

## CAPÍTULO 9 CONEXIONES AFINES

### 1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Conexión afín
- Coeficientes o símbolos de Christoffel
- Conexión afín en un punto
- Conexión afín canónica
- Torsión de una conexión
- Conexión simétrica
- Curvatura de una conexión
- Derivada covariante a lo largo de una curva
- Campos paralelos
- Transporte paralelo a lo largo de una curva
- La diferencial covariante

### 2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

La introducción por Levi-Civita del concepto de paralelismo supuso un extraordinario avance en la Geometría Diferencial. En el caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$  existe un concepto equivalente, llamado derivada covariante, que puede ser descrito como sigue. Consideremos  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular,  $c : I \rightarrow S$  una curva parametrizada en  $S$  y  $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de vectores tangente a  $S$  a lo largo de  $c$ . En general, el vector  $\dot{V}(t) = \frac{dV}{dt}(t)$  no pertenece al plano tangente  $T_{c(t)}S$ , por lo que se considera el vector obtenido al proyectar ortogonalmente  $\dot{V}(t)$  sobre  $T_{c(t)}S$ , que se denota por  $\frac{DV}{dt}(t)$ . Dicho vector se denomina la derivada covariante de  $V$  en  $c(t)$ , y la importancia de esta elección radica en el hecho de que la derivada covariante es un concepto intrínseco de la superficie, pues sólo depende de la primera forma fundamental.

## 2.1. Definiciones y resultados básicos

### Definición 9.1

Una *conexión afín* sobre una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ , denotada por  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ , verificando las dos propiedades siguientes:

- (1)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- (2)  $\nabla_X(fY + gZ) = X(f)Y + f\nabla_X Y + X(g)Z + g\nabla_X Z$ , para todo trío de campos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y todo par de funciones diferenciables  $f$  y  $g$ .

El propósito de introducir este concepto es el de desarrollar una teoría satisfactoria de diferenciación en variedades, teniendo propiedades similares a las que se satisfacen en  $\mathbb{R}^n$ . El término “conexión” no tiene un significado especial y hay que interpretarlo justamente como un operador, en un sentido similar a la derivada direccional.

Además de la interpretación global de la conexión que hemos presentado, resulta de particular interés la expresión local de la conexión, ya que asociada a ella aparecen los coeficientes de la conexión o *símbolos de Christoffel*. Antes de obtener la expresión local debemos observar que se satisface el siguiente resultado.

### Proposición 9.2

Sea  $\nabla$  una conexión afín sobre una variedad  $M$  y sea  $U$  un entorno abierto en  $M$ .

- (1) Si  $X_1 = X_2$  en  $U$  entonces  $\nabla_{X_1} Y = \nabla_{X_2} Y$  en  $U$ .
- (2) Si  $Y_1 = Y_2$  en  $U$  entonces  $\nabla_X Y_1 = \nabla_X Y_2$  en  $U$ .

Obtengamos ahora la expresión local de la conexión. Sea  $(U, x)$  un sistema de coordenadas, y supongamos que los campos  $X$  e  $Y$  se expresan localmente como

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Escribamos

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$$

Entonces, en el abierto  $U$ , se verifica

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left\{ X(b_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Las funciones  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  se denominan los coeficientes de la conexión o símbolos de Christoffel asociados a la carta  $x$ .

Esta visión permite deducir que el valor de  $\nabla_X Y$  en un punto  $p$  sólo depende de  $X_p$ , de  $Y_p$  y de las derivadas de las funciones componentes de  $Y$  en la dirección de  $X_p$ . Por tanto, es posible construir una aplicación lineal  $\nabla_v$ , para cada vector tangente  $v$  en  $p$ ,  $\nabla_v : \mathfrak{X}(p) \longrightarrow T_p M$ , satisfaciendo la condición  $\nabla_v(fY) = v(f)Y_p + f(p)\nabla_v Y$  para toda función  $f$  diferenciable en un entorno de  $p$ . De este modo definimos una función lineal  $\nabla_{(p)}$ , denominada conexión afín en  $p$ , que a cada vector  $v$  tangente a  $M$  en  $p$  le asocia la aplicación  $\nabla_v$ . Así pues, a partir de una conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$  podemos construir conexiones afines  $\nabla_{(p)}$  en cada punto  $p$  de la variedad. Una especie de recíproco se presenta en el siguiente resultado.

**Proposición 9.3**

Sea  $\nabla$  una correspondencia que asocia a cada punto  $p$  de la variedad una conexión afín  $\nabla_{(p)}$  en  $p$ . Entonces  $\nabla$  define una conexión afín sobre  $M$  si, y solamente si, para todo par de campos de vectores diferenciables  $X$  e  $Y$ , la función  $p \rightarrow \nabla_{(p)X} Y$  es un campo de vectores diferenciable.

**Ejemplo 9.4**

En cualquier carta  $(U, x)$  de una variedad diferenciable  $M$  puede definirse una conexión de la siguiente manera. Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(b_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\nabla$  se denomina la conexión afín canónica asociada a la carta  $(U, x)$ . Como consecuencia, toda variedad diferenciable con una carta global admite una conexión.

Utilizando la caracterización de la Proposición 9.3 se prueba el siguiente resultado.

**Proposición 9.5**

Toda variedad diferenciable Hausdorff con una base numerable admite una conexión afín.

**2.2. Torsión y curvatura de una conexión**

Dada una conexión afín sobre una variedad diferenciable, existen dos tensores asociados de gran importancia, aunque su verdadera potencia aparece cuando se estudian sobre variedades riemannianas.

**Proposición 9.6**

Sea  $\nabla$  una conexión afín sobre una variedad diferenciable  $M$  y definamos  $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  por  $T(X, Y) = [X, Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X$ . Entonces  $T$  es un tensor de tipo  $(1,2)$  sobre  $M$  denominado tensor torsión de  $\nabla$ .

Algunos autores consideran a  $-T$  como el tensor torsión. Si denotamos por  $T_{ij}$  a los campos de vectores

$$T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

entonces es fácil probar que

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

El siguiente resultado es ahora obvio.

**Proposición 9.7**

Una conexión afín  $\nabla$  tiene torsión cero si, y sólo si, en cualquier sistema de coordenadas sus componentes satisfacen  $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$ . Una tal conexión se dice que es simétrica.

**Ejemplo 9.8**

La conexión canónica definida anteriormente es simétrica ya que sus símbolos de Christoffel son nulos en todo punto.

Mientras que el corchete de Lie de dos campos  $[X, Y]$  mide la diferencia en el intercambio en el orden de diferenciación para las funciones, no ocurre lo mismo para los campos. No es difícil probar que, en general,  $\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) \neq 0$ ; por tanto, dicha diferencia determina un campo de vectores sobre  $M$  que puede ser pensado como el análogo a  $[X, Y]$ . Surge de este modo un nuevo tensor.

### Proposición 9.9

Sea  $\nabla$  una conexión afín sobre una variedad diferenciable  $M$  y definamos  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  por  $R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z)$ . Entonces  $R$  es un tensor de tipo  $(1, 3)$  sobre  $M$  denominado tensor curvatura de  $\nabla$ .

Debido a que en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  se tiene  $R = 0$ , podemos interpretar el tensor curvatura como una forma de medir cuánto se desvía  $M$  de ser euclídeo.

## 2.3. La derivada covariante

La noción de paralelismo introducida por Levi-Civita es anterior a las conexiones afines y a las derivadas covariantes. Sin embargo, y por razones pedagógicas, nosotros hemos invertido el orden de presentación.

### Proposición 9.10

Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín. Entonces existe una única correspondencia que asigna a cada campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $c$ , satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (1)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ ;
- (2)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , para toda función diferenciable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ; y
- (3) Si  $V$  está inducido por un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , es decir,  $V(t) = Y(c(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)}Y$ .

Este resultado prueba que la elección de una conexión afín conduce a una buena definición de la derivada de campos de vectores a lo largo de curvas. La noción de conexión proporciona, además, una manera de diferenciar vectores a lo largo de curvas, permitiendo hablar por ejemplo de la aceleración de una curva.

Surge ahora, de manera natural, la noción de paralelismo.

### Definición 9.11

Un campo de vectores  $Y$  sobre  $M$  se dice *constante* o *paralelo* si  $\nabla_{X_p}Y = 0$  para todo punto  $p$  y todo vector  $X_p$  tangente a  $M$  en  $p$ .

En general no existen tales campos de vectores, ni siquiera sobre pequeños subconjuntos de  $M$ . Sin embargo, dada una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$ , siempre existe un campo de vectores  $V(t)$  paralelo a lo largo de  $c$ , lo que se indica por  $\frac{DV}{dt} = 0$ . Esto permite construir una aplicación entre espacios tangentes denominada el *transporte paralelo*, que constituye una herramienta muy útil en Geometría de Riemann.

**Proposición 9.12**

Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín. Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  y  $v$  un vector tangente a  $M$  en  $c(t_0)$ . Entonces existe un único campo de vectores paralelo  $V$  a lo largo de  $c$  tal que  $V(t_0) = v$ . El campo  $V$  se denomina transporte paralelo de  $v$  a lo largo de  $c$ .

La existencia y unicidad de campos de vectores paralelos permite construir la siguiente aplicación. Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva en  $M$  y  $t_0 \in I$ . Para cada  $t_1 \in I$  podemos construir la aplicación

$$P = P_{t_0}^{t_1}(c) : T_p M \rightarrow T_q M, \quad p = c(t_0), \quad q = c(t_1),$$

que envía cada  $v \in T_p M$  al vector  $V(t_1) \in T_q M$ . Esta aplicación se denomina transporte paralelo a lo largo de  $c$  desde  $p$  hasta  $q$ . Es fácil probar el siguiente resultado.

**Proposición 9.13**

El transporte paralelo a lo largo de  $c$  desde  $p$  hasta  $q$  es un isomorfismo lineal.

**2.4. La diferencial covariante**

Para definir una derivación en los campos tensoriales basta definirla en las funciones y en los campos diferenciables. Esto nos conduce al siguiente resultado.

**Proposición 9.14**

Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y consideremos un campo de vectores  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces existe una única derivación tensorial  $\nabla_V$  tal que  $\nabla_V(f) = V(f)$  y  $\nabla_V(W) = \nabla_V W$ .  $\nabla_V$  se denomina la diferencial covariante respecto de  $V$ .

Sea un tensor  $A \in T_s^r(M)$ . Entonces la aplicación  $V \rightarrow \nabla_V A$  es  $C^\infty(M)$ -lineal, lo cual justifica la siguiente definición.

**Definición 9.15**

La diferencial covariante de un tensor  $A \in T_s^r(M)$  es el tensor  $\nabla A \in T_{s+1}^r(M)$  dado por

$$(\nabla A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) := (\nabla_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

El tensor  $A$  se dice que es paralelo si  $\nabla A = 0$ .

**3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS**

**A.9.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión lineal  $\nabla$ . Consideremos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y supongamos que  $X = 0$  o  $Y = 0$  en un abierto  $U$  de  $M$ . Entonces se verifica que  $\nabla_X Y = 0$  sobre  $U$ .

**A.9.2. (a)** Sea  $\nabla^+$  una conexión con torsión no nula  $T$  sobre una variedad  $M$ . Prueba que  $\nabla^-$  definida por

$$\nabla_X^- Y = \nabla_X^+ Y + T(X, Y)$$

es una nueva conexión con torsión  $-T$ .

- (b) Sea  $\nabla^+$  una conexión con torsión no nula  $T$  sobre una variedad  $M$  y  $\nabla^-$  la conexión asociada que nos da el apartado anterior. Prueba que

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X^+ Y + \nabla_X^- Y)$$

define una conexión  $\nabla$  que es simétrica.

- (c) Si  $\Gamma_{jk}^i$  son los coeficientes de una conexión lineal dada sobre  $M$ , prueba que la conexión simétrica asociada tiene coeficientes

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i).$$

**A.9.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión. Prueba que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

- (a)  $\nabla$  tiene torsión cero.  
 (b)  $d\omega(X, Y) = \{(\nabla_X \omega)Y - (\nabla_Y \omega)X\}$ , para todo par de campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y toda 1-forma  $\omega \in \Lambda^1(M)$ .

**A.9.4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión sobre  $M$  sin torsión. Demuestra que para toda 2-forma diferenciable  $\omega \in \Lambda^2(M)$  y para cualesquiera tres campos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  se verifica:

$$d\omega(X, Y, Z) = \{(\nabla_X \omega)(Y, Z) + (\nabla_Y \omega)(Z, X) + (\nabla_Z \omega)(X, Y)\}.$$

**A.9.5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión sobre  $M$ . Prueba la igualdad:

$$d\omega(X, Y, Z) = \{(\nabla_X \omega)(Y, Z) + (\nabla_Y \omega)(Z, X) + (\nabla_Z \omega)(X, Y) + \omega(T(X, Y), Z) + \omega(T(Z, X), Y) + \omega(T(Y, Z), X)\}$$

para toda 2-forma diferenciable  $\omega \in \Lambda^2(M)$  y cualesquiera tres campos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

**A.9.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión sobre  $M$ . Representamos por  $A(M)$  el conjunto de las transformaciones afines de  $M$ . Demuestra que  $A(M)$  es un grupo.

**A.9.7.** Sean  $M$  y  $M'$  dos variedades diferenciables con conexiones  $\nabla$  y  $\nabla'$ , respectivamente, y  $\varphi : M \rightarrow M'$  un difeomorfismo. Se dice que  $\varphi$  es una **transformación afín** si conserva la conexión, esto es:

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y),$$

para todo par de campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Prueba la igualdad:

$$\varphi_*(T(X, Y)) = T'(\varphi_*(X), \varphi_*(Y)),$$

para todo par de campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , siendo  $T$  y  $T'$  los tensores de torsión de  $\nabla$  y  $\nabla'$ , respectivamente.

**A.9.8.** Sea  $h : J \rightarrow I$  una reparametrización de una curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow M$ . Si  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$  entonces  $Z \circ h \in \mathfrak{X}(\alpha \circ h)$  y se verifican las siguientes ecuaciones:

$$(a) (Z \circ h)' = \frac{dh}{dt} Z' \circ h$$

$$(b) (Z \circ h)'' = \frac{d^2h}{dt^2} Z' \circ h + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 Z'' \circ h$$

**A.9.9.** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva diferenciable tal que  $\alpha'(s_0) \neq 0$ .

- (a) Si  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$  es un campo de vectores diferenciable a lo largo de  $\alpha$  entonces existe un campo de vectores diferenciable  $\tilde{Z}$  en un entorno de  $\alpha(s_0)$  en  $M$  tal que  $(\tilde{Z})_{\alpha(s)} = Z(s)$  para  $s$  cerca de  $s_0$ .
- (b) Deduce que existe un campo  $\tilde{Z}$  tal que  $\alpha$  es localmente una curva integral de  $\tilde{Z}$ .

**A.9.10.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión  $D$  simétrica y  $s : \Omega \rightarrow M$  una superficie parametrizada. Entonces:

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}$$

#### 4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK . *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

#### 5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

**E.9.1.** Sean  $M$  y  $M'$  dos variedades diferenciables con conexiones  $\nabla$  y  $\nabla'$ , respectivamente, y  $\varphi : M \rightarrow M'$  un difeomorfismo. Prueba que dados  $M, M', \nabla$  y  $\varphi$ , existe una única conexión  $\nabla'$  sobre  $M'$  tal que  $\varphi$  es una transformación afín. ¿Qué relación hay entre los símbolos de Christoffel de  $M$  y  $M'$  asociados a sistemas de coordenadas relacionados mediante  $\varphi$ ?

**E.9.2.** Sea  $\nabla$  una conexión sobre  $\mathbb{R}^2$  definida por los símbolos siguientes (respecto de la base global canónica de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ ):

$$\Gamma_{21}^1 = 1, \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (i, j, k) \neq (2, 1, 1).$$

Consideremos la curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\sigma(t) = (3e^{-t}, 4t + 5)$ . Encuentra el campo de vectores  $Y$  a lo largo de  $\sigma$  que nos da el desplazamiento paralelo con  $Y(\sigma(0)) = \sigma'(0)$ .

**E.9.3.** Sea  $D$  la conexión usual de Levi-Civita de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $v \in T_p\mathbb{R}^n$ . Para todo campo diferenciable  $X$  definimos  $\nabla$  por

$$\nabla_v X = \left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=0}$$

donde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  está definida por  $F(t) = X(p + tv)$ . Prueba que el operador  $\nabla$  así definido es una conexión y que coincide con  $D$ .

ANOTACIONES

A series of horizontal dotted lines for taking notes, contained within a rectangular border.

## 6. BIOGRAFÍA: LUTHER EISENHART (1876-1965)

**Luther Pfahler Eisenhart** (1876-1965) fue estudiante en el Colegio de Getisburgo desde 1892 hasta 1896, recibiendo su título de Bachiller en 1896. Después de estudiar en un colegio durante un año, ingresó en la Universidad de Johns Hopkins para proseguir con los estudios de graduado. Obtuvo el doctorado en 1900 con una tesis doctoral titulada *Infinitesimal deformations of surfaces (Deformaciones infinitesimales de superficies)*. Este trabajo estuvo fuertemente influido por el clásico tratado de **J.G. Darboux** (1842-1917) sobre el tópico, y durante su elaboración recibió muy poca atención de parte de su supervisor.

Eisenhart pasó la mayor parte de su carrera en Princeton, donde llegó a ser instructor en 1900 y profesor en 1909, cargo que desempeñó hasta que se retiró en 1945. Fue nombrado Decano de la Facultad en 1925, desempeñando el cargo hasta 1933, cuando fue nombrado Decano de la Escuela Graduada.

Los trabajos de Eisenhart pueden agruparse en dos etapas diferenciadas, aunque ambas dedicadas a la geometría diferencial. Durante la primera época continuó las investigaciones de su tesis doctoral estudiando deformaciones de superficies. Su primer libro *A Treatise in the Differential Geometry of Curves and Surfaces (Tratado de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies)*, publicado en 1909, trataba sobre este tema y está basado en los distintos cursos que Eisenhart impartió en la Universidad de Princeton a lo largo de varios años. R.C. Archibald describe este libro como sigue:

*... en forma de libro de texto, con numerosos problemas, introduciendo al estudiante en los métodos clásicos y modernos. Una de las novedades más interesantes del volumen es el llamado "triedro móvil" para curvas alabeadas, así como las superficies, utilizado frecuentemente por Darboux y otros. Del primero se toman los métodos de teoría de funciones reales de una variable real. La obra introduce al estudiante americano en un importante campo utilizando para ello los métodos más modernos.*

El reconocimiento de Eisenhart por Darboux era notorio y en un artículo publicado en la revista *Bull. Amer. Math. Soc.* al año siguiente a la muerte de Darboux, Eisenhart escribe:

*Darboux fue un férreo defensor del uso de los elementos imaginarios en geometría. Creía que su uso en geometría era tan necesario como lo es en análisis. Estaba impresionado por el éxito que habían tenido en la solución del problema de las superficies minimales. ... Darboux reconoce a E. Combes-cure como el primero en aplicar consideraciones cinemáticas al estudio de la teoría de superficies, con el consiguiente uso de las referencias móviles. Pero todos le debemos a Darboux, además del método, su sistemático desarrollo y exposición. ... La habilidad de Darboux es una rara combinación entre elaboración geométrica y potencia analítica. No simpatizaba con aquellos que sólo utilizaban un razonamiento geométrico cuando intentaban resolver problemas geométricos, ni tampoco con aquellos que sentían una especial necesidad de seguir sólo procedimientos analíticos. ... Tenía en común con Monge la necesidad de hacer discípulos, además de realizar investigaciones y descubrimientos. ... Sus brillantes investigaciones [la de sus discípulos] es el mejor tributo a su maestro.*

La segunda época comienza en 1921, cuando Eisenhart, animado por la teoría de la relatividad de **A. Einstein** y las geometrías relacionadas, estudia diversas generalizaciones de la geometría de Riemann. Fruto de estas investigaciones serían los dos libros *Riemannian Geometry (Geometría riemanniana, 1926)* y *Non-Riemannian Geometry (Geometría no riemanniana, 1927)*. Sobre el primero de los libros **S. Lefschetz** dice:



Figura 9.1: L.P. Eisenhart

*Riemann propuso la generalización de la teoría de superficies como las había desarrollado Gauss, para espacios de cualquier orden, e introdujo ciertas ideas fundamentales en esta teoría general. Contribuciones importantes fueron hechas por Bianchi, Beltrami, Christoffel, Schur, Voss, y otros, y Ricci-Curbastro coordinó y extendió la teoría con el uso del análisis tensorial y su cálculo diferencial. El libro presenta la teoría existente sobre geometría riemanniana después de un periodo de considerable estudio y desarrollo del tema por Levi-Civita, Einsehart y muchos otros.*

En 1933 Eisenhart publicó *Continuous Groups of Transformations (Grupos continuos de transformaciones)*, que continuaba sus trabajos anteriores sobre la teoría de Lie usando los métodos del cálculo tensorial y la geometría diferencial. A este respecto, **S. Lefschetz** dice:

*El estudio de grupos continuos de transformaciones fue inaugurado por Lie y continuado posteriormente por Engel, Killing, Scheffers, Schur, Cartan, Bianchi y Fubini, un capítulo que se cerró con el cambio de siglo. El nuevo capítulo comenzó alrededor de 1920 con los estudios del análisis tensorial, geometría riemanniana y sus generalizaciones, y la aplicación de la teoría de grupos continuos a las nuevas teorías físicas. Eisenhart ha desarrollado un destacable cuerpo de material original y ha ayudado notablemente a sus colegas gracias a sus frecuentes trabajos recopilatorios en campos donde ha llegado a ser un especialista.*

Eisenhart estuvo vinculado a la Sociedad Matemática Americana durante muchos años, pues fue Vicepresidente en 1914, Colloquium lecturer en 1925, donde impartió conferencias sobre geometría no riemanniana, editó la revista *Transactions of the American Mathematical Society* desde 1917 hasta 1923, siendo editor jefe durante el periodo 1920-1923, y Presidente durante dos años (1931-1932).

## Bibliografía

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company, 1995.

Internet. URL de la página:

[www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Eisenhart.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Eisenhart.html)

**Bibliografía complementaria**

*Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).

**Artículos:**

R.C. Archibald *A semicentennial history of the American Mathematical Society 1888-1938* (New York, 1980)

S. Lefschetz *Luther Pfahler Eisenhart, Biographical Memoirs*, National Academy of Science 40 (1969), 69-90.

S. Lefschetz *Luther Pfahler Eisenhart: January 13, 1876-October 28, 1965*, A century of mathematics in America I (Providence, R.I., 1988), 56-78.

## 7. BIOGRAFÍA: SHIING-SHEN CHERN (1911-)

**Shiing-shen Chern** (1911-) comenzó sus estudios en la Universidad Nankai, en Tientsin (China), graduándose en la Universidad de Tsing Hua, Pekín. Fue el único estudiante de matemáticas que ingresó en la universidad en 1930 y durante los cuatro años que estuvo en la Universidad estudió profunda y ampliamente la geometría diferencial proyectiva, publicando sus propios artículos sobre este tema.

En 1934 consiguió una beca para estudiar en los Estados Unidos, pero Chern solicitó encarecidamente que se le permitiera ir a Hamburgo, ya que había conocido a **W. Blaschke** cuando éste visitó Pekín en 1932, encontrando sus matemáticas atractivas. Después de trabajar apenas un año con Blaschke, Chern obtuvo el doctorado por la Universidad de Hamburgo en 1936.

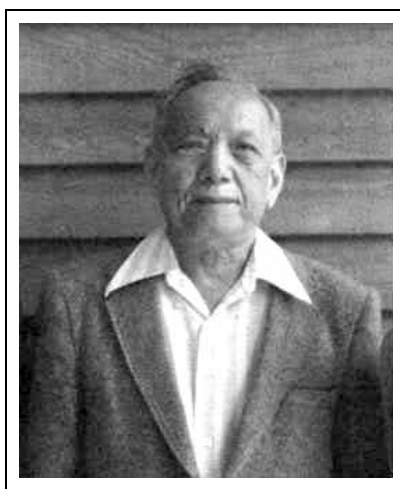


Figura 9.2: Fotografía S.S. Chern

En este punto Chern fue obligado a elegir entre dos opciones muy atractivas para él: permanecer en Hamburgo y trabajar en álgebra bajo las órdenes de **Artin**, o marchar a París para estudiar con Cartan. Aunque Chern conocía a Artin muy bien y le hubiera apetecido trabajar con él, sus deseos de seguir investigando en geometría diferencial fueron el factor decisivo para que recalara en París. Su estancia en París fue muy productiva, aprendiendo a acercarse a las matemáticas de un modo especial, como el propio Cartan señala:

*... desde la evidencia y los fenómenos que nacen de casos especiales en lugar de utilizar un punto de vista general y abstracto.*

En 1937 Chern deja París para convertirse en profesor de la Universidad de Tsing Hua. Sin embargo éste fue el momento en el que comenzó la guerra chino-japonesa, y desde 1938 hasta 1943 trabajó para la Universidad Asociada del Sudeste. En 1943 se traslada a los Estados Unidos y hasta 1945 permanece en la Universidad de Princeton, donde consigue impresionar a **A. Weyl** y **O. Veblen**. En esta Universidad se hace muy amigo de **S. Lefschetz** que le persuade de ser editor de los *Annals of Mathematics*.

Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, Chern regresa a China, y se incorpora al Instituto de Matemáticas en la Academia Sinica, en Nanking. Pero la desgracia no abandona a China que vive en plena guerra civil, por lo que Chern acepta la invitación de Weyl y Veblen para regresar a Princeton.

Desde 1949 Chern es miembro de la Universidad de Chicago, ocupando una cátedra en geometría. En 1969 Chern se traslada a la Universidad de California, en Berkeley.

En 1975 ganó la Medalla Nacional de la Ciencia, en 1983 obtuvo el Premio Wolf, en 1985 fue elegido miembro de la Real Sociedad de Londres y al año siguiente lo nombraron miembro honorario de la Sociedad Matemáticas de Londres.



Figura 9.3: Fotografía S.S. Chern

Su área de investigación fue geometría diferencial, donde estudió las clases características en espacios fibrados (hoy llamadas, en su honor, clases de Chern). Estas clases son importantes no sólo en matemáticas sino también en física matemática. Trabajó en las clases características durante el periodo 1943-1945 que pasó en la Universidad de Princeton, y en esta misma época obtuvo su famosa demostración de la fórmula de Gauss-Bonnet.

Su trabajo queda perfectamente resumido por C.N. Yang:

*Quando Chern trabajaba en geometría diferencial por los años cuarenta, este área de las matemáticas tenía un nivel muy bajo. La geometría diferencial global estaba en sus comienzos y la teoría de Morse sólo era comprendida y utilizada por unos pocos matemáticos. En la actualidad, la geometría diferencial es una de las áreas principales de las matemáticas y una de las personas que más ha contribuido a este cambio ha sido el profesor Chern.*

En 1979 se celebró un Simposio en su honor, y los asistentes le homenajearon con la siguiente canción:

*Hail to Chern! Mathematics Greatest!  
He made Gauss-Bonnet a household word,  
Intrinsic proofs he found,  
Throughout the World his truths abound,  
Chern classes he gave us,  
and Secondary Invariants,  
Fibre Bundles and Sheaves,  
Distributions and Foliated Leaves!  
All Hail All Hail to CHERN.*

**Bibliografía**

- D.J. Albers y G.L. Alexanderson (eds.) *Mathematical People: Profiles and Interviews*, (Boston, 1985), 33-40.
- L. Auslander S.S. *Chern as teacher*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 109-111.
- F.E. Browder S.S. *Chern*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 102-103.
- M.P. do Carmo S.S. *Chern: mathematical influences and reminiscences*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 179-183.
- P.C.W. Chu *Professor S.S. Chern, my father-in-law*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 91-94.
- R.E. Greene S.S. *Chern: some mathematical and personal reminiscences*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 247-252.
- P.A. Griffiths S.S. *Chern: always changing, always the same*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 117-120.
- W. Klingenberg *My encounters with S.S. Chern*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 156-160.
- L. Nirenberg *Some personal remarks about S.S. Chern*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 98-101.
- S.-T. Yau S.S. *Chern, as my teacher*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 271-274.
- S.Y. Cheng *My teacher Professor S.S. Chern*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 253-258.
- J. Simons *My interaction with S.S. Chern*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 176-178.
- A. Weil S.S. *Chern as geometer and friend*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 72-78.
- A. Weinstein *Some thoughts about S.S. Chern*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 245-246.
- R.O. Wells *Chern Retires from Berkeley, Almost!*, *The Mathematical Intelligencer* 2 (1980), 78-81.
- C.N. Yang S.S. *Chern and I*, Chern, a great geometer of the twentieth century (Hong Kong, 1992), 63-71.