CAPÍTULO 10
GEODÉSICAS

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Geodésica en un punto
- Ecuaciones locales de una geodésica
- El campo geodésico
- El flujo geodésico
- Geodésica maximal
- Lema de Homogeneidad
- La aplicación exponencial
- Entorno normal
- Coordenadas normales
- Superficie parametrizada
- Lema de Simetría
- Entorno totalmente normal

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

Consideremos una superficie S embebida en $\mathbb{R}^3$ y equipada con la métrica inducida g (la primera forma fundamental de la superficie). Las curvas "dibujadas" sobre esta superficie, parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco y que, localmente, son el camino más corto entre dos puntos son las curvas con vector aceleración normal, lo cual se deduce de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el problema. Si $c : I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ es una de tales curvas y D es la derivada covariante asociada a g, entonces dicha condición es, justamente, $\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right) = 0$. Nosotros ahora imitamos esta propiedad e introducimos la noción de *geodésica* sobre una variedad diferenciable cualquiera, con una conexión afín, como aquellas curvas γ cuyos campos de vectores tangentes son paralelos.

Definición 10.1
Sea (M, ∇) una variedad afín. Una curva parametrizada $\gamma : I \to M$ es *geodésica* en $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ en el punto t_0. Se dice que γ es una geodésica si es una curva geodésica en todos los puntos de su dominio. Si $[a, b] \subset I$ y $\gamma : I \to M$ es una geodésica, la restricción de γ al intervalo $[a, b]$ será denominada *(segmento de) geodésica* entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

A veces, y por abuso del lenguaje, se denomina geodésica a la traza de γ, lo cual es incorrecto como fácilmente se puede ver en $\mathbb{R}^2$: las rectas de $\mathbb{R}^2$ son geodésicas si, y sólo si, su parametrización es lineal. Esto significa que el parámetro de una geodésica no es arbitrario, y el hecho de que una curva sea una geodésica depende tanto de su forma como de su parametrización.

Con objeto de enunciar resultados generales sobre geodésicas en variedades debemos estudiar con cierto detalle la ecuación que las define. No obstante, ya desde el comienzo pueden presentarse numerosos ejemplos de geodésicas en virtud de las siguientes dos observaciones. En primer lugar, la ecuación de una geodésica impone solamente una condición local sobre la curva. Más precisamente, si cada punto de una curva tiene un entorno en el cual puede ser escrita en la forma $\gamma(t)$ con $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$, entonces es una geodésica. En segundo lugar, la propiedad de ser una geodésica es preservada por transformaciones afines, ya que la diferenciación covariante lo es y, por tanto, también el paralelismo de un campo de vectores.

2.1. Ecuaciones locales de una geodésica

La ecuación que define una geodésica se traduce, cuando pasamos a un sistema de coordenadas locales, en un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden. Dicho sistema, considerado en el fibrado tangente, se transforma en un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, lo que permite asegurar que existe una única geodésica que pasa por un punto en una dirección dada, utilizando para ello la teoría de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica y consideremos (U, x) una carta local tal que $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$. Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ el sistema de coordenadas asociado, entonces

$$0 = \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_k \left\{ \frac{d^2}{dt^2}(x_k \circ \gamma) + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{d}{dt}(x_i \circ \gamma) \frac{d}{dt}(x_j \circ \gamma) \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_{\gamma(t)}$$

Luego la geodésica γ está caracterizada en U por satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_k \circ \gamma) + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{d}{dt}(x_i \circ \gamma) \frac{d}{dt}(x_j \circ \gamma) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10.1}$$

Es usual escribir $x_i(t) = x_i(\gamma(t))$ y $\Gamma_{ij}^k(t) = \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$, por lo que la ecuación anterior puede transformarse en la siguiente:

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Para estudiar más detalladamente el sistema (10.1) es conveniente que consideremos el fibrado tangente TM. Recordemos cuál es la estructura diferenciable en TM. Si (U, x) es una carta en M, definimos $z : W \to \mathbb{R}^{2n}$, con $W = \{(p, v) \in TM; p \in U, v \in T_pM\}$, por $z(p, v) = (x(p), dx_1(v), \ldots, dx_n(v))$. Entonces (W, z) es una carta en TM, lo que significa que localmente el fibrado tangente se comporta como un producto. Consideremos las funciones $y_i = dx_i$ definidas en W, de modo que $z = (x, y)$.

Cualquier curva diferenciable $\gamma(t)$ en M determina una curva $(\gamma(t), \gamma'(t))$ en su fibrado tangente. Si γ es una geodésica entonces la curva (γ, γ') satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_k' &= y_k, \qquad k = 1, \ldots, n \\ y_k' &= -\sum_{imj} \Gamma_{ij}^k y_i y_j, \qquad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

La ventaja de trabajar en el fibrado tangente es evidente: hemos transformado un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en otro de primer orden.

2.2. El campo y el flujo geodésicos

Proposición 10.2
Existe un único campo G en TM cuyas trayectorias son de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde γ es una geodésica de M. El campo G se denomina el campo geodésico en TM.

Como consecuencia de la teoría de ecuaciones diferenciales se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.3
Para cada punto $p \in M$ existe un entorno $\mathcal{U}$ de TU, donde (U, x) es un sistema de coordenadas en p y $(p, 0) \in \mathcal{U}$, un número $\delta > 0$ y una aplicación diferenciable $\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to TU$ tales que la aplicación $t \to \varphi(t, q, v)$ es la única trayectoria de G que satisface la condición inicial $\varphi(0, q, v) = (q, v)$ para cada $(q, v) \in \mathcal{U}$.

Observemos que es posible escoger $\mathcal{U}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\}$$

donde $V \subset U$ es un entorno de p. Poniendo $\gamma = \pi \circ \varphi$, donde $\pi : TM \to M$ es la proyección canónica, podemos reescribir el resultado anterior como sigue.

Proposición 10.4
Dado $p \in M$, existen un abierto $V \subset M$, con $p \in V$, números $\delta > 0$ y $\varepsilon_1 > 0$, y una aplicación diferenciable $\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M$, $\mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\}$, tales que la curva $t \to \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, es la única geodésica de M que en el instante $t = 0$ pasa por q con velocidad v, para cada $(q, v) \in \mathcal{U}$.

El hecho de que ser geodésica sea una propiedad local de curvas parametrizadas, como hemos indicado, permite deducir que si dos geodésicas coinciden (como conjuntos) en algún intervalo, entonces su unión, con una adecuada parametrización, es también una geodésica. Además, si dos geodésicas tienen un punto en común y son tangentes en ese punto, entonces su unión es también una geodésica. Más precisamente,

Proposición 10.5
Sean $\alpha, \beta : I \to M$, I conexo, dos geodésicas. Si existe un número $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$ entonces $\alpha = \beta$.

Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 10.6
Dados $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe una única geodésica $\gamma_{(p,v)}(t) = \gamma(t, p, v)$ en M tal que:
(1) *La velocidad inicial de γ es v, es decir, $\gamma'(0, p, v) = v$.*
(2) *El dominio $I(p, v)$ de $\gamma_{(p,v)}$ es el mayor posible, es decir, si $\alpha : J \to M$ es otra geodésica tal que $\alpha'(0) = v$ entonces $J \subset I(p, v)$ y $\alpha = \gamma_{(p,v)}|_J$.*

Esto implica que cada geodésica está contenida en una única *geodésica maximal* $\gamma_{(p,v)}$, esto es, en una geodésica que no es un subconjunto propio de ninguna otra geodésica. Se dice que $\gamma_{(p,v)}$ es geodésicamente inextendible.

Lema 10.7 (Lema de Homogeneidad)
Si la geodésica $\gamma(t,p,v)$ está definida en $(-\delta,\delta)$, entonces la geodésica $\gamma(t,q,av)$, $a>0$, está definida en $(-\delta/a,\delta/a)$ y se verifica

$$\gamma(t,q,av)=\gamma(at,q,v).$$

Como consecuencia, es posible aumentar (disminuir) la velocidad de una geodésica disminuyendo (aumentando, respectivamente) su intervalo de definición. El lema de homogeneidad nos sitúa en la pista del siguiente problema: ¿qué reparametrizaciones de una geodésica conservan el carácter de geodésica?

Proposición 10.8
Sea $\gamma: I\to M$ una geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma\circ h: J\to M$ es una geodésica si, y sólo si, $h(t)=at+b$.

2.3. La aplicación exponencial

Las propiedades de homogeneidad de las geodésicas tienen como consecuencia que, dado un punto, existe un entorno tal que todas las geodésicas que parten de ese punto están definidas en un mismo intervalo de $\mathbb{R}$. Este hecho permite construir, para cada punto m de M, la *aplicación exponencial* $\exp_m: T_mM\longrightarrow M$, que a cada vector tangente a M en m le hace corresponder la imagen de 1 por la geodésica que parte de m en la dirección de dicho vector.

Proposición 10.9
Dado $p\in M$, existen un entorno V de p en M, un número $\varepsilon>0$ y una aplicación diferenciable $\gamma:(-2,2)\times\mathcal{U}\to M$, donde $\mathcal{U}=\{(q,w)\in TM; q\in V, w\in T_qM, |w|<\varepsilon\}$, tal que $\gamma(t,q,w)$, $t\in(-2,2)$, es la única geodésica de M que en el instante $t=0$ pasa por q con velocidad w, para cada $(q,w)\in\mathcal{U}$.

Definición 10.10
Sea $p\in M$ y $\mathcal{U}\subset TM$ el abierto dado en la proposición anterior. Entonces la aplicación $\exp:\mathcal{U}\to M$ dada por

$$\exp(q,v)=\gamma(1,q,v)=\gamma(|v|,q,\frac{v}{|v|}), v\neq 0,$$

se llama la *aplicación exponencial* en $\mathcal{U}$.

La aplicación exponencial puede interpretarse de otra manera, que pasamos a describir. Sea un punto $q\in\pi(\mathcal{U})$, donde $\pi: TM\to M$ es la proyección canónica.

Definición 10.11
La aplicación $\exp_q: B(0,\varepsilon)\subset T_qM\to M$ definida por

$$\exp_q(v)=\exp(q,v),$$

donde $B(0,\varepsilon)$ es la bola abierta de centro $0\in T_qM$ y radio $\varepsilon>0$, se denomina la aplicación exponencial en q.

Geométricamente, la exponencial $\exp_q(v)$ es el punto de M que se obtiene al recorrer una distancia $|v|$, a partir de q, a lo largo de la geodésica que pasa por q con velocidad igual a $v/|v|$. Por el lema de homogeneidad, lo anterior es equivalente a recorrer una 'distancia' igual a 1, a partir de q, a lo largo de la geodésica que parte de q con velocidad v.

Es inmediato probar el siguiente resultado:

Proposición 10.12
Sea $m \in M$. *Entonces:*
(1) $\exp_m$ *es una aplicación diferenciable con* $\exp_m(0) = m$.
(2) *Existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\exp_m : B(0, \varepsilon) \to M$ *es un difeomorfismo de la bola* $B(0, \varepsilon)$ *en un abierto de* M.

El hecho de que, para cada punto, la aplicación exponencial sea un difeomorfismo local permite considerar a su inversa como una carta de la variedad en un entorno del punto. Las coordenadas de un punto mediante un tal sistema de coordenadas se llaman *coordenadas normales*, y el entorno en el que están definidas *entorno normal*. Precisemos un poco más estas ideas.

Sea $m \in M$ y consideremos abiertos $U(0) \subset T_mM$ y $V(m) \subset M$ tales que $\exp_m : U \to V$ es un difeomorfismo. Entonces (V, φ), $\varphi = (\exp_m)^{-1}$, es una carta local de M en un entorno de m. El abierto V se denomina *entorno normal de* m y el conjunto $B(m, \varepsilon) = \exp_m(B(0, \varepsilon))$ se denomina *bola normal (o geodésica) de centro* m *y radio* ε.

Consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de T_mM. Para todo punto $p \in V$ se tiene que $(\exp_m)^{-1}(p) \in U$ por lo que existen números $(x_1(p), \ldots, x_n(p))$ tales que

$$(\exp_m)^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) e_i.$$

Entonces $x = (x_1, \ldots, x_n)$ define un sistema de coordenadas, denominadas *coordenadas normales asociadas a* V. Las funciones coordenadas están dadas por $x_i = f_i \circ \exp_m^{-1}$, donde $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es la base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Ejemplo 10.13
Sea $M = \mathbb{R}^n$. Como la derivada covariante asociada a la conexión canónica de $\mathbb{R}^n$ coincide con la derivada usual, las geodésicas de $\mathbb{R}^n$ no son más que las rectas parametrizadas linealmente: $\gamma(t) = m + tv$. En consecuencia, la aplicación exponencial es la identidad y el sistema de coordenadas estándar constituye un sistema de coordenadas normales.

Definición 10.14
(1) La frontera $S(m, \varepsilon)$ de una bola normal $B(m, \varepsilon)$ se denomina *esfera normal* (o geodésica).
(2) Las geodésicas en $B(p, \varepsilon)$ que parten de p se denominan *geodésicas radiales*.

Las coordenadas normales poseen un comportamiento especial que hace de ellas un instrumento muy útil en el estudio de la geometría de la variedad. De entre sus propiedades más importantes destacan las siguientes:

Proposición 10.15
(1) *Las ecuaciones locales de las geodésicas que parten de* m *son de la forma* $x_i(t) = tv_i$.
(2) *Los coeficientes de la conexión o símbolos de Christoffel se anulan en* m: $\Gamma_{ij}^k(m) = 0$ *para todo* (i, j, k).

2.4. El lema de simetría

Una curva diferenciable a trozos es una aplicación $c : [a, b] \to M$ de un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en M satisfaciendo la siguiente condición: existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ tal que las restricciones $c|_{[t_1,t_{i+1}]}$, $i = 0, \ldots, k-1$, son diferenciables. Se dice que c conecta los puntos $c(a)$ y $c(b)$. Los puntos $c(t_i)$ se denominan los vértices de c y el ángulo determinado por $c'(t_i^+) = \lim_{t\to t_i^+} c'(t)$ y $c'(t_i^-) = \lim_{t\to t_i^-} c'(t)$ se llama el ángulo del vértice $c(t_i)$.

La primera observación que debemos hacer es que el transporte paralelo puede ser fácilmente extendido a curvas diferenciables a trozos. En efecto, dado $v_0 \in T_{c(t)}M$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, se extiende v_0 a un campo paralelo $V(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$; tomando $V(t_i)$ y $V(t_{i+1})$ como nuevos valores iniciales, podemos extender $V(t)$ paralelamente al intervalo $[t_{i-1}, t_{i+2}]$, y así sucesivamente.

Definición 10.16
Sea A un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ tal que la frontera ∂A de A es una curva diferenciable a trozos con ángulos en los vértices distintos de π. Una superficie parametrizada en M es una aplicación diferenciable $s : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$.

Merece la pena hacer algunas observaciones respecto de la definición que acabamos de presentar. Decir que s es diferenciable en A equivale a decir que existe un abierto $U \supset A$ donde s se extiende diferenciablemente. Finalmente, la condición sobre los ángulos de los vértices de A es necesaria para que la diferencial de s no dependa de la extensión considerada.

Definición 10.17
Un campo de vectores V a lo largo de una superficie parametrizada s es una aplicación $V : A \to TM$ que asocia a cada punto q de A un vector $V(q) \in T_{s(q)}M$, que es diferenciable en el siguiente sentido: si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es una función diferenciable, entonces la aplicación $q \to V(q)f$ es diferenciable.

El siguiente razonamiento es análogo al que se hace para superficies en $\mathbb{R}^3$. Sean (u, v) las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$. Para v_0 fijo, la aplicación $u \to (u, v_0)$, donde u pertenece a una componente conexa de $A \cap \{v = v_0\}$, es una curva en M cuyo vector tangente $\frac{\partial s}{\partial u} = ds(\frac{\partial}{\partial u})$ define un campo de vectores a lo largo de dicha curva. Si razonamos igual para cualquier punto v_0 podemos construir un campo de vectores $\frac{\partial s}{\partial u}$ a lo largo de la superficie parametrizada s. De forma totalmente análoga podemos definir $\frac{\partial s}{\partial v}$.

La derivada covariante puede extenderse a superficies parametrizadas del siguiente modo. Sea V un campo de vectores a lo largo de s, entonces $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0)$ es la derivada covariante a lo largo de la curva $u \to s(u, v_0)$ de la restricción de V a esta curva. Esto define $\frac{DV}{\partial u}(u, v)$ para todo punto $(u, v) \in A$. Análogamente se define $\frac{DV}{\partial v}(u, v)$.

Lema 10.18 (Lema de Simetría)
Sea M una variedad diferenciable con una conexión simétrica ∇ y $s : A \to M$ una superficie parametrizada. Entonces

$$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) = \frac{D}{\partial u}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)$$

Una de las principales aplicaciones del Lema de Simetría es el Lema de Gauss, enunciado en variedades riemannianas, que afirma que las geodésicas radiales son ortogonales a las esferas geodésicas. Para finalizar este capítulo probaremos un refinamiento del teorema de existencia de entornos normales.

Proposición 10.19
Para cada punto $p \in M$ existe un entorno W de p y un número $\delta > 0$ tales que para cada $q \in W$, la aplicación exponencial $\exp_q$ es un difeomorfismo en $B(0,\delta) \subset T_qM$ y $B(q,\delta) \supset W$. En otras palabras, W es un entorno normal de todos sus puntos, por lo que se denomina entorno totalmente normal.

De este resultado podemos extraer dos interesantes consecuencias:

(1) Dados dos puntos q_1, q_2 en W existe una única geodésica γ ‘minimizante’ uniendo q_1 con q_2.

(2) La geodésica γ depende diferenciablemente de (q_1, q_2) en el siguiente sentido: dado (q_1, q_2) existe un único vector $v \in T_{q_1}M$, que depende diferenciablemente de (q_1, q_2), tal que $\gamma'(0) = v$.

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.10.1. Sean (x_1, x_2) las coordenadas habituales de $\mathbb{R}^2$ y sea la conexión definida por los símbolos siguientes:

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \text{excepto} \quad \Gamma_{12}^2 = 3, \quad \Gamma_{21}^2 = -2.$$

(a) Escribe y resuelve las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$.

(b) ¿Es una conexión completa, es decir, el campo geodésico asociado es completo?

(c) Si σ y γ son dos geodésicas tales que $\gamma(0) = \sigma(0)$ y $\gamma'(0) = b\sigma'(0)$, $b \in \mathbb{R}$, prueba que $\gamma(t) = \sigma(bt)$ para todo t posible. (Esta afirmación es consecuencia del teorema de existencia y unicidad de geodésicas; sin embargo, aquí hay que demostrarlo sin hacer uso de este teorema).

A.10.2. Consideremos el cilindro

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = r^2\}$$

con la conexi$\frac{3}{4}$n inducida de $\mathbb{R}^3$.

Prueba que las geodésicas de C son las hélices, las rectas generadoras y los círculos (intersección de C con planos z=constante).

(b) Dados dos puntos $p, q \in C$, ¿cuántas geodésicas conectan p y q?

A.10.3. Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica no constante. Entonces una reparametrización $\gamma \circ h : J \to M$ es una geodésica si, y sólo si, h es una función lineal, es decir, $h(t) = at + b$, para ciertas constantes a y b.

A.10.4. Una curva $\alpha : I \to M$ es una **pregeodésica** si admite una reparametrización como geodésica. Prueba que una curva α es una pregeodésica si, y sólo si, su vector aceleración es proporcional a su vector velocidad, es decir, $\alpha''(t) = f(t)\alpha'(t)$ para una cierta función diferenciable f.

A.10.5. Prueba que la geodésica de $\mathbb{S}^n(r^2)$ que pasa en el instante 0 por un punto p a velocidad $v \in T_p\mathbb{S}^n(r^2)$ viene dada por

$$\gamma(t,p,v) = \cos\left(\frac{|v|t}{r}\right)p + \frac{r}{|v|}\,\mathrm{sen}\left(\frac{|v|t}{r}\right)v.$$

Como consecuencia, dado un punto $p \in \mathbb{S}^n(r^2)$, un vector $v \in T_p\mathbb{S}^n(r^2)$ es crítico para la aplicación exponencial $\exp_p : T_p\mathbb{S}^n(r^2) \longrightarrow \mathbb{S}^n(r^2)$ si, y sólo si, $|v| = m\pi r$, con $m \in \mathbb{Z}^+$.

4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK . *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.10.1. Sean (x_1, x_2) las coordenadas habituales de $\mathbb{R}^2$. Definimos una conexión en $\mathbb{R}^2$ considerando los símbolos siguientes:

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \qquad \text{excepto} \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1.$$

(a) Escribe y resuelve las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$.

(b) ¿Es una conexión completa, es decir, el campo geodésico asociado es completo? ¿Salen geodésicas del origen pasando por cada punto del plano?

(c) Si σ y γ son dos geodésicas tales que $\gamma(0) = \sigma(0)$ y $\gamma'(0) = b\sigma'(0)$, $b \in \mathbb{R}$, prueba que $\gamma(t) = \sigma(bt)$ para todo t posible. (Esta afirmación es consecuencia del teorema de existencia y unicidad de geodésicas; sin embargo, aquí hay que demostrarlo sin hacer uso de este teorema).

E.10.2. Una **geodésica a trozos** es una curva diferenciable a trozos cuyos subsegmentos diferenciables son geodésicas. Prueba que una variedad diferenciable M, con una conexión afín ∇, es conexa si, y sólo si, cualesquiera dos puntos de M se pueden unir mediante una geodésica a trozos.

ANOTACIONES

6. BIOGRAFÍA: WILHELM KLINGENBERG (1924-)

Wilhelm P.A. Klingenberg (1924-) nació en Rostock, Mecklenburg, Alemania. Su familia se trasladó a Berlín en 1934, donde Klingenberg asistió al colegio, aprendiendo latín, griego y francés, y teniendo que estudiar matemáticas de forma autodidacta e independiente. Entró en el Joachimsthalsces Gymnasium en 1937 y recibió su diploma de graduación en 1941. A continuación solicitó su ingreso en la Universidad de Berlín, lo cual no le fue concedido, teniendo que alistarse en el ejército. Klingenberg escribe:

Cuando el final de la guerra me devolvió la libertad, cambié mi escritura y comencé a buscar un lugar para estudiar. La devastada y ocupada ciudad de Berlín quedó relegada, Gotinga y Hamburgo estaban llenas, por lo que me marché a la Universidad de Kiel.

Klingenberg obtuvo su doctorado en 1950 con una tesis sobre geometría diferencial afín. Desde 1950 hasta 1952 fue un investigador asistente en la Universidad de Kiel, donde **F. Bachmann** le hizo interesarse por los fundamentos de la geometría. Durante esta época resolvió un problema sobre las equivalencias de las configuraciones en un plano afín sobre el que **Ruth Moufabg** había estado trabajando. **Blaschke** le aconsejó que viajase a Italia, y Klingenberg pasó cierto tiempo durante el curso 1952/1953 en la Universidad de Roma, donde estuvo fuertemente influido por **F. Severi**, **E. Bompiani** y **B. Segre**.

Tras su regreso a Alemania, Klingenberg completó su tesis de habilitación en Hamburgo y obtuvo un puesto de profesor permanente en la Universidad de Gotinga, trabajando con **Reidemeister**. Klingenberg escribe:

Tengo bonitos recuerdos de nuestros años allí; Reidemeister poseía una mente brillante y un gran abanico de intereses, siendo su esposa Elisabeth una renombrada fotógrafa.

Figura 10.1: Wilhelm Klingenberg

Klingenberg pasó el curso 1954/1955 en la Universidad de Bloomington, en los Estados Unidos, visitando asiduamente a **Morse**, de la Universidad de Princeton. Sus intereses se alejaron de la geometría diferencial afín y proyectiva, y volvieron a la geometría riemanniana. Aunque permaneció entre el profesorado de la Universidad de Gotinga hasta 1963, Klingenberg pasó los cursos 1956/1957 y 1957/1958 en el Instituto para Estudios Avanzados (IAS) en Princeton. En 1962 se desplazó a la Universidad de California, en Berkeley, invitado por el profesor **S.S. Chern**. Klingenberg escribe:

> *Le conocí en Hamburgo en 1953, cuando estaba visitando a su viejo profesor Blaschke, y desde entonces estuvo apoyándome en cada ocasión que se le presentaba.*

Mientras estaba en Berkeley, Klingenberg recibió ofertas para ocupar sendas cátedras en las universidades de Würzburg y Mainz, inclinándose finalmente por la Universidad de Mainz. Tres años después, en 1966, las universidades de Zurich y Bonn le ofrecieron cátedras. Klingenberg eligió, no sin algunas dificultades, la cátedra en Bonn. Sin embargo, Bonn creció rápidamente, tanto en profesorado como en alumnado:

> *...y parte del íntimo atractivo de un grupo unido se vino abajo. No sin tristeza y lucha, finalmente acepté el cambio y concentré todas mis energías en mi propio grupo de geometría diferencial.*

Klingenberg estuvo trabajando, durante sus años en la Universidad de Bonn, sobre geodésicas cerradas, retirándose en 1989. Entre sus principales libros pueden destacarse los siguientes: *A course in differential geometry (Un curso en geometría diferencial, 1978), Lectures on closed geodesics (Lecturas sobre geodésicas cerradas, 1978)* y *Riemannian geometry (Geometría riemanniana, 1982).* Acerca de ésta última obra, Klingenberg comenta:

> *Es el libro más importante acerca de este tema desde la monografía de L.P. Eisenhart en 1926.*

Bibliografía

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publising Company, 1995.

Internet. URL de la página:
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Klingenberg.html

Bibliografía complementaria

W.P.A. Klingenberg *Selected papers of Wilhelm P A Klingenberg*, (Singapore, 1991).

7. BIOGRAFÍA: SIMON DONALDSON (1957-)

Simon Kirwan Donaldson (1957-) asistió al colegio Sevenoaks en Kent desde 1970 hasta 1975, trasladándose en dicho año al College Pembroke, en Cambridge, donde estuvo hasta 1980, recibiendo su B.A. en 1979. Uno de sus tutores en Cambridge lo describe como un estudiante muy bueno, aunque no el mejor de su año.

En 1980 Donaldson comienza su trabajo de postgraduado en el College Worcester, en Oxford, primero bajo la supervisión de **Nigel Hitchen** y después bajo la supervisión de **Atiyah**, el cual diría sobre él lo siguiente:

> *En 1982, cuando era un estudiante postgraduado de segundo año, Simon Donaldson demostró un resultado que asombró a la comunidad matemática.*

Este resultado fue publicado por Donaldson en el Boletín de la American Mathematical Society, y en él analizaba las conexiones autoduales y la topología de las variedades de dimensión cuatro. Atiyah continúa la descripción de Donaldson:

> *Junto al importante trabajo de Michael Freedman ..., el resultado de Donaldson implica que existen espacios de dimensión 4 "exóticos", es decir, variedades diferenciables de dimensión 4 que son equivalentes topológicamente pero no diferenciablemente al espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$. Lo sorprendente de este resultado es que el valor $n = 4$ es el único posible para el cual existen espacios exóticos de esa dimensión. Estos espacios exóticos tienen la notable propiedad de contener conjuntos compactos que no están contenidos en ninguna esfera tridimensional embebida.*

Después deobtener su doctorado en 1983 en la Universidad de Oxford, Donaldson fue seleccionado como Miembro Investigador Junioren el College All Souls, de Oxford. El curso académico 198384 lo pasó en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. A su regreso a Oxford, ocupó la cátedra Wallis de matemáticas, cargo que desempeña en la actualidad.

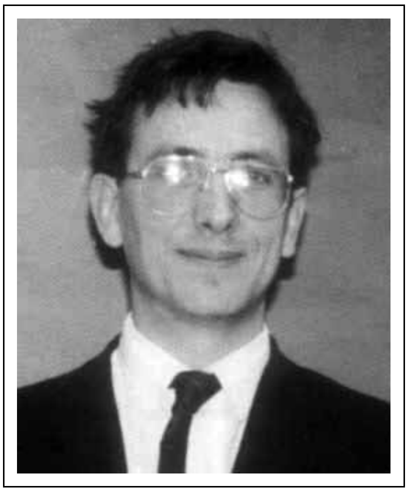

Figura 10.2: Simon Donaldson

Donaldson ha recibido muchos honores y premios por su trabajo. En 1985 recibió el Premio Whitehead Junior de la Sociedad Matemática de Londres, en 1986 fue elegido miembro de la Real

Sociedad y, en el mismo año, recibió la Medalla Fields en el Congreso Internacional que se celebró en Berkeley. En 1991 recibió el premio Sir Williams Hopkins de la Sociedad Filosófica de Cambridge y, al año siguiente, la Real Sociedad le ofreció la Medalla Real. En 1994 recibió el Premio Crafoord de la Real Academia Sueca de las Ciencias:

> *. . . for sus investigaciones fundamentales en la geometría de cuatro dimensiones y su aplicación a los 'instantones', en particular su descubrimiento de nuevos invariantes geométricos . . .*

Atiyah describe del siguiente modo la contribución de Donaldson que le permitió obtener la Medalla Fields:

> *Cuando Donaldson obtuvo sus primeros resultados sobre 4-variedades, las ideas eran tan novedosas y extrañas para los geómetras y topólogos de la época que simplemente lo miraron con admiración. Lentamente el mensaje ha ido calando y hoy las ideas de Donaldson están ya siendo utilizadas por otros matemáticos en muchos campos . . . Donaldson ha creado un área enteramente nueva, de modo que inesperados y misteriosos fenómenos acerca de las 4-variedades han sido descubiertos. Además los métodos son nuevos y profundos, con utilización de difíciles ecuaciones no lineales en derivadas parciales. Por otra parte, la teoría se halla perfectamente anclada en el reino de las matemáticas, incorporando ideas de la física teórica y estando bien relacionada con la geometría algebraica.*

El artículo de Donaldson, citado en la bibliografía, es muy interesante, pues contiene numerosos comentarios acerca de cómo Donaldson consiguió demostrar sus famosos resultados cuando sólo era un estudiante en Oxford, así como un recopilatorio de sus últimas líneas de investigación, en las que ha estado trabajando en los años recientes.

El trabajo de Donaldson está recogido por R. Stern:

> *En 1982, Simon Donaldson inició un rico viaje geométrico que nos ha conducido a una de las conclusiones más excitantes de este siglo. Ha creado un área nueva y excitante de investigación sobre la que trabajan numeros matemáticos, y que todavía continúa proporcionando misteriosos e inesperados fenómenos acerca de la topología y la geometría de las 4-variedades diferenciables.*

Bibliografía

M. Atiyah *On the work of Simon Donaldson*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986 1 (Providence, RI,1987), 3-6.

S. Donaldson *Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology*, en M. Atiyah y D. Iagolnitzer (eds.), Fields Medallistists Lectures (Singapore, 1997), 384-403.

M. Furuta *The contributions of Simon Kirwan Donaldson*, Sugaku 39 (1) (1987), 16-25.

J. Mi *The work of mathematicians awarded the Fields Medal in 1983 and 1986*, J. Northwest Univ. 19 (1) (1989), 103-104.

R. Stern y G. Tian *Donaldson and Yau receive Crafoord prize*, Notices Amer. Math. Soc. 41 (7) (1994), 794-796.