad de la frecuencia de muestreo se denominada **frecuencia de Nyquist**. Por ejemplo, señales de audio que son convertidas en señales eléctricas por un micrófono, comúnmente tienen componentes de frecuencia de hasta 20 KHz. Una tarjeta con una rata de muestreo mayor de 40K muestras/seg (40 KS/s) es necesaria para adquirir adecuadamente la señal.

Multiplexado: Una técnica común para medir varias señales con un sólo convertidor análogo- digital (ADC) es el multiplexado. Un multiplexor selecciona y enruta un canal al ADC para digitalizarlo, entonces conmuta a otro canal y se repite la secuencia. Debido a que el mismo ADC es muestreado por varios canales, la rata efectiva de cada canal individual es reducida en proporción al número de canales muestreados. Por ejemplo, una tarjeta que muestrea a 100KS/s con 8 canales podrá muestrear cada canal individual a 12,5 KS/s por canal.

Resolución: La resolución de un sistema DAQ está determinada por el número de bits que el ADC utiliza para representar la señal análoga. A mayor resolución, mayor es el número de divisiones del rango de voltaje y por tanto es posible detectar voltajes más pequeños. La figura 5 muestra una onda senoidal y su correspondiente imagen digital obtenida con un ADC de 3 bits.

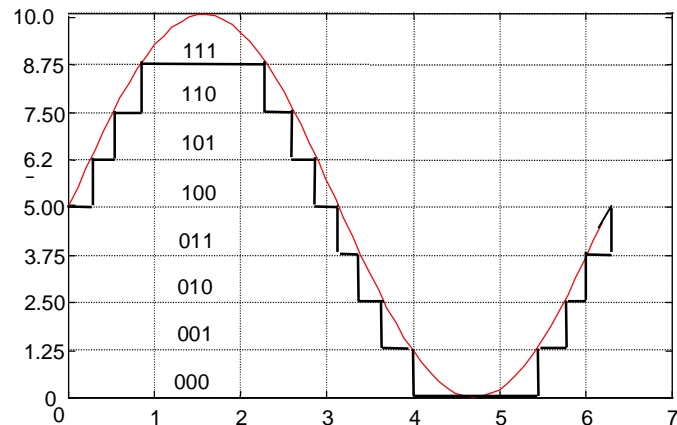


FIGURA 13. Señal digitalizada con 3 bits de resolución

Un ADC de 3 bits divide el rango análogo entre 2^3 , u 8 divisiones. Cada división está representada por un código binario entre 000 y 111. Es obvio, que la señal digital no es una buena representación de la señal análoga original, ya que parte de la información se ha perdido en la conversión. Para aumentar la resolución, se debe entonces aumentar el número de bits del convertidor ADC, si se incrementa por ejemplo, a 12 bits, el número de códigos binarios aumenta de 8 a 4096, obteniéndose una representación digital más exacta de la señal análoga.

Rango: El rango hace referencia, al mínimo y máximo nivel de voltaje que el ADC puede medir.

El rango, resolución y ganancia disponibles en una tarjeta determinan el más pequeño cambio de voltaje detectable. El cambio en el voltaje está representado por 1 LSB (bit menos significativo) del valor digital, y es llamado frecuentemente ancho de código. El ancho de código ideal se halla dividiendo el rango de voltaje por la ganancia y por 2^n , siendo n el número de bits de resolución.

Ejemplo: Si se tiene una tarjeta DAQ con rango de 0 a 10V, ganancia programable de 100 y 12 bits de resolución, el ancho de código ideal será:

$$\frac{10 \text{ V}}{100 \cdot 2^{12}} \cong 25\mu\text{V}$$

Luego, la resolución teórica de un bit en el valor digitalizado es $25\mu\text{V}$.

Salidas análogas:

Las salidas análogas de una tarjeta de adquisición de datos generadas por los circuitos convertidores digital-análogo (DAC) son utilizadas para el control de variables físicas por intermedio de los actuadores.

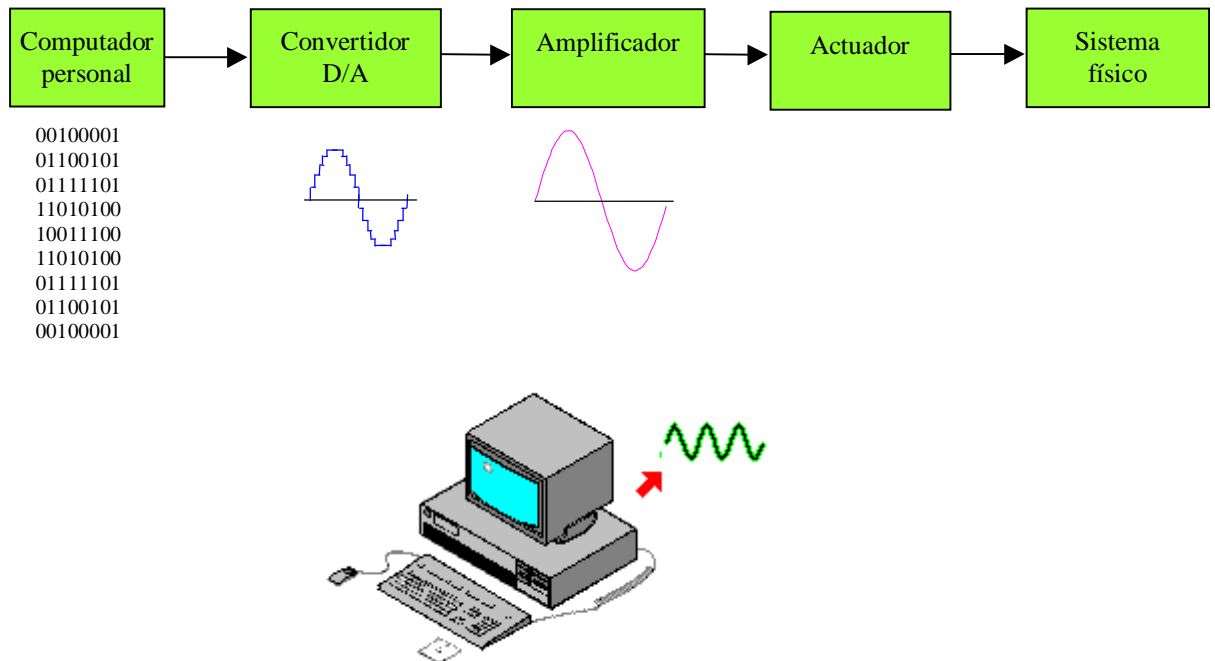


FIGURA 13. Salidas análogas

Varias especificaciones para DACs determinan la calidad de la señal de salida producida - tiempo de asentamiento, slew rate, y resolución. El tiempo de asentamiento (**settling time**) y la tasa de eliminación (**slew rate**) juntos determinan cuan rápido el DAC cambia el nivel de la salida . El tiempo de asentamiento es el tiempo requerido por la salida para alcanzar la exactitud especificada. El tiempo de asentamiento se especifica comúnmente para un cambio a plena de escala en el voltaje. La slew rate es la máxima tasa de cambio (dV/dt) que el DAC puede producir sobre la señal de salida. Por lo tanto, un DAC con tiempo de asentamiento pequeño y una alta slew rate puede generar señales de alta frecuencia, porque precisamente necesitan tiempos pequeños para cambiar la salida al nuevo nivel de voltaje. En la figura 9 se ilustra el concepto de tiempo de asentamiento.

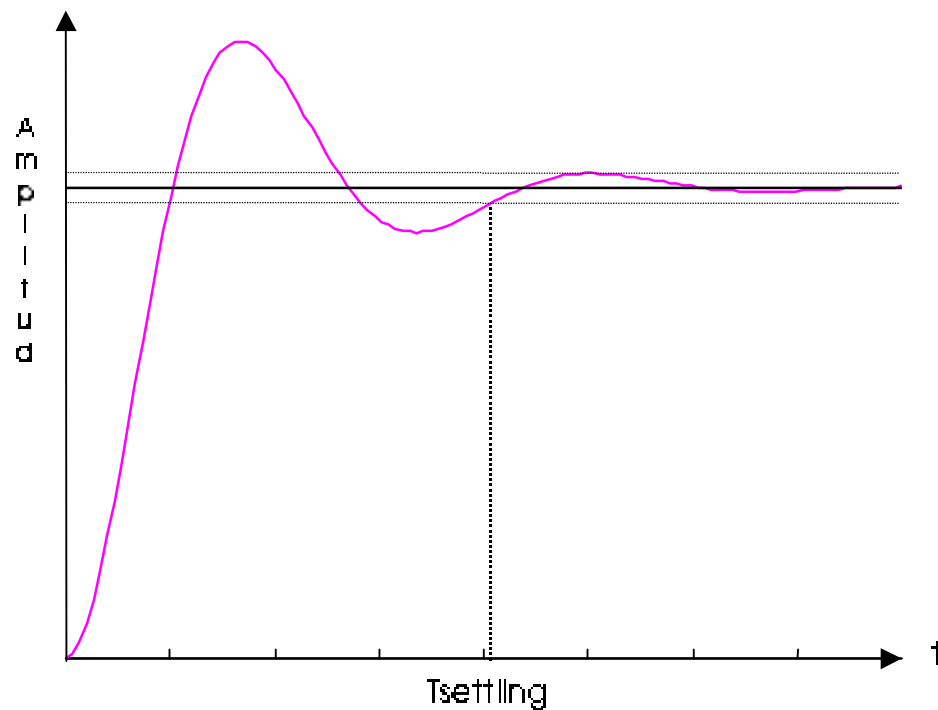


FIGURA 9. Tiempo de asentamiento

Un ejemplo de una aplicación que requiere alto desempeño en éstos parámetros, es la generación de señales de audio. El DAC requiere una alta tasa de eliminación (slew rate) y un tiempo de asentamiento (settling time) pequeño para generar las altas frecuencias necesarias para cubrir el rango de audio. En contraste, una aplicación que no requieren una rápida conversión D/A es por ejemplo una fuente de voltaje que controla a un calefactor. Debido a que el calefactor no responde rápidamente a los cambios de voltaje, una conversión rápida no es necesaria. La aplicación determina las especificaciones del DAC.

La resolución de salida es similar a la resolución de entrada. Esta es el número de bits en el código digital que genera la salida analoga. Un gran número de códigos reduce la magnitud de cada incremento de voltaje, haciendo posible la generación de señales que cambien suavemente. Aplicaciones que requieren de un amplio rango dinámico con pequeños cambios incrementales en la señal de salida analoga necesitan voltajes de salida con alta resolución.

Salidas y/o entradas digitales: (DIO) Las interfaces de entrada/salida digitales (DIO) son usadas generalmente en sistemas DAQ para el control de procesos, generación de patrones para ensayos, y comunicación con dispositivos periféricos.

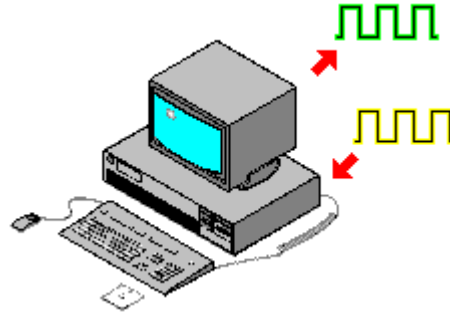


FIGURA 14. Salidas y entradas digitales.

En cada caso, los parámetros importantes incluyen el número de líneas disponibles, la rata a la cual se puede recibir y entregar datos digitales, y la capacidad de manejo de las líneas.

Si las líneas digitales son usadas para controlar eventos



Los procesos físicos se comportan como sistemas continuos, pero los algoritmos que implementa un ordenador son siempre discretos.

Supóngase un sistema discreto cuya entrada $u(k)$ es una secuencia de valores unitarios, y cuya salida se denota por $y(k)$. Se asume que este sistema presenta condiciones iniciales nulas y se encuentra descrito por la siguiente ecuación:

$$y(k+1) - y(k) = 2u(k)$$

Para hallar la salida $y(k)$ se construye una tabla de valores partiendo de la condición inicial $y(0)=0$ y de la señal de entrada:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

k	y(k)	u(k)	y(k+1)
0	0	1	$0+2*1=2$
1	2	1	$2+2*1=4$
2	4	1	$4+2*1=6$
3	6	1	$6+2*1=8$

Si se analizan los valores que toma $y(k)$ se deduce explícitamente que la ecuación en función del tiempo discreto es:

$$y(k) = 2k, \quad k \geq 0$$

2.1 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA Z:

La transformada z es una herramienta matemática muy utilizada en el análisis y síntesis de sistemas de control en tiempo discreto. La transformada z en tiempo discreto opera de manera similar a la transformada de Laplace en tiempo continuo, es decir, las ecuaciones en diferencias se transforman en ecuaciones algebraicas en el dominio de z.

Al considerar la transformada z de una función en el tiempo $x(t)$, sólo se toman en cuenta los valores muestreados de $x(t)$, es decir, $x(0), x(T), x(2T), \dots, x(kT)$, donde T es el período de muestreo.

La transformada z de una función del tiempo $x(t)$, donde t es positivo, o de la secuencia de valores $x(kT)$, donde k adopta valores de cero o de enteros positivos y T es el período de muestreo, se define mediante la siguiente ecuación:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} \quad (1)$$

donde z es la variable compleja.

Para una secuencia de números $x(k)$, la transformada z se define como:

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} \quad (2)$$

La transformada z definida mediante las ecuaciones (1) y (2) se conoce como transformada z unilateral. Esto quiere decir que, la transformada z para valores de $k < 0$ es cero.

Si se expande el segundo término de la ecuación (1), el resultado es:

$$X(z) = x(0) + x(T) \cdot z^{-1} + x(2T) \cdot z^{-2} + x(3T) \cdot z^{-3} + \dots + x(kT) \cdot z^{-k} + \dots \quad (3)$$

La ecuación (3) implica que la transformada z de cualquier función en tiempo continuo $x(t)$ se puede escribir mediante inspección, en la forma de una serie.

2.2 Transformada z de funciones elementales.

1. Función impulso unitario:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t \neq 0 \end{cases}$$

$$Z[x(t)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

2. Función paso unitario:

$$x(t) = \begin{cases} 1(t) & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

$$Z[x(t)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = z^{-k}$$

La cual es equivalente a la expansión en series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \text{ siendo } a = z^{-1}, \text{ luego:}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

3. Función exponencial:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } x(kT) = e^{-akT}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$X(z) = Z[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-akT}) z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots$$

Por expansión en series de potencias $a = e^{-aT}$:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

4. Función polinomial:

$$x(k) = a^k$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^k$$

Nuevamente, por expansión en series de potencias:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Ejemplo:

Obtenga la transformada z de la función senoidal:

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega t) & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Sol: Expresando la función seno en forma exponencial, se tiene que:

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

y con la transformada z de la función exponencial:

$$X(e^{-aT}) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$X(z) = Z[\text{sen } \omega t] = Z\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}} \right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{(1 - e^{-j\omega} z^{-1}) - (1 - e^{j\omega} z^{-1})}{(1 - e^{j\omega} z^{-1})(1 - e^{-j\omega} z^{-1})} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{-j\omega} z^{-1} - 1 + e^{j\omega} z^{-1}}{1 - e^{j\omega} z^{-1} - e^{-j\omega} z^{-1} + e^{j\omega} z^{-1} e^{-j\omega} z^{-1}} \right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) z^{-1} + z^{-2}} \right)$$

donde: $\text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ y $\text{cos}(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ luego:

$$X(z) = \frac{z^{-1} \text{sen}(\omega t)}{1 - 2z^{-1} \text{cos}(\omega t) + z^{-2}} = \frac{z \text{sen}(\omega t)}{z^2 - 2z \text{cos}(\omega t) + 1}$$

Al igual que en transformada de Laplace, las tablas de pares de transformadas z son muy útiles para la solución de problemas de sistemas en tiempo discreto. A continuación se muestra una tabla de este tipo:

	$X(s)$	$x(t)$	$x(KT)$ o $x(k)$	$X(z)$
1	-	-	$\delta(k)$ $\begin{cases} 1 & \text{para } k=0 \\ 0 & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$	1
2	-	-	$\delta(k-m)$ $\begin{cases} 1 & \text{para } k=m \\ 0 & \text{para } k \neq m \end{cases}$	z^{-m}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
6	$\frac{1}{s^3}$	t^2	$\frac{(kT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
7	$\frac{1}{s^4}$	t^3	$\frac{(kT)^2}{3!}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{6 \cdot (z-1)^4}$
8	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$	$kT \cdot e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{2}(kT)^2 \cdot e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2} e^{-aT} \frac{z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\text{sen}(at)$	$\text{sen}(akT)$	$\frac{z \cdot \text{sen } aT}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
12	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\text{cos}(at)$	$\text{cos}(akT)$	$\frac{z(z - \text{cos } aT)}{z^2 - (2 \cos aT)z + 1}$
13	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \text{cos } bt$	$e^{-akT} \text{cos } bkT$	$\frac{z(z - e^{-aT} \text{cos } bT)}{z^2 - 2e^{-aT} (\text{cos } bT)z + e^{-2aT}}$
14	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \text{sen } bt$	$e^{-akT} \text{sen } bkT$	$\frac{z \cdot e^{-aT} \text{sen } bT}{z^2 - 2e^{-aT} (\text{cos } bT)z + e^{-2aT}}$

15	-	-	a^k	$\frac{z}{z-a}$
16	-	-	a^{k-1} $k=1,2,3,\dots$	$\frac{1}{z-a}$
17	-	-	$k a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
18	-	-	$k^2 a^{k-1}$	$\frac{z(z+a)}{(z-a)^3}$
19	-	-	$\frac{k(k-1)}{2!}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$

2.3. Propiedades y teoremas de la transformada z:

El uso de propiedades de la transformada z simplifica la ejecución de algunos problemas. A continuación se presentan las propiedades y teoremas más importantes de la transformada z:

	$x(t)$ o $x(k)$	$Z[x(t)]$ ó $Z[x(k)]$	Propiedad
1	$ax(t)$	$aX(z)$	Multiplicación por una constante
2	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$	Linealidad
3	$x(t - nT)$	$z^{-n} X(z)$	Retraso en el tiempo
4	$x(k - n)$	$z^{-n} X(z)$	Retraso en el tiempo
5	$x(t + nT)$	$z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(T) - \dots - z x(nT - T)$	Adelanto en el tiempo
6	$x(k + n)$	$z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(1) - \dots - z x(n-1)$	Adelanto en el tiempo
7	$e^{-at} x(t)$	$X(z e^{aT})$	Traslación compleja
8	$e^{-at} x(k)$	$X(z e^a)$	Traslación compleja
9	$a^k x(k)$	$X(a^{-1} z)$	Multiplicación por a^k
10	$k^m a^k x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X\left(\frac{z}{a}\right)$	
11	$k a^k x(k)$	$-z \frac{d}{dz} X\left(\frac{z}{a}\right)$	

12	$x(0)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} X(z)$ si el límite existe	Teorema del valor inicial
13	$x(\infty)$	$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$ si $1 - z^{-1}$ no tiene polos en el círculo unitario o fuera de él	Teorema del valor final
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Incompleto

3. SISTEMAS MUESTREADOS

3.1 SEÑALES DE MUESTREO:

Cuando se incorpora un procesador digital a un bucle de control, el funcionamiento difiere sensiblemente del que tendría un sistema de control analógico:

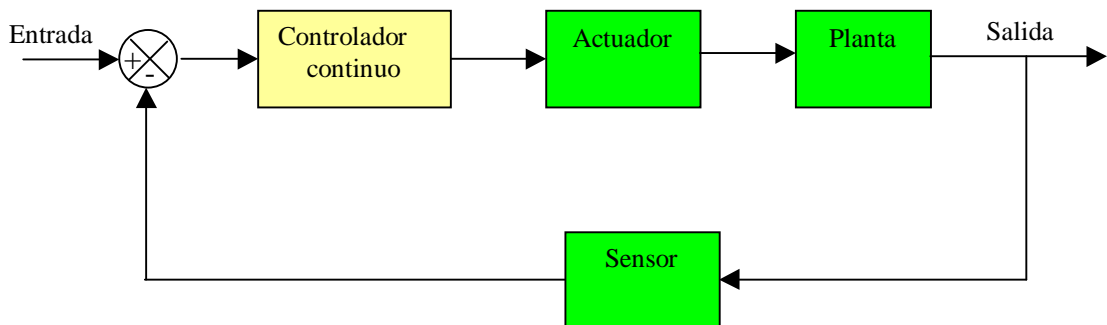


FIGURA 16. Lazo de control continuo realimentado

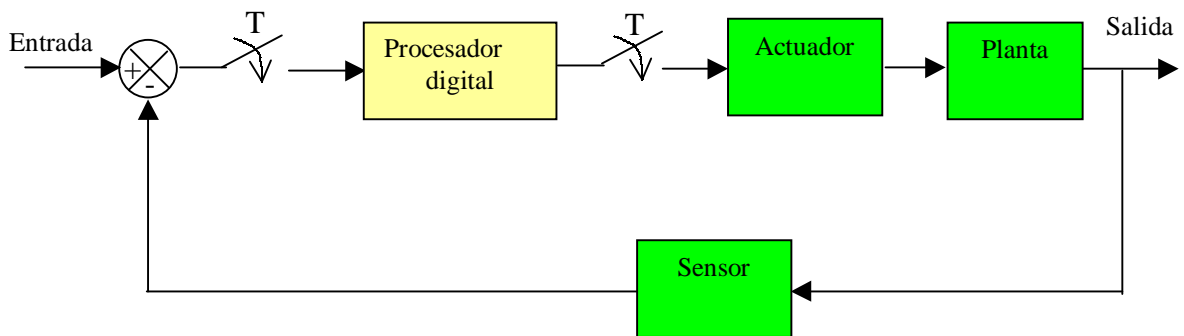


FIGURA 17. Lazo de control realimentado mediante un procesador digital
El controlador analógico proporciona continuamente al actuador una señal de control para el proceso a partir de la señal de error.

Un controlador digital trabaja secuencialmente, de manera que el error le llega en un instante dado, se procesa en un algoritmo de control y genera una señal para el actuador.

El error se muestrea a intervalos regulares de tiempo llamados períodos de muestreo, y la señal que le llega al actuador es actualizada generalmente a la misma frecuencia de muestreo. El retardo entre el muestreo del error y la acción sobre el proceso físico suele considerarse despreciable. Los interruptores que aparecen en la Figura 17, se implementan físicamente con los convertidores y marcan el flujo de la información.

Al hacer un muestreo de la señal a intervalos discretos, se obtienen una serie de impulsos cuya amplitud es proporcional al valor de la variable de entrada en el instante del muestreo y que reciben el nombre de **señal muestreada**.

El proceso de muestreo puede considerarse como una modulación en amplitud de pulso de la señal continua de entrada que se muestrea. Dicha entrada es modulada por un tren de pulsos de amplitud la unidad.

3.2 Muestreador ideal:

El muestreador ideal se representa mediante un interruptor:



FIGURA 18. Representación del muestreador ideal.

El muestreador ideal es comúnmente llamado **muestreador mediante impulsos**.

La salida del muestreador es un tren de impulsos que comienza en $t=0$, con el período de muestreo T y la magnitud de cada impulso es igual al valor muestreado de la señal en tiempo continuo en el instante de muestreo correspondiente.

El proceso de muestreo puede considerarse como una modulación en amplitud de pulso de la señal continua de entrada que se muestrea. Dicha entrada será modulada por un tren de impulsos de amplitud la unidad. (Figura 19)

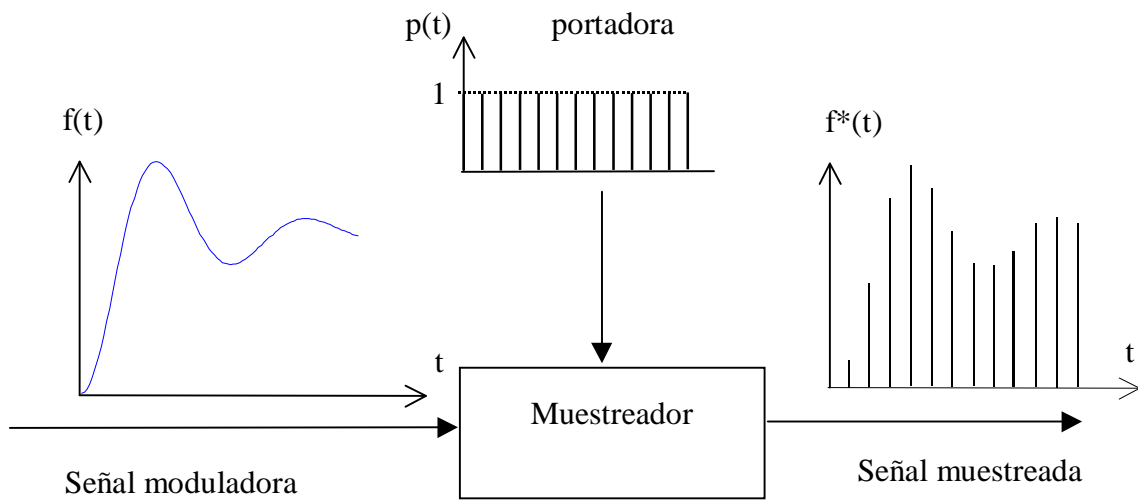


FIGURA 19. Muestreador mediante impulsos como modulador.

Si disminuye el período el período de muestreo, la señal de salida será más fiel a la original, si bien el proceso de muestreo será más costoso al requerir un mayor número de valores.

Con el fin de simplificar el análisis matemático, se asume que el proceso de muestreo es ideal. Esto implica que el tren de pulsos $p(t)$ se puede tomar como una serie de deltas de Dirac:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \delta(t) + \delta(t - kT) + \delta(t - 2kT) + \dots$$

donde:

$$\delta(t).f(t) = \begin{cases} f(0) & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

La salida modulada del muestreador puede escribirse como:

$$f^*(t) = p(t).f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t).\delta(t - kT)$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t).\delta(t - kT)$$

3.3 Reconstrucción de señales muestreadas: concepto de retenedor

Si se considera un lazo de control digital como el que se muestra en la figura 20, en el que el algoritmo de control, es una constante de proporcionalidad, de valor 2: $u^*(t) = 2 \cdot e^*(t)$

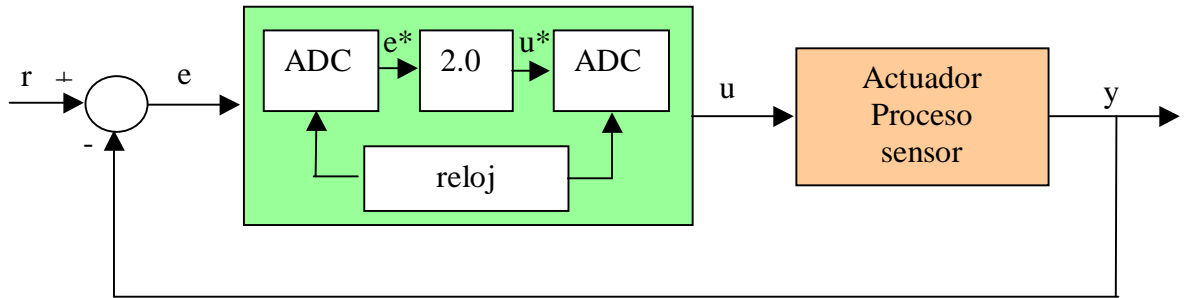


FIGURA 20. Diagrama de bloques de un control por computador.

Al analizar el flujo de información a lo largo del computador, se tienen las siguientes señales:

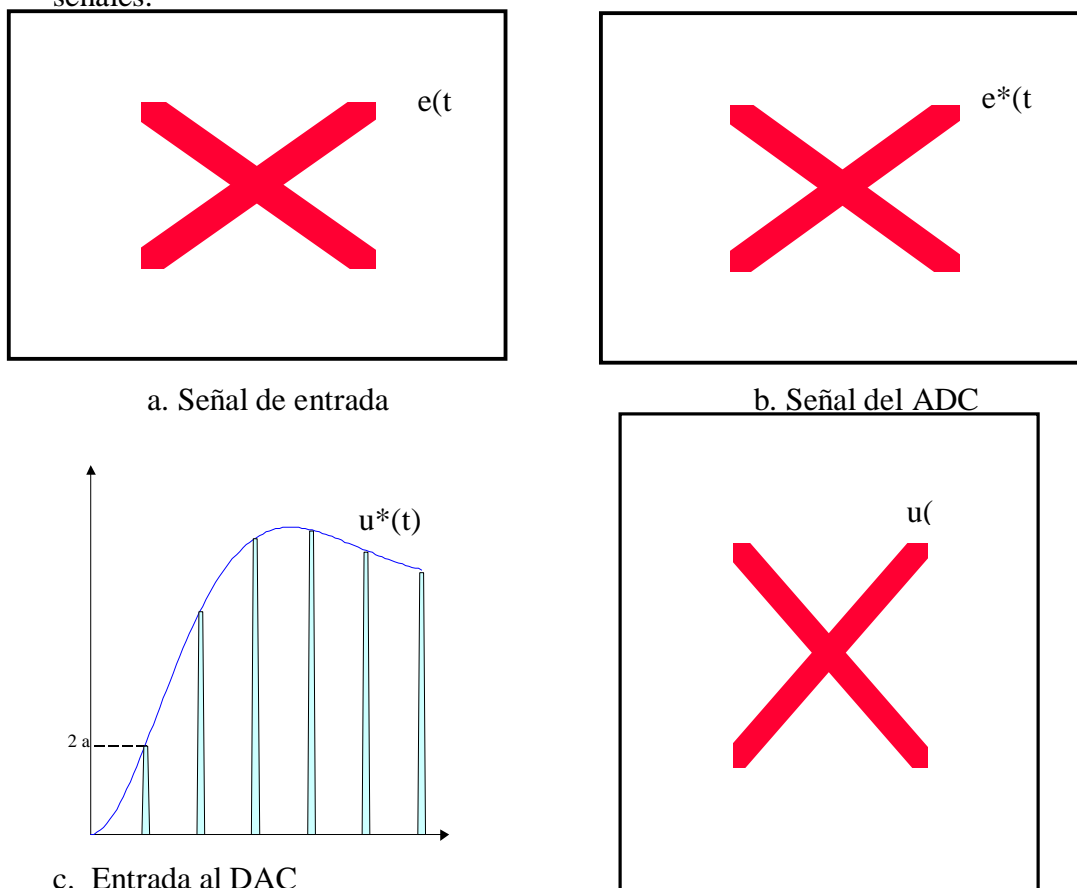


FIGURA 21. Señales en varios puntos del computador

El hecho de que el computador tome datos del exterior solamente en los instantes de muestreo, origina retardos en la toma de acciones correctoras.

El ADC muestrea la señal continua, transformándola en digital; este proceso va asociado a una cuantificación de la información.

El ADC "retiene" el valor de la señal durante un período de muestreo, hasta que llegue el siguiente dato de control, dando como salida una señal escalonada $u(t)$.

La función que desempeña el ADC comercial es la de un **retenedor de orden cero (Z.O.H.)**, el cual se comporta así: Al llegarle una señal impulso, da como resultado un escalón de la misma amplitud y anchura igual al período de muestreo T , tal como se muestra en la Figura 22.

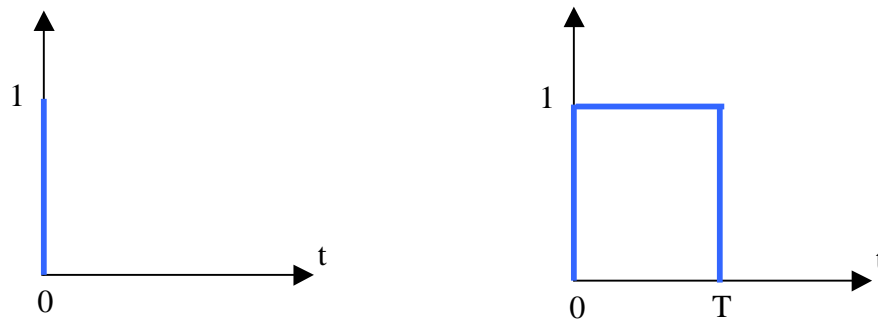
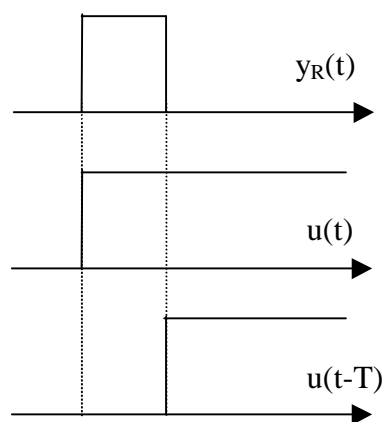


FIGURA 22. Respuesta de un retenedor de orden cero

Esta es la respuesta en el dominio del tiempo y es una combinación de dos escalones unitarios:

- Un escalón positivo $u(t)$
- Un escalón negativo $u(t-T)$ retrasado un período de muestreo tras aplicar un impulso.



Dicha respuesta puede expresarse en el dominio del tiempo como:

$$y_{ZOH} = u(t) - u(t - T)$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación anterior:

$$Y_{ZOH}(s) = U(s) - e^{-sT} \cdot U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Como a la entrada del retenedor se tiene un impulso unitario (delta de dirac), $E_R(s)$, la función de transferencia del retenedor de orden cero será:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{Y_{ZOH}(s)}{E_R(s)}$$

$$G_{ZOH} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

De igual manera, se tiene el **retenedor de primer orden (FOH)**, el cual no se utiliza en control, debido a la complejidad en su implementación.

Este tipo de retenedor, en lugar de mantener un nivel de señal, genera una rampa de pendiente marcada por los dos últimos valores de entrada.

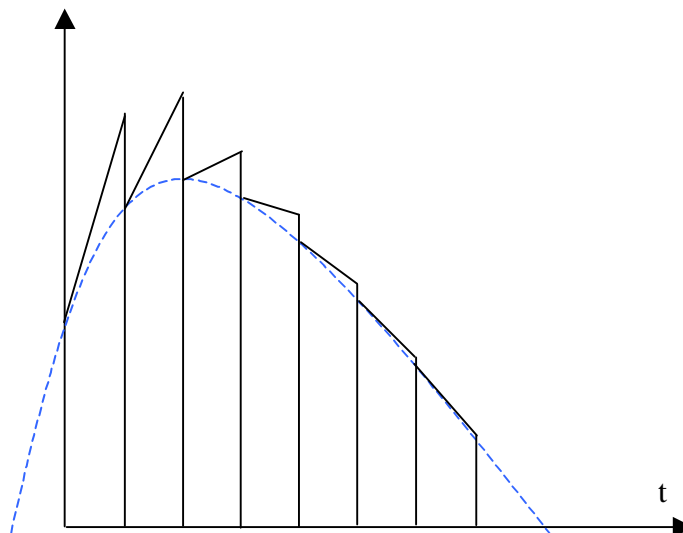


FIGURA 23. Comportamiento de un retenedor de primer orden

La respuesta impulso de un FOH se representa en la figura 24

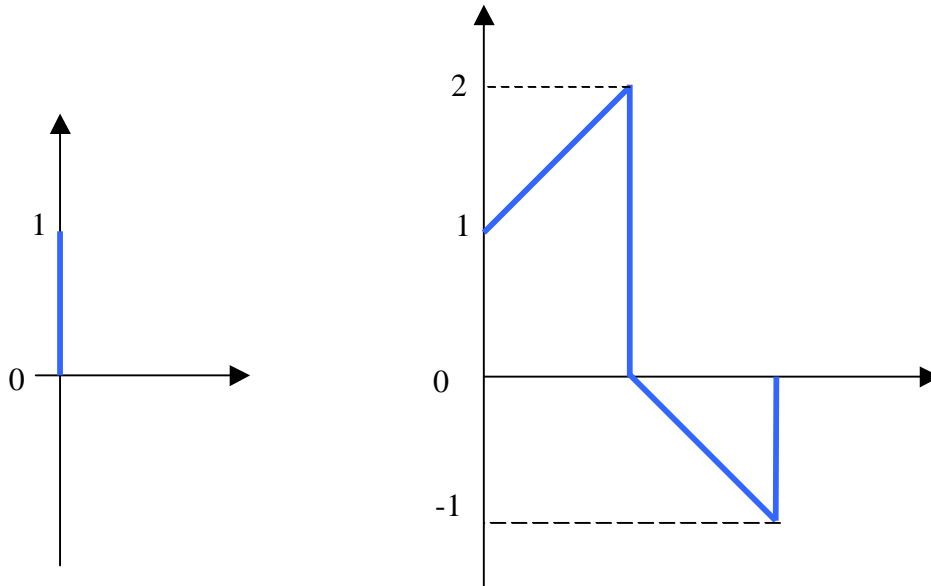


FIGURA 24. Respuesta impulso de un retenedor de primer orden

3.4 Transformada de Laplace de señales muestreadas

La transformada de Laplace de una señal continua $f(t)$ es $F(s)$ y la de su correspondiente señal muestreada $f^*(t)$, $F^*(s)$.

La transformada de Laplace de una señal muestreada, es por definición:

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot e^{-st} dt$$

$f^*(t)$ se obtiene multiplicando $f(t)$ por un tren de impulsos:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot f(t)$$

Colocando esto en la integral:

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Intercambiando la integral y la sumatoria:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) f(t) e^{-st} dt$$

Aplicando una propiedad del delta de Dirac, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \delta(t) dt = h(0)$$

por tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \delta(t-kT) dt = h(kT)$$

en este caso $h(t) = f(t) \cdot e^{-st}$; luego:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) e^{-ksT}$$

Ejemplo: Hallar la transformada de Laplace de una función escalón unitario muestreada.

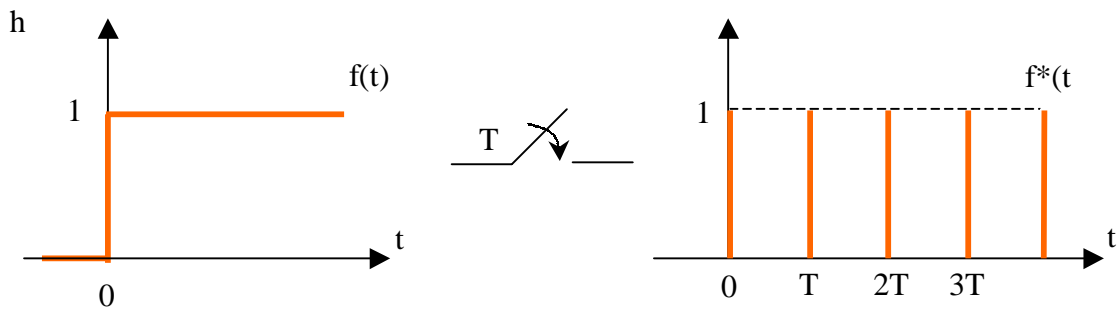


FIGURA 25. Señal escalón unitaria muestreada

La función muestreada es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Luego, la transformada de la función, se reduce a:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot e^{-skT} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT}$$

$$F^*(s) = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + e^{-4sT} + \dots = \frac{1}{1 + e^{-sT}}$$

3.5 Espectro en frecuencia de una señal muestreada:

Ahora se encontrará el espectro en frecuencia de una señal muestreada, con el fin de analizar los efectos del muestreo:

Por definición de la Transformada de Laplace:

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) \cdot e^{-st} dt$$

como $f(t)$ no depende de "n" sale fuera de la sumatoria:

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot e^{-st} dt$$

Se analizará ahora el tren de impulsos $\delta(t - kT)$ mediante las series de Fourier, según las cuales cualquier señal T-periódica se puede descomponer en una sumatoria infinita de senos y cosenos:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k \text{ Sen}(k\omega_s t) + b_k \text{ Cos}(k\omega_s t)]$$

donde $\omega_s = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental.

Pero también puede representarse por una serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{jm\omega_s t}$$

siendo

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jm\omega_s t} dt$$

En este caso $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$ es una señal periódica y, por tanto:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{m=0}^{+\infty} C_m e^{jm\omega_s t}$$

con

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot e^{-jm\omega_s t} dt$$

ahora bien, en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ la sumatoria se reduce a un único término, aquel para el cual $k=0$ y en la integral se aplica la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = f(0)$$

con lo cual: $C_m = \frac{1}{T}$, para todo m

De esta forma, la expresión del tren de impulsos, queda:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{jm\omega_s t}$$

sustituyendo en la ecuación que define la transformada de Laplace de la señal

muestreada $F^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot e^{-sT} dt$, se tiene que:

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm\omega_s t} e^{-sT} dt$$

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s-jm\omega_s)t} dt$$

finalmente:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(s - jm\omega_s)$$

Para trabajar en el dominio de la frecuencia, se realiza la transformación $s=j\omega$

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega - jk\omega_s)$$

Esta expresión indica que la operación de muestreo introduce nuevas componentes espectrales que no son sino una traslación en el dominio de la frecuencia del espectro base de transformación $F(j\omega)$.

3.5 Teorema del muestreo:

Si una señal $f(t)$ es una señal con ancho de banda limitado en frecuencia; es decir, tiene componentes nulos o despreciables para frecuencias superiores a un valor dado ω_c , como se muestra en la figura 26. Donde $|F(j\omega)|=0$ para $|\omega|>\omega_c$.

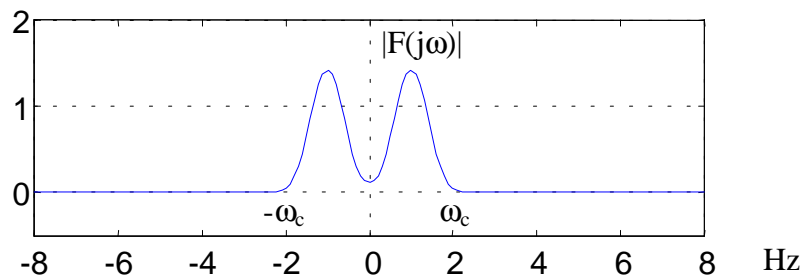


FIGURA 26. Espectro de la señal original $f(t)$

El teorema de muestreo, también conocido como teorema de Shanon-Nyquist, da una cota inferior de la frecuencia de muestreo adecuada para poder reconstruir una señal original a partir de sus muestras.

Si $\omega_s > 2\omega_c$, siendo ω_s la frecuencia de muestreo, $F^*(j\omega)$ tiene la forma de la figura 27 y no hay solapamiento de componentes. La señal original puede ser reconstruida

pasando un $f^*(t)$ por un filtro pasa baja ideal con una frecuencia de corte ω_c , que eliminará las altas frecuencias indeseables introducidas en el proceso de muestreo.

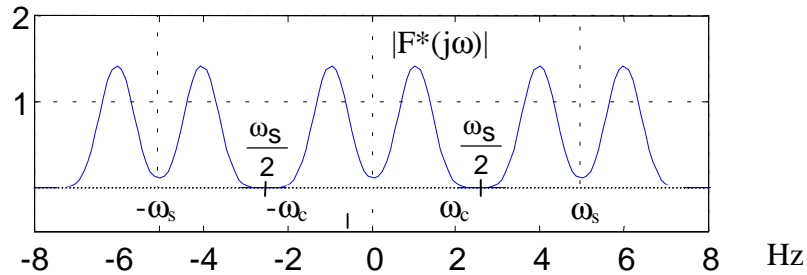


FIGURA 28. Espectro de salida muestreada $F^*(j\omega)$ con $\omega_s \geq 2\omega_c$.

Si $\omega_s < 2\omega_c$ o $f(t)$ no tiene un ancho de banda limitado en frecuencia, las distintas componentes se solapan (Figura 29) y la señal original no puede ser reconstruida de ninguna forma a partir de $f^*(t)$.

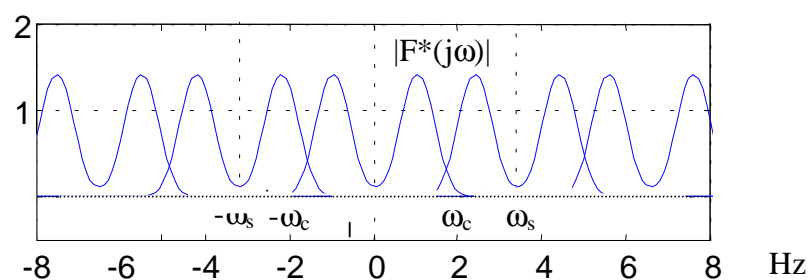


FIGURA 29. Espectro de la salida muestreada cuando $\omega_s < 2\omega_c$.

Este fenómeno es conocido como aliasing

El teorema fundamental del muestreo queda como sigue:

"Si una señal $f(t)$ tiene un espectro de frecuencia limitado por ω_c y la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/T$ es mayor o igual que $2\omega_c$, entonces la señal muestreada $f^*(t)$ caracteriza por completo la señal continua $f(t)$ y es teóricamente posible reconstruir la señal continua a partir de la muestreada."

El mayor problema que se encuentra, es el de fijar ω_c ; ya que una vez conocido ω_c se sabe que $\omega_s \geq 2\omega_c$ y el período de muestreo será: $T = 2\pi/\omega_s$.

3.6 Filtros:

Para la reconstrucción de la señal original $f(t)$ a partir de la muestreada $f^*(t)$ es absolutamente necesario eliminar las componentes de altas frecuencias introducidas en la operación de muestreo (Figura 28). Idealmente, la eliminación se consigue a través de un filtro pasabajo cuyas características se muestran en la Figura 30.

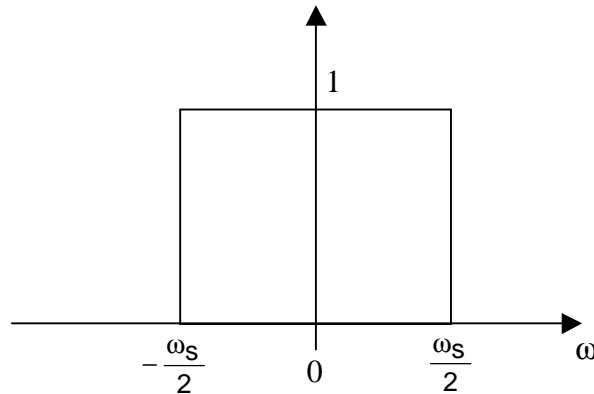


FIGURA 30. Filtro pasa bajo ideal.

El filtro ideal tiene por frecuencia de corte la mayor frecuencia ω_c de la señal muestreada y una amplitud unitaria en el rango de frecuencias de $-\omega_c$ a $+\omega_c$.

Para cumplir los límites del teorema del muestreo, $\omega_c = \omega_s/2$. El filtro ideal no es realizable en la práctica y lo que se hace es aproximar la señal original a partir de la muestreada por diversos procedimientos.

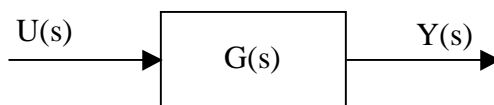
4. Sistemas de datos muestreados

Una vez estudiado el tratamiento matemático de las señales muestreadas por medio de la transformada z y el modelamiento matemático de los elementos que conforman el lazo de control digital, se analizarán los sistemas que se encuentran sujetos a entradas digitales, mediante la utilización de algunas herramientas del control continuo tal como la función de transferencia y los diagramas de bloques.

4.1 Función de transferencia discreta:

En un sistema continuo lineal, la salida está definida por la relación:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



La función de transferencia del sistema se define como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Ahora, si la señal de entrada $U(s)$, se muestrea mediante el muestreador ideal, se tendrá una señal muestreada $U^*(s)$ y la salida $Y(s)$ será entonces, una mezcla de señales continuas y discretas:

$$Y(s) = G(s)U^*(s)$$

Donde $U^*(s)$ es la transformada de Laplace de la señal muestreada

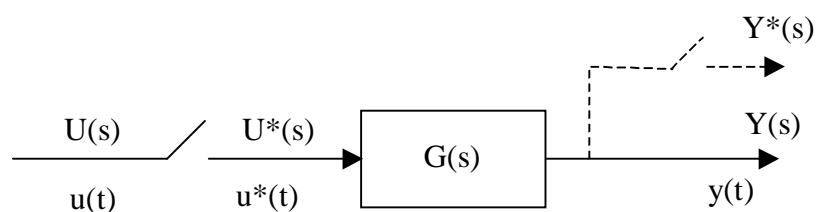


Figura 30. Sistema lineal con entrada muestreada

En el anterior sistema se introduce un muestreador ficticio a la salida del sistema, sincronizado con el de la entrada, con el fin de obtener $Y^*(s)$.

Asumiendo una operación de muestreo ideal:

$$U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(s - jn\omega_s)$$

por tanto:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(s - jn\omega_s)$$

la entrada $Y^*(s)$ al ordenador será:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s - jk\omega_s)$$

y por tanto:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[G(s - jk\omega_s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [U(s - jn\omega_s - jk\omega_s)] \right]$$

haciendo $k+n=l$

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[G(s - jk\omega_s) \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [U(s - jl\omega_s)] \right]$$

ahora:

$$U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(s - jn\omega_s)$$

es una señal repetida infinitas veces, luego independientemente de que k varíe entre $+\infty$ y $-\infty$ se puede sacar del segundo sumatorio:

$$Y^*(s) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s - jk\omega_s) \right] \left[\frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U(s - jl\omega_s) \right]$$

luego:

$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$$

Donde $G^*(s)$ se denomina función de transferencia discreta y queda definida por:

$$G^*(s) = \frac{Y^*(s)}{U^*(s)}$$

Pasando al dominio de z :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Conclusión:

$$Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s)$$

4.2 Obtención de funciones de transferencia discreta:

Consideremos el sistema mostrado en la figura 3:

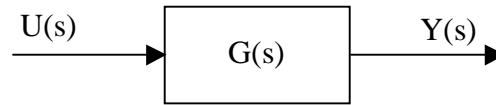


Figura 3. Sistema en tiempo continuo

La función de transferencia $G(s)$ está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Luego, la transformada de Laplace de la salida es:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Y la transformada de Laplace de la salida muestreada $Y^*(s)$ será:

$$Y^*(s) = [G(s)U(s)]^* = [GU(s)]^*$$

En términos de la transformada z:

$$Y(z) = GU(z)$$

Aquí se introduce la notación $GU(z)$ para indicar la transformada z del producto de las funciones $G(s)U(s)$:

$$Y(z) = Z [G(s)U(s)] = GU(z)$$

Ahora consideremos un sistema con muestreador:

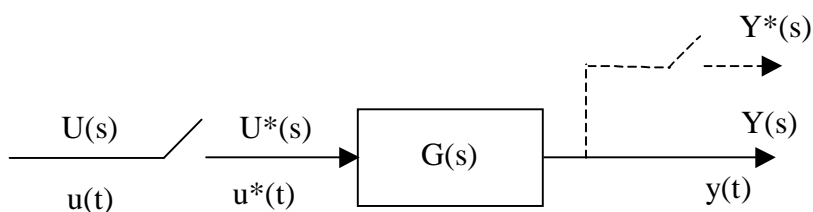


Figura 4. Sistema con muestreador

$$Y(s) = G(s)U^*(s)$$

Luego:

$$Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s)$$

Y la transformada z de la salida:

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

De donde despejamos la función de transferencia $G(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

De los anteriores resultados se concluye que:

$$G(z)U(z) \neq GU(z)$$

4.3 Funciones de transferencia discreta de elementos en cascada:

Considere el siguiente sistema:

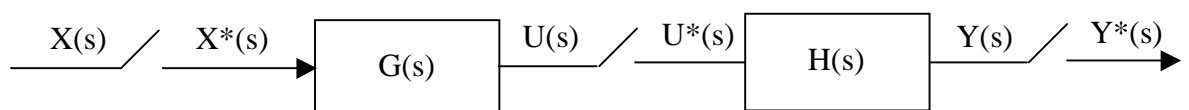


Figura 4. Sistema en cascada con muestreador intermedio

$$U(s) = G(s)X^*(s) \quad \text{y} \quad U^*(s) = [G(s)X^*(s)]^* = G^*(s)X^*(s)$$

$$Y(s) = H(s)U^*(s) \quad \text{y} \quad Y^*(s) = [H(s)U^*(s)]^* = H^*(s)U^*(s)$$

Luego:

$$Y^*(s) = H^*(s)G^*(s)X^*(s) \quad \text{y} \quad Y(z) = H(z)G(z)X(z)$$

La función de transferencia $Y(z)/X(z)$ será:

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z)G(z)}$$

Ahora, analicemos un sistema sin muestreador intermedio:

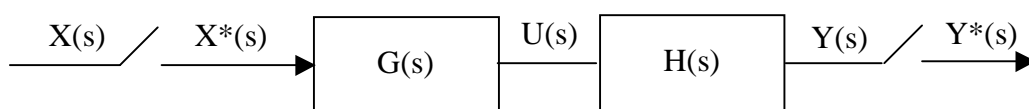


Figura 5. Sistema en cascada sin muestreador intermedio

$$Y(s) = G(s)H(s)X^*(s) = GH(s)X^*(s)$$

Luego:

$$Y^*(s) = [GH(s)X^*(s)]^* = GH^*(s)X^*(s)$$

Y la transformada z de la salida:

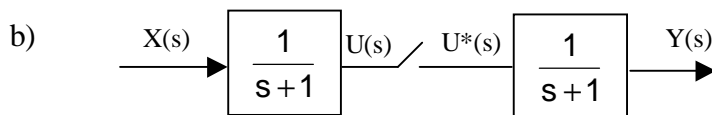
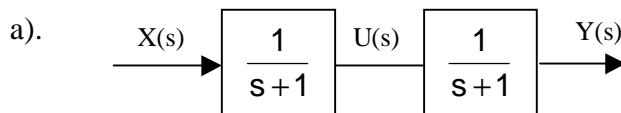
$$Y(z) = GH(z)X(z)$$

Y:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z)$$

Donde $GH(z) = \mathcal{Z}[G(s)H(s)]$

Ejemplo: Hallar la función de transferencia para cada uno de los siguientes sistemas:



Solución:

$$a) \quad Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$b) \quad Y^*(s) = [H(s) U^*(s)]^* = H^*(s) U^*(s)$$

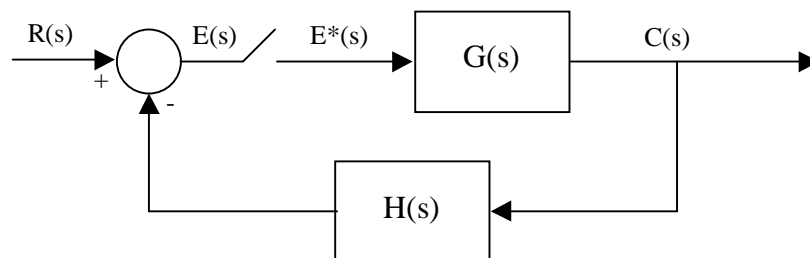
$$Y^*(s) \rightarrow Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-e^{-T}} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

4.4. Funciones de transferencia de sistemas en lazo cerrado:

En un sistema de control de lazo cerrado se pueden presentar distintos tipos de señales: discretas y continuas, ya que los muestreadores se pueden encontrar en cualquier punto del sistema. Debido a esto el análisis de los sistemas discretos difiere del análisis de los sistemas continuos.

Consideremos el lazo de control que se muestra en la figura 5:



$$C(s) = G(s) E^*(s)$$

$$C^*(s) = G^*(s) E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) G(s) E^*(s)$$

Muestreando a ambos lados:

$$E^*(s) = [R(s) - H(s) G(s) E^*(s)]^*$$

$$E^*(s) = R^*(s) - [H(s) G(s)]^* E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)}$$

sustituyendo en la segunda ecuación:

$$C^*(s) = \frac{G^*(s) R^*(s)}{1 + HG^*(s)}$$

sacando transformada z:

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + HG(z)}$$

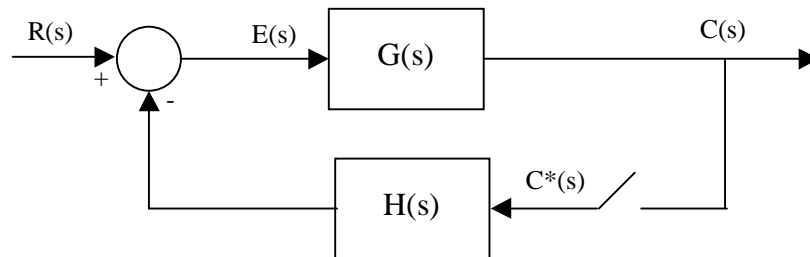
y la función de transferencia:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + HG(z)}$$

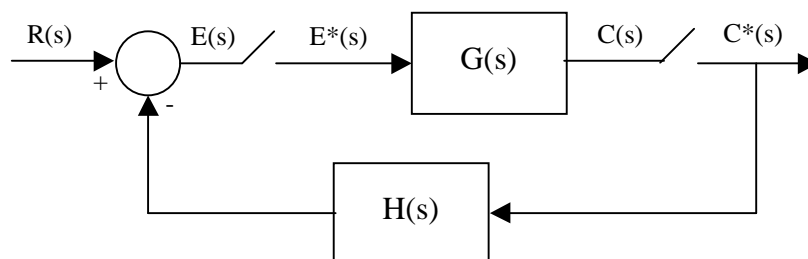
donde $HG(z) = Z [H(s)G(s)]$

Ejemplo: Dados los siguientes sistemas determinar su función de transferencia si existe:

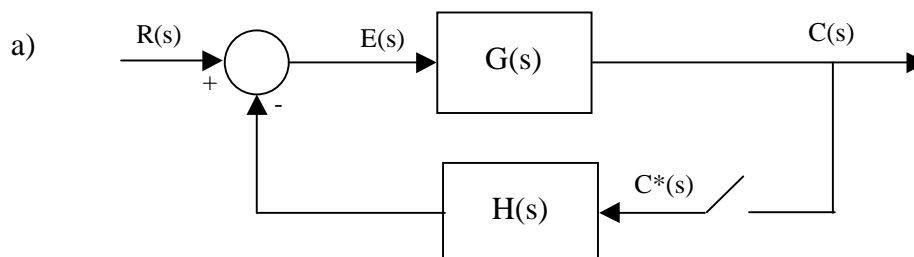
a)



b)



Solución:



$$C(s) = G(s) E(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C^*(s)$$

$$C(s) = G(s) [R(s) - H(s) C^*(s)]$$

$$C(s) = G(s) R(s) - G(s) H(s) C^*(s)$$

$$C^*(s) = [G(s) R(s)]^* - [G(s) H(s) C^*(s)]^*$$

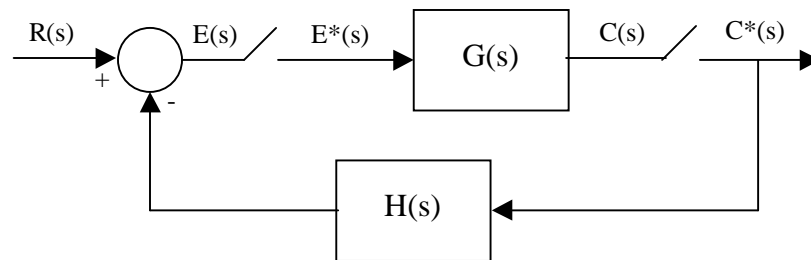
$$C^*(s) = GR^*(s) - GH^*(s) C^*(s)$$

$$C(z) = GR(z) - GH(z) C(z)$$

$$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$$

En este caso no es posible definir una función de transferencia $C(z)/R(z)$

b)



$$C(s) = G(s) E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C^*(s)$$

$$C(s) = G(s) E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - H^*(s) C^*(s)$$

$$C(s) = G(s) [R^*(s) - H^*(s) C^*(s)]$$

$$C^*(s) = G^*(s) R^*(s) - G^*(s) H^*(s) C^*(s)$$

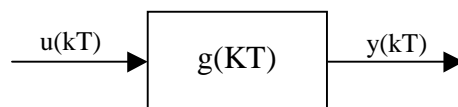
$$C^*(s) = \frac{G^*(s) R^*(s)}{1 + G^*(s) H^*(s)}$$

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s) H^*(s)}$$

$$\boxed{\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}}$$

4.5. Causalidad y realizabilidad física:

Un sistema es causal si la salida no se adelanta a la entrada, es decir, si la salida en un instante kT sólo depende de los valores de las entradas en instantes anteriores a kT .



Osea, que $y(kT) = f(u[k-1]T, u[k-2]T, u[k-2]T, \dots)$

Un sistema causal es físicamente realizable, es decir, se puede implementar con componentes físicos. En este caso, la función de transferencia $G(z)$ se expresa como una serie de potencias en z^{-1} :

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} g(kT)$$

De lo anterior se deduce, que en un sistema de datos discretos causal o físicamente realizable no deben existir potencias positivas de z en el desarrollo de $G(z)$, ya que esto indica predicción o que la salida adelanta a la entrada

Otra forma de ver la causalidad en un sistema discreto, es a través de su función de transferencia discreta expresada como un cociente:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}}$$

donde n y m son enteros positivos. En este caso $G(z)$ es físicamente realizable si $a_n \neq 0$.

Ejemplo: Determinar si la siguiente función de transferencia es físicamente realizable:

$$G(z) = \frac{3 + 5z - z^2}{z - 2}$$

Solución:

Si expresamos $G(z)$ en potencias negativas:

$$G(z) = \frac{3z^{-2} + 5z^{-1} - 1}{z^{-1} - 2z^{-2}}$$

Se observa que $a_n = 0$, luego no es físicamente realizable. Si encontramos la ecuación en diferencias del sistema:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3z^{-2} + 5z^{-1} - 1}{z^{-1} - 2z^{-2}}$$

$$Y(z) [z^{-1} - 2z^{-2}] = U(z) [3z^{-2} - 5z^{-1} - 1]$$

$$z^{-1} Y(z) - 2z^{-2} Y(z) = 3z^{-2} U(z) - 5z^{-1} U(z) - U(z)$$

Ahora, multiplicamos ambos lados de la ecuación por z para despejar $Y(z)$

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) = 3z^{-1}U(z) - 5U(z) - zU(z)$$

si aplicamos antitransformada z para obtener la ecuación en diferencias:

$$y(k) - 2y(k-1) = 3u(k-1) - 5u(k) - u(k+1)$$

$$y(k) - 2y(k-1) = 3u(k-1) - 5u(k) - u(k+1)$$

$$y(k) = 2y(k-1) + 3u(k-1) - 5u(k) - u(k+1)$$

Se observa que la salida $y(k)$ depende de entradas pasadas y de entradas futuras, en este caso, de $u(k+1)$

5. Controladores digitales

Los reguladores digitales se constituyen hoy en día como la forma más versátil y efectiva para el control de procesos y plantas industriales. Estos controladores digitales pueden implementarse mediante computadores, microprocesadores, microcontroladores o procesadores digitales de señales (DSP).

En comparación con los controladores continuos, los digitales ofrecen muchas ventajas, entre las cuales se cuentan la facilidad para cambiar el algoritmo de control y los parámetros del controlador, cosa que es bien difícil en los continuos, ya que implica el cambio de componentes físicos.

Sin embargo, podemos aprovechar la experiencia que se tiene en el diseño de controladores PID continuos, los cuales se usaron de manera exitosa durante más de medio siglo en muchas industrias alrededor del mundo.

En general, la función de transferencia de un controlador digital puede realizarse por medio de un programa de computador, obtenido a partir de la discretización del PID continuo.

5.1 Métodos de discretización:

El problema de la discretización consiste en encontrar la función de transferencia del regulador discreto o algoritmo tal que el sistema se comporte de manera equivalente al controlador continuo.

Para encontrar el algoritmo $G_R(z)$ del controlador discreto existen dos posibles planteamientos:

- Diseñar $G_R(z)$ mediante un método directo, generando soluciones exactas.
- Obtener un controlador continuo $G_R(s)$ y posteriormente discretizarlo; es decir, encontrar la mejor función de transferencia discreta $G_R(z)$ equivalente a $G_R(s)$. Este segundo método, es el que nos interesa por ahora y se basa en métodos aproximados. Esta aproximación es mejor en tanto menor sea el tiempo de muestreo.

A continuación se muestra un esquema de los dos planteamientos:

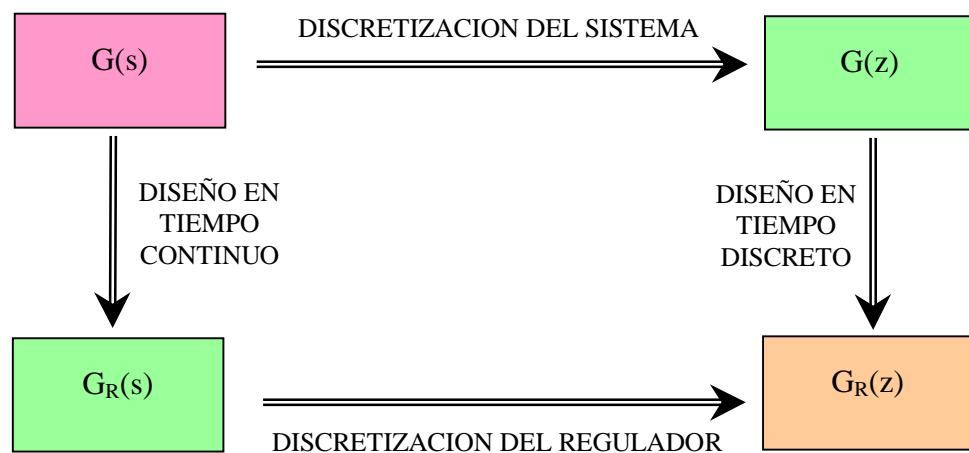


Figura 5. Planteamiento de la discretización de un controlador

El problema de discretización es independiente de la estrategia de control utilizada, puesto que se asume que en ésta última ya habrá influido el diseño del controlador continuo.

En vista de las diferentes suposiciones en el planteamiento de la discretización del regulador, se consideran tres métodos:

5.1.1. Integración numérica:

El regulador continuo establece una relación entre la entrada y la salida en términos de una ecuación diferencial, la cual se puede integrar numéricamente.

A partir de ésta ecuación, se obtiene una **transformación** que nos permite encontrar, fácilmente, la expresión discreta equivalente a la del regulador continuo.

A continuación veremos tres tipos de aproximación:

Transformación bilineal (Tustin):

Sea la señal continua $e(t)$, a partir de la cual se desea obtener $u(t)$ aproximándola por la integral:

$$u(t) = \int_0^t e(t) dt$$

y utilizando únicamente los valores discretos $e(0)$, $e(T)$, $e(2T)$, ..., $e(k-1)T$, $e(kT)$.

Aplicando Laplace se obtiene:

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$$

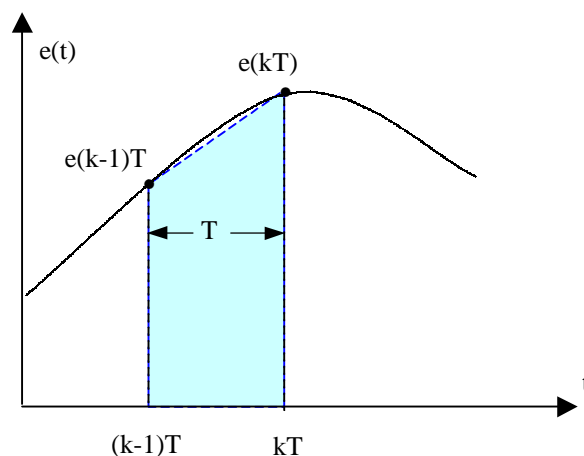


Figura 6. Aproximación bilineal o trapezoidal

Supóngase que se quiere aplicar el método de aproximación entre los puntos $t=0$ y $t=kT$ de la curva que aparece en la figura 6.

Dividiendo la integral de la ecuación anterior, se obtiene:

$$u(kT) = \int_0^{(k-1)T} e(t) dt + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

$$u(kT) = u(k-1)T + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

Aproximando la integral por el método trapezoidal, se tiene :

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt = \frac{T}{2} [e(k-1) + e(kT)]$$

luego:

$$u(kT) = u(k-1)T + \frac{T}{2} [e(k-1)T + e(kT)]$$

Aplicando transformada z:

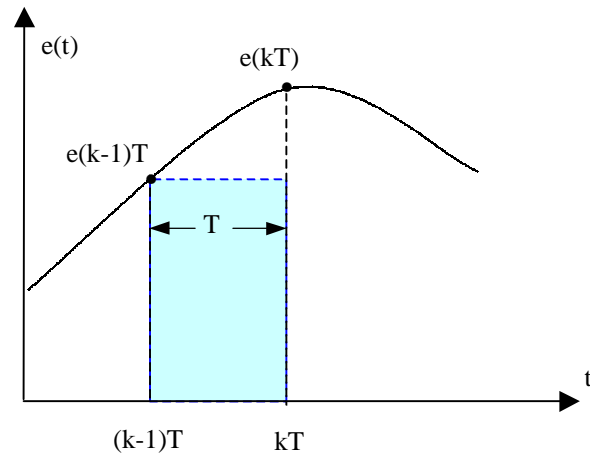
$$U(z) = z^{-1} U(z) + \frac{T}{2} [z^{-1} E(z) + E(z)]$$

es decir:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T z + 1}{2 z - 1} = \frac{1}{\frac{2 z - 1}{T z + 1}}$$

Regla del rectángulo anterior (Forward):

Aproximando la integral por el rectángulo anterior:



$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt = T e(k-1)$$

luego:

$$u(kT) = u(k-1) + T e(k-1)$$

Aplicando transformada z:

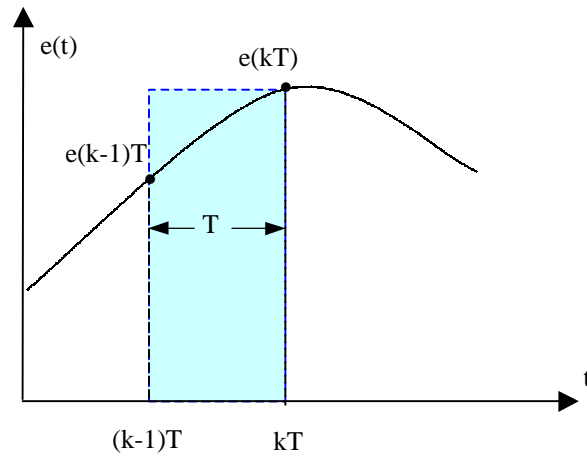
$$U(z) = z^{-1} U(z) + T z^{-1} E(z)$$

es decir:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{z - 1}$$

Regla del rectángulo posterior (Backward):

Aproximando la integral por el rectángulo posterior:



$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt = T e(k)$$

luego:

$$u(kT) = u(k-1) + T e(k)$$

Aplicando transformada z:

$$U(z) = z^{-1} U(z) + T E(z)$$

es decir:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz}{z - 1}$$

Si analizamos las tres aproximaciones para :

$$G_R(s) = \frac{1}{s}$$

Concluimos que los reguladores discretos se pueden obtener por la sustitución de la variable s , tal como se indica en la tabla:

Método de aproximación	Función discreta	Transformación
TRAPEZOIDAL, TUSTIN O BILINEAL	$G_R(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$	$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$
RECTANGULO ANTERIOR O FORWARD	$G_R(z) = \frac{T}{z-1} = \frac{1}{\frac{z-1}{T}}$	$s = \frac{z-1}{T}$
RECTANGULO POSTERIOR O BACKWARD	$G_R(z) = \frac{Tz}{z-1} = \frac{1}{\frac{z-1}{zT}}$	$s = \frac{z-1}{zT}$

Tabla 1. Transformaciones de tiempo continuo a tiempo discreto

Cabe anotar que la aproximación por el método del rectángulo anterior puede dar lugar a sistemas inestables, en tanto que la regla del rectángulo posterior presenta distorsión, siendo únicamente la aproximación bilineal la que realiza una adecuada equivalencia entre las regiones estables en s y en z .

Discretización de PID's continuos:

Si partimos de la ecuación de un PID continuo cuya ecuación en el dominio del tiempo viene dada por:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

existen dos formas posibles de obtener la discretización:

a. Forma posicional:

Tomando la derivada como la pendiente de la recta que une el error en un punto con el del anterior, se puede aproximar por el cociente incremental $\Delta e/T$:

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e[kT] - e[(k-1)T]}{T}$$

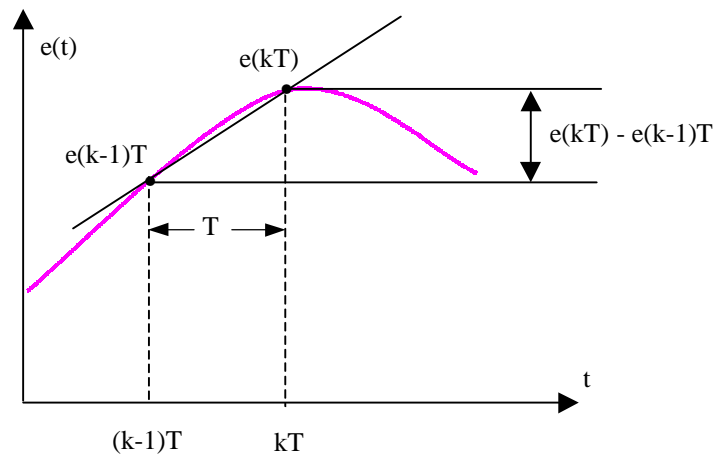


Figura 7. Aproximación de la derivada

La ecuación del PID análogo, se divide en tres partes:

$$u(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_d(t)$$

$$u_p(t) = K_p e(t)$$

$$u_p[kT] = K_p e[kT]$$

$$u_i(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{K_p}{T_i} e(t)$$

$$\frac{u_i[kT] - u_i[(k-1)T]}{T} = \frac{K_p}{T_i} e[kT]$$

$$u_i[kT] = u_i[(k-1)T] + K_p \frac{T}{T_i} e[kT]$$

$$u_d = K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$u_d = K_p T_d \frac{e[kT] - e[(k-1)T]}{T}$$

$$u_d = K_p \frac{T_d}{T} \{ e[kT] - e[(k-1)T] \}$$

donde:

$T =$ período de muestreo

Entonces, las ecuaciones que describen el PID digital en forma posicional son:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_p(t) + u_i(t) + u_d(t) \\
 u_p[kT] &= K_p e[kT] \\
 u_i[kT] &= u_i[(k-1)T] + K_p \frac{T}{T_i} e[kT] \\
 u_d &= K_p \frac{T_d}{T} \{ e[kT] - e[(k-1)T] \}
 \end{aligned}$$

b. Forma incremental:

La otra forma utilizada es el esquema conocido como forma incremental o de velocidad.

Una de las ventajas de este esquema, es que no es necesaria la inicialización cuando se conmuta de operación manual a automática. De éste modo si existen cambios súbitos grandes en el punto de ajuste o en el inicio de la puesta en operación del proceso, el esquema de control en forma incremental o de velocidad presenta mejores características que el de la forma posicional.

Otra ventaja del esquema de control PID en la forma de velocidad es que es útil en la supresión de correcciones excesivas en sistemas de control de procesos.

La ecuación del PID análogo:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \\
 \dot{u}(t) &= K_p \left[\dot{e}(t) + \frac{1}{T_i} e(t) + T_d \ddot{e}(t) \right]
 \end{aligned}$$

$$\dot{u}[kT] = \frac{u[kT] - u[(k-1)T]}{T}$$

$$\dot{e}[kT] = \frac{e[kT] - e[(k-1)T]}{T}$$

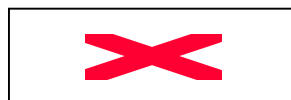
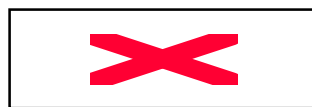
$$\ddot{e}[kT] = \frac{\frac{e[kT] - e[(k-1)T]}{T} - \frac{e[(k-1)T] - e[(k-2)T]}{T}}{T}$$

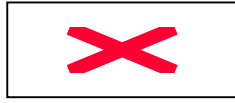
$$\Delta u[k] = K_p \left\{ (e[k] - e[k-1]) + \frac{T}{T_i} e[k] + \frac{T_d}{T} (e[k] - 2e[k-1] + e[k-2]) \right\}$$

$$\Delta u[k] = K_p \left\{ \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right) e[k] - \left(1 + 2\frac{T_d}{T} \right) e[k-1] + \frac{T_d}{T} e[k-2] \right\}$$

La función de transferencia para este algoritmo:

$$(1 - q^{-1})u[k] = C(q^{-1}) e[k] \quad q^{-1} = \text{operador desplazamiento}$$



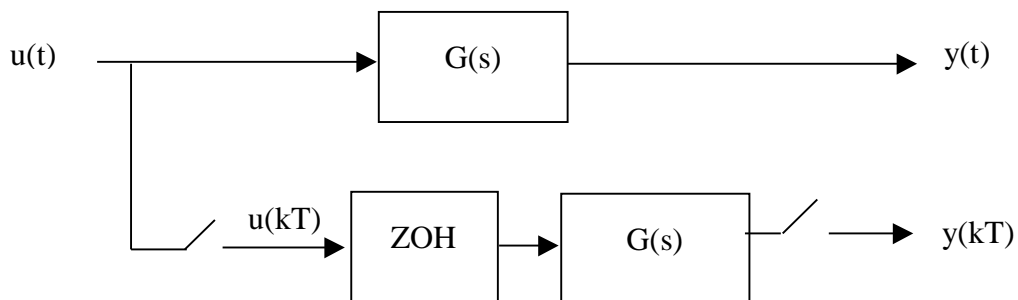


$$u[k] = u[k+1] + C_0 e[k] + C_1 e[k-1] + C_2 e[k-2]$$

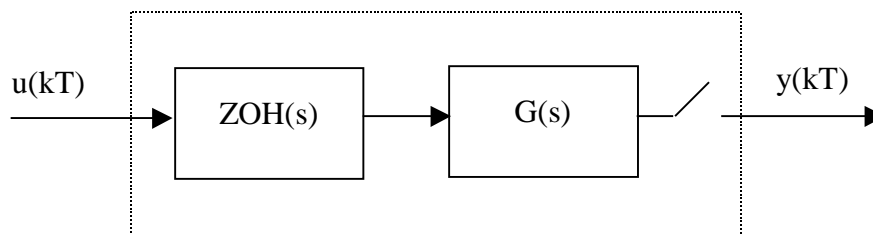
5.1.2. Aproximación de la respuesta temporal (Hold equivalente):

Con éste método se busca una función discreta equivalente que se comporte idénticamente al sistema continuo en los instantes de muestreo ante una señal de entrada.

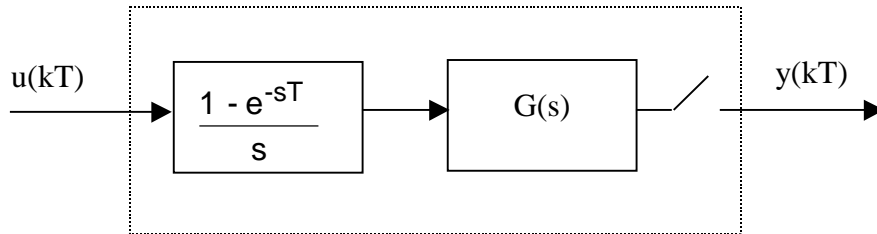
En la figura observamos un sistema continuo $G(s)$ el cual se quiere aproximar con $G(z)$.



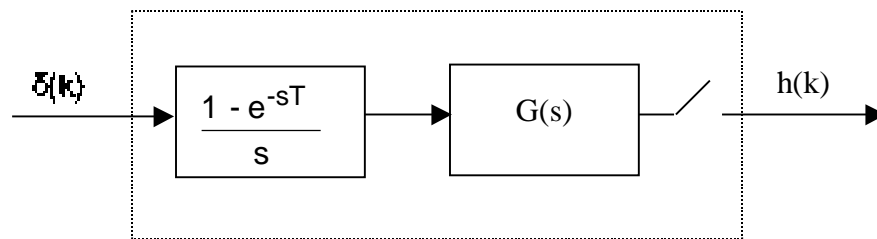
Ahora se quiere encontrar que es $G(z)$:



Reemplazando el ZOH por su función de transferencia:



Ahora, si la entrada es un impulso, la salida es la respuesta impulso $h(kT)$:



La transformada de Laplace de $h(t)$

$$H(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{G(s)}{s}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (1 - e^{-sT}) \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT}$$

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ (1 - e^{-sT}) \frac{G(s)}{s} \right\} \right] \Big|_{t=kT}$$

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right] - \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-sT} G(s)}{s} \right\} \right]$$

$$H(z) = \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right] - z^{-1} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right]$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right]$$

5.1.3. Emparejamiento de polos y ceros:

Un método sencillo y eficiente para obtener reguladores discretos equivalentes a partir de reguladores continuos, es el que está basado en la conocida relación:

$$z = e^{sT}$$

En este método se deben considerar las siguientes reglas:

- a. Todo polo $G_R(s)$ se corresponde con un polo de $G_R(z)$ de acuerdo a la relación $z = e^{sT}$.
- b. Todos los ceros finitos de $G_R(s)$ se corresponden con ceros de $G_R(z)$ según la relación $z = e^{sT}$.
- c. El grado del polinomio del numerador se igualará al del polinomio denominador mediante la adición de términos $z+1$, consecuencia de considerar los ceros en el infinito.
- d. El grado del numerador de $G_R(z)$ debe ser menor que el grado del denominador, de tal manera que si es necesario quitamos términos.
- d. Ajustar la ganancia del regulador.

6. Análisis de sistemas en tiempo discreto

(INCOMPLETO)

Algunas de las técnicas de análisis y diseño que se han utilizado exitosamente para los sistemas de tiempo continuo, tales como el Lugar de las raíces, Bode, estabilidad y error en estado estacionario también se pueden aplicar a los sistemas de tiempo discreto, con el fin de aprovechar los conocimientos que se tienen de las mismas.

Para esto es necesario establecer la correspondencia entre el plano s (tiempo continuo) y el plano z (tiempo discreto), así como de los respectivos criterios de estabilidad en el plano z y constantes de error en estado estacionario.

6.1 Correspondencia entre el plano s y el plano z :

Debido a la relación que existe entre la variable compleja s y la variable compleja z , dada por: $z = e^{sT}$, la localización de los polos y los ceros en el plano z se relaciona con la localización de los polos y ceros en el plano s .

De esta manera, la estabilidad y el comportamiento dinámico de los sistemas de control de lazo cerrado puede determinarse con base en la ubicación de los polos de la función de transferencia discreta.

De acuerdo con el resultado obtenido para la función de transferencia de una señal muestreada, el cual indica que el espectro de la señal original se repite infinitas veces a intervalos iguales a la frecuencia de muestreo, se llega a la repetición de la configuración de polos y ceros en la dirección del eje de las ordenadas (frecuencias) del plano s .

Lo anterior implica que el semiplano izquierdo del plano s se divida en un número infinito de franjas periódicas, tal como se muestra en la Figura 10.

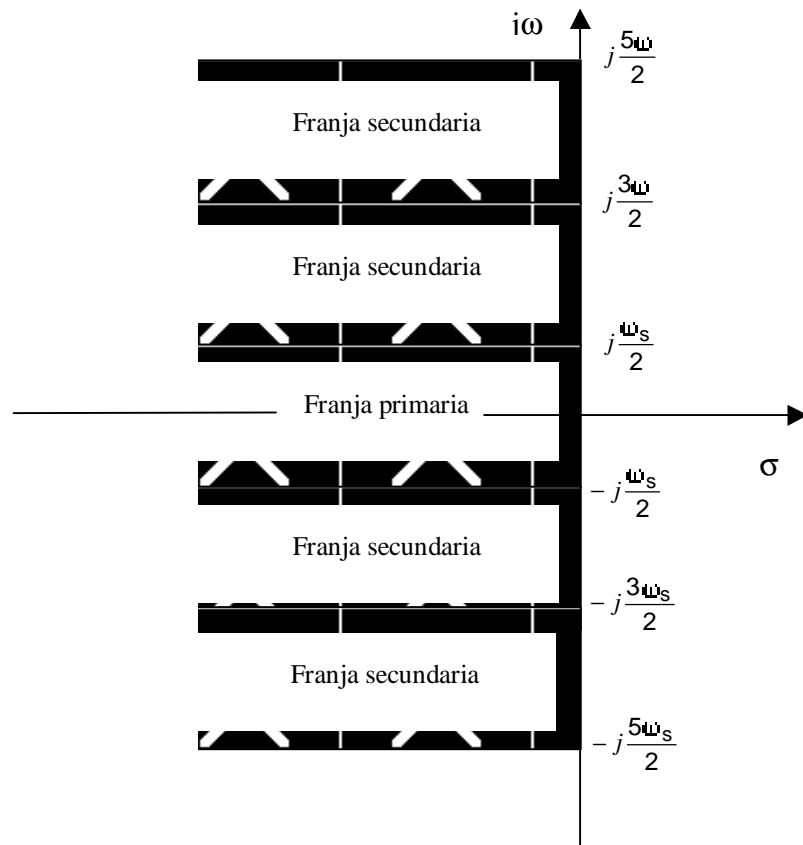


Figura 10. Franjas primaria y secundarias en el semiplano s

Considerando únicamente la franja primaria, se traza el camino cerrado: 1-2-3-4-5 en el plano s , el cual pasa por $-\infty$ y encierra todos los polos estables. Ahora se aplica la relación: $z=e^{sT}$ y se observa que zona del plano z corresponde a dicha trayectoria.

Trayecto 1-2: Los puntos son de la forma $s=j\omega$, donde " ω " varía desde 0 hasta $+\omega_s/2$, obteniéndose un semicírculo unitario centrado en el origen del plano z : $z = e^{j\omega} = \cos \omega T + j \sin \omega T$

para $\omega=0$, $z = \cos 0 + j \sin 0 = 1$

para $\omega = \omega_s/2$, donde $\omega_s = 2\pi/T$, $z = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = -1$

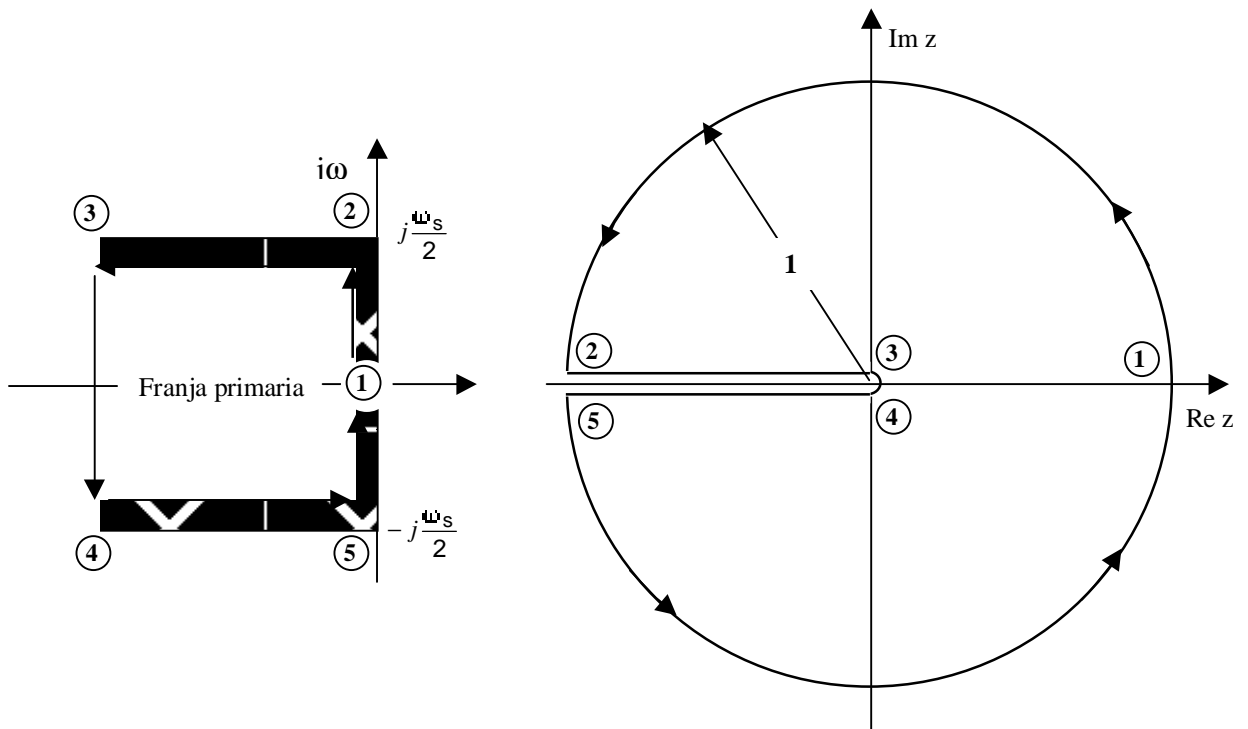


Figura 11. Correspondencia entre el plano s y el plano z

Trayecto 2-3: Suponiendo que 3 está en $-\infty$, la componente compleja es $j\omega_s/2$ y la real es $-\sigma$, con $-\infty < \sigma < 0$. La ecuación $z = e^{j\omega}$ queda:

$$z = e^{j\omega_s T} e^{-\sigma T} = e^{j\omega_s T} e^{-\sigma T}$$

ya que $e^{j\pi} = -1$ y $\omega_s = 2\pi/T$

luego:

para $\sigma = 0$, $z = -1$;

para $\sigma = \infty$, $z = 0$;

Trayecto 3-4: Los puntos son de la forma $s = -\infty + j\omega$, donde ω varía desde $\omega_s/2$ hasta $-\omega_s/2$ y equivale a un círculo de radio cero, ya que

$$z = e^{sT} = e^{-\infty} e^{j\omega T} = 0 * e^{j\omega T} = 0$$

Trayecto 3-4: En el trayecto de 4 a 5 la componente imaginaria es $-j\omega_s/2$ y la real $-\sigma$ con σ variando desde $+\infty$ hasta cero.



