

## CAPÍTULO 8

### DERIVACIONES TENSORIALES

#### 1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Derivación tensorial
- Carácter local de una derivación
- Construcción de derivaciones
- La derivada de Lie
- Derivaciones y antiderivaciones sobre las formas
- La diferencial exterior
- El producto interior

#### 2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

##### 2.1. Definiciones y resultados básicos

Definimos en esta lección lo que se entiende por una derivación tensorial  $\mathcal{D}$  sobre una variedad diferenciable  $M$ , que es un conjunto de funciones  $\mathbb{R}$ -lineales  $\mathcal{D}_s^r$  que aplica los tensores de tipo  $(r, s)$  en los tensores del mismo tipo, y tales que satisfacen la regla de Leibnitz del producto y conmutan con las contracciones. En el caso especial en que  $r = s = 0$ , entonces se trata de una derivación sobre las funciones diferenciables y, en consecuencia, proviene de un único campo de vectores diferenciable. Más precisamente:

##### **Definición 8.1**

Una *derivación tensorial*  $\mathcal{D}$  sobre una variedad  $M$  es un conjunto de aplicaciones  $\mathbb{R}$ -lineales

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s^r : T_s^r(M) \rightarrow T_s^r(M), \quad r, s \geq 0$$

tales que para cualesquiera tensores  $A$  y  $B$  se tiene:

- (1)  $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$ .
- (2)  $\mathcal{D}(CA) = C(\mathcal{D}A)$ , para cualquier contracción  $C$ .

Las derivaciones tensoriales no son, en general,  $C^\infty(M)$ -lineales. Por este motivo, el valor del tensor  $\mathcal{D}A$  en un punto  $p$  de  $M$  no puede obtenerse sólo a partir de  $A_p$ , esto es, del valor de  $A$  en  $p$ . Sin embargo,  $(\mathcal{D}A)(p)$  depende de los valores de  $A$  en un entorno arbitrariamente pequeño de  $p$ , lo cual nos recuerda la conocida propiedad relativa a la diferencial de funciones diferenciables. El carácter local de las derivaciones puede expresarse diciendo que la derivación tensorial conmuta con la restricción a abiertos de la variedad.

**Proposición 8.2**

Si  $\mathcal{D}$  es una derivación tensorial sobre  $M$  y  $U \subset M$  es un abierto, entonces existe una única derivación tensorial  $\mathcal{D}_U$  sobre  $U$  tal que

$$\mathcal{D}_U(A|_U) = (\mathcal{D}A)|_U$$

para cualquier tensor  $A$  sobre  $M$ .  $\mathcal{D}_U$  se denomina la restricción de  $\mathcal{D}$  a  $U$ .

Un resultado interesante es aquél que nos da la fórmula de la derivación tensorial de un tensor a partir de la derivación de campos de vectores y uno formas, de lo que se deduce que si dos derivaciones coinciden sobre los campos de vectores y sobre las uno formas entonces son iguales.

**Proposición 8.3**

Sea  $\mathcal{D}$  una derivación tensorial sobre  $M$  y  $A \in T_s^r(M)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) &= (\mathcal{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, \mathcal{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{j=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s) \end{aligned}$$

Como un caso particular de la proposición que acabamos de enunciar, si  $\theta$  es una uno-forma sobre  $M$  podemos deducir la siguiente expresión para su derivada tensorial:

$$(\mathcal{D}\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta X) - \theta(\mathcal{D}X)$$

Por tanto, basta conocer cómo actúa  $\mathcal{D}$  sobre las funciones y los campos de vectores. En otras palabras,

**Corolario 8.4**

Si dos derivaciones tensoriales  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  sobre  $M$  coinciden sobre las funciones diferenciables y sobre los campos de vectores entonces  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ .

Una consecuencia destacable de este resultado es que nos da la pista para construir derivaciones tensoriales:

**Teorema 8.5**

Sea un campo de vectores  $V$  y una función  $\delta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$   $\mathbb{R}$ -lineal, satisfaciendo

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X).$$

Entonces existe una única derivación que coincide con  $V$  actuando sobre las funciones diferenciables y con  $\delta$  actuando sobre los campos de vectores.

## 2.2. La derivada de Lie

Como una de las aplicaciones más importantes del resultado anterior podemos citar la construcción de la derivada de Lie.

### Proposición 8.6

Sea  $V$  un campo de vectores diferenciable y consideremos la aplicación diferenciable  $\delta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por  $\delta(X) = [V, X]$ . Entonces existe una única derivación tensorial  $\mathcal{L}_V$  sobre  $M$  tal que  $\mathcal{L}_V(f) = V(f)$  sobre las funciones diferenciables y  $\mathcal{L}_V(X) = [V, X]$  sobre los campos de vectores.  $\mathcal{L}_V$  se denomina la derivada de Lie respecto de  $V$ .

Denotando por  $\mathcal{D}(M)$  el conjunto de todas las derivaciones tensoriales sobre  $M$  podemos, pues, construir un operador  $\mathcal{L}$  definido sobre  $\mathfrak{X}(M)$  y con valores en  $\mathcal{D}(M)$ , que a cada campo  $V$  le asigna la derivada de Lie respecto de  $V$ , y que se denomina la derivada de Lie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathcal{D}(M) \\ V &\rightarrow \mathcal{L}_V \end{aligned}$$

La aplicación  $\mathcal{L}$  así definida satisface las siguientes propiedades.

### Proposición 8.7

- (1)  $\mathcal{L}_{aV+bW} = a\mathcal{L}_V + b\mathcal{L}_W$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] = \mathcal{L}_{[V, W]}$ .
- (3)  $\mathcal{L}_V(df) = d(Vf)$ .

Si  $B \in \mathcal{T}_1^1(M)$  es un tensor de tipo (1,1) sobre  $M$  e interpretamos  $B$  como una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal  $B : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , entonces existe una única derivación tensorial  $\mathcal{D}_B$  tal que  $\mathcal{D}_B(f) = 0$  y  $\mathcal{D}_B(X) = BX$ . Por otra parte, si  $\mathcal{D}$  es una derivación tal que  $\mathcal{D}_0^1$  es una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal, entonces  $\mathcal{D}_0^1$  puede interpretarse como un tensor  $B$  de tipo (1,1), y por este motivo la derivación la denotaremos por  $\mathcal{D}_B$ . Esta familia de derivaciones nos permite probar que la derivada de Lie es, esencialmente, la única que existe. En efecto, tenemos el siguiente resultado:

### Proposición 8.8

Dada una derivación arbitraria  $\mathcal{D}$ , existe un único campo de vectores  $V$  y un único tensor  $B$  de tipo (1,1) tal que la derivación se descompone como  $\mathcal{L}_V + \mathcal{D}_B$ .

## 2.3. Derivaciones y antiderivaciones en las formas

Si en lugar de considerar los tensores arbitrarios de tipo  $(r, s)$  nos centramos en las formas diferenciales, entonces podemos definir dos tipos de operadores con propiedades muy especiales.

### Definición 8.9

Un operador  $T : \bigwedge(M) \rightarrow \bigwedge(M)$  se dice que es una *derivación de grado  $2k$* ,  $k \in \mathbb{Z}$ , si satisface las siguientes tres propiedades:

- (1)  $T\omega \in \bigwedge^{p+2k}(M)$  para toda  $\omega \in \bigwedge^p(M)$ ;

- (2)  $T$  es  $\mathbb{R}$ -lineal;  
 (3)  $T(\omega \wedge \theta) = (T\omega) \wedge \theta + \omega \wedge (T\theta)$ .

De manera totalmente análoga,

**Definición 8.10**

Un operador  $T$  es una *antiderivación de grado  $2k + 1$* ,  $k \in \mathbb{Z}$ , si satisface:

- (1)  $T\omega \in \wedge^{p+2k+1}(M)$  para toda  $\omega \in \wedge^p(M)$ ;  
 (2)  $T$  es  $\mathbb{R}$ -lineal;  
 (3)  $T(\omega \wedge \theta) = (T\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (T\theta)$ , siendo  $p$  el grado de  $\omega$ .

La relación entre derivaciones y antiderivaciones queda reflejada de manera clara en el siguiente resultado:

**Proposición 8.11**

- (1) Si  $D_1$  y  $D_2$  son derivaciones entonces  $[D_1, D_2]$  es una derivación de grado igual a la suma de los grados de  $D_1$  y  $D_2$ ;  
 (2) Si  $D$  es una derivación y  $A$  es una antiderivación, entonces  $[D, A]$  es una antiderivación;  
 (3) Si  $A_1$  y  $A_2$  son dos antiderivaciones, entonces  $A_1 A_2 + A_2 A_1$  es una derivación. Como consecuencia, si  $A$  es una antiderivación, entonces  $A^2$  es una derivación.

Sea  $T$  un operador sobre  $\wedge(M)$ , entonces  $T_U$  es un operador sobre  $\wedge(U)$ , siendo  $U$  un abierto de  $M$ . Se dice que  $T$  es local si  $(T\omega)|_U = T_U(\omega|_U)$ , para toda  $\omega \in \wedge(M)$ . Entonces demostramos que las derivaciones y antiderivaciones son locales, es decir:

**Proposición 8.12**

Si  $D$  es una derivación (antiderivación) sobre  $\wedge(M)$  y  $U \subset M$  es un abierto, entonces existe una única derivación (antiderivación)  $D_U$  sobre  $\wedge(U)$  tal que

$$D_U(\theta|_U) = (D\theta)|_U$$

para cualquier forma  $\theta$  sobre  $M$ .

Este resultado permite probar que si  $T$  es una derivación (o antiderivación) tal que  $T(f) = 0$  para toda función diferenciable  $f$  y  $T(\omega) = 0$  para toda una forma  $\omega$ , entonces  $T \equiv 0$ . Como consecuencia, si  $T_1$  y  $T_2$  son dos derivaciones (o antiderivaciones) que coinciden sobre las funciones diferenciables y sobre las una formas, entonces son iguales.

Para finalizar el capítulo introducimos dos antiderivaciones que están íntimamente relacionadas con la derivada de Lie: la diferencial exterior y el producto interior por un campo de vectores diferenciable.

**Proposición 8.13**

Existe una única antiderivación  $d$  de grado  $+1$  tal que:

- (1)  $d(f) = df$  (la diferencial ordinaria) para toda función diferenciable  $f$ .  
 (2)  $d^2 = 0$ .

$d$  se denomina la diferencial exterior.

**Proposición 8.14**

Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo de vectores diferenciable. La aplicación  $i_X : \wedge(M) \rightarrow \wedge(M)$  dada por

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$$

es una antiderivación de grado  $-1$ .  $i_X$  se denomina el producto interior por  $X$ .

Entre las igualdades más importantes que relacionan estos tres operadores están las siguientes:

**Proposición 8.15**

- (1)  $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$ ;
- (2)  $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X = di_X d$ ;
- (3)  $\mathcal{L}_X i_X = i_X \mathcal{L}_X$ ,
- (4)  $\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}$ ;

donde  $X$  e  $Y$  son campos de vectores diferenciables.

**3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS**

**A.8.1.** Sea  $\omega \in \wedge^p(M)$ ,  $p \geq 0$ . Para todo  $X_1, \dots, X_{p+1}$  campos de vectores, definimos para  $p > 0$ :

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) = & \\ & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) \\ & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}), \end{aligned}$$

y para  $p = 0$ :

$$(d\omega)(X) = X(\omega).$$

Prueba que  $d\omega \in \wedge^{p+1}(M)$ .  $d\omega$  es la diferencial exterior de  $\omega$ , y la aplicación  $d : \wedge(M) \rightarrow \wedge(M)$  es la diferencial exterior.

**A.8.2.** Prueba las siguientes propiedades de la diferencial exterior, utilizando la definición dada en el ejercicio anterior:

- (a) Si  $\omega, \theta \in \wedge^p(M)$  entonces  $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$ .
- (b)  $d^2 = 0$ .
- (c) Para formas diferenciales  $\omega \in \wedge^p(M)$ ,  $\theta \in \wedge^q(M)$  se satisface

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta).$$

**A.8.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $p \in M$  y  $U \subset M$  un entorno de  $p$ . Sea  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  una base de 1-formas. Supongamos que en  $U$  existe un conjunto de 1-formas diferenciales  $\omega_i^j$  satisfaciendo las condiciones siguientes:

$$\omega_i^j = -\omega_j^i, \quad d\omega^j = -\sum_{k=1}^n \omega_k^j \wedge \omega^k.$$

Entonces tal conjunto es único.

**A.8.4.** Establece las siguientes propiedades de la derivada de Lie:

- (a)  $\mathcal{L}_{aV+bW} = a\mathcal{L}_V + b\mathcal{L}_W$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$
- (b)  $[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] = \mathcal{L}_{[V,W]}$
- (c)  $\mathcal{L}_V(df) = d(Vf)$

**A.8.5.** Sea  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ . Expresa las coordenadas de la derivada de Lie  $\mathcal{L}_V A$ , respecto de un sistema de coordenadas, en función de las componentes de  $V$  y  $A$ .

**A.8.6.** Demuestra las siguientes igualdades entre la derivada de Lie  $\mathcal{L}$ , la diferencial exterior  $d$  y el producto interior  $i$ :

- (a)  $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$
- (b)  $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X = di_X d$
- (c)  $\mathcal{L}_X i_X = i_X \mathcal{L}_X$
- (d)  $\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X,Y]}$

**A.8.7.** Sea  $\varphi : M \rightarrow M'$  una aplicación diferenciable. Prueba:

- (a)  $\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta)$ , para  $\omega$  y  $\theta$  formas diferenciales.
- (b)  $\varphi^*$  conmuta con la diferencial exterior, es decir,  $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$ .

#### 4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK. *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

#### 5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

**E.8.1.** (a) Calcula  $\mathcal{L}_X T$ , donde

$$T = x \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx \otimes dy + y \frac{\partial}{\partial y} \otimes dy \otimes dy$$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

(b) Calcula  $\mathcal{L}_X T$ , donde

$$T = xy \frac{\partial}{\partial x} \otimes dx + y \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx + \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$$

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

**E.8.2.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$  definida por  $\phi(x, y) = (x^3 + y, y)$  y sea

$$T = x \frac{\partial}{\partial x} \otimes dx \otimes dy + y \frac{\partial}{\partial y} \otimes dy \otimes dy.$$

¿Cuál es la traza del producto interior de  $T$  con  $\frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ?

**E.8.3.** Para todo campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y todo tensor covariante  $A \in \mathcal{T}_s^0(M)$  se verifica

$$\mathcal{L}_X A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\psi_t^*(A) - A),$$

donde  $\{\psi_t\}$  es el flujo de  $X$ . Probarlo para  $s = 2$ . (Si el flujo es local, la ecuación anterior es válida localmente).



## 6. BIOGRAFÍA: ELIE CARTAN (1869-1951)

**Elie Joseph Cartan** (1869-1951) nació en Dolomieu (cerca de Chambéry), en la Saboya francesa, y murió en París, Francia. Trabajó en grupos continuos, álgebras de Lie, ecuaciones diferenciales y geometría, proporcionando sus trabajos una síntesis de estas áreas.

Cartan ingresó en la Escuela Normal en 1888 y obtuvo su doctorado en 1894. Fue profesor en las universidades de Montpellier (1894-1896), Lyon (1896-1903), Nancy (1903-1909) y París (1909-1940). Tuvo cuatro hijos, uno de ellos **Henri Cartan** (), que se convertiría también en un brillante matemático. Por contra, otros hijos murieron en trágicas circunstancias; Jean, compositor, murió a la edad de 25 años, mientras que Louis, físico, fue arrestado por los alemanes en 1942 y ejecutado después de 15 meses en cautividad.

Cartan se sumó brillantemente a la teoría de grupos continuos que había sido iniciada por **Marius Sophus Lie** (1842-1899). Su tesis doctoral (1894) puede considerarse una contribución de importancia capital a las álgebras de Lie, y en ella completa la clasificación de las álgebras semisimples que **Killing** había prácticamente encontrado. Posteriormente se volcó en la teoría de las álgebras asociativas e investigó la estructura de estas álgebras sobre los cuerpos de los números reales y complejos. **Wedderburn** completaría el trabajo de Cartan en este área.

Las representaciones de los grupos de Lie semisimples también atrajeron su atención. Su trabajo es una síntesis asombrosa de teoría de Lie, geometría clásica, geometría diferencial y topología, que se encuentra a lo largo de toda la obra de Cartan. Asimismo, Cartan aplicó el álgebra de Grassmann a la teoría de las formas diferenciales exteriores.

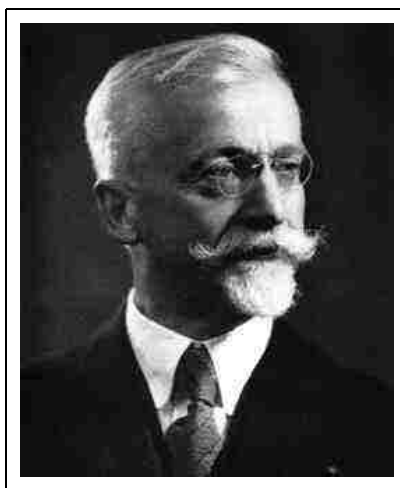


Figura 8.1: Elie Cartan

Hacia 1904, Cartan se vuelca en el estudio de las ecuaciones diferenciales, y desde 1916 su investigación está centrada en la geometría diferencial, área en la que publica la mayoría de sus trabajos. El Programa de Erlangen de **Felix Klein** (1849-1925) había sido considerado inadecuado para describir la geometría por **Hermann Weyl** (1885-1955) y **Oswald Veblen** (1880-1960), y en este apartado Cartan jugaría un papel destacado. Examinó las acciones de los grupos de Lie de transformaciones sobre un espacio, desarrollando la teoría de las referencias móviles, que generalizaban la teoría cinemática de **Jean G. Darboux** (1842-1917).

Cartan contribuyó a la geometría con su teoría de los espacios simétricos, que tiene su origen en los artículos publicados en 1926, donde desarrolla las ideas estudiadas anteriormente por **William K. Clifford** (1845-1879) y **Arthur Cayley** (1821-1895), y usa los métodos topológicos desarrollados por Weyl en 1925. Estos trabajos serían completados en 1932.

Cartan examinó después varios problemas que previamente habían sido estudiados por **Henri Poincaré** (1854-1912). Por esta época, su hijo Henri Cartan realizaba contribuciones importantes a las matemáticas, y Elie Cartan utilizó muchos de sus teoremas en sus investigaciones. Cartan también publicó varios trabajos sobre la teoría de la relatividad y de los espinores. Sin duda alguna, Cartan puede considerarse como uno de los matemáticos más importantes e influyentes de la primera mitad del siglo XX.

### Bibliografía

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company, 1995.

Internet. URL de la página:

[www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Cartan.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Cartan.html)

### Bibliografía complementaria

*Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).

#### Libros:

M.A. Akivis y B. Rosenfeld *Elie Cartan (1869-1951)* (Providence R.I., 1993).

S.S. Chern y C. Chevalley *Elie Cartan*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952).

R. Debever (ed.) *Elie Cartan-Albert Einstein : letters on absolute parallelism, 1929-1932* (Princeton, 1979).

J.H.C. Whitehead *Elie Cartan*, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London 8 (1952).

#### Artículos:

J. Dieudonné *Les travaux de Elie Cartan sur les groupes et algèbres de Lie, Elie Cartan, 1869-1951* (homenaje de l'Acad. République Socialiste de Roumanie con ocasión del centenario de su nacimiento) (Bucharest, 1975), 29-31.

W.V.D. Hodge *Obituary: Elie Cartan*, J. London Math. Soc. 28 (1953), 115-119.

M. Javillier *Notice nécrologique sur Elie Cartan (1869-1951)*, C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 1735-1791.

A. Lichnerowicz *Elie Cartan, 1869-1951* (homenaje de l'Acad. République Socialiste de Roumanie con ocasión del centenario de su nacimiento) (Bucharest, 1975), 29-31. (Bucharest, 1975), 21-28.

S-S. Chern y C. Chevalley *Obituary: Elie Cartan and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 217-250.

## 7. BIOGRAFÍA: TULLIO LEVI-CIVITA (1873-1941)

**Tullio Levi-Civita** (1873-1941) nació el 29 de marzo en Padua, provincia de Veneto (Italia) y murió el 29 de diciembre en Roma. Su nombre está indisolublemente asociado a sus trabajos sobre el cálculo diferencial absoluto, con sus aplicaciones en la teoría de la relatividad.

Levi-Civita se graduó en la Universidad de Padua, siendo uno de sus profesores **Gregorio Ricci** (1853-1925), con quien Levi-Civita colaboró en diversos trabajos de investigación.

Levi-Civita fue seleccionado para ocupar la Cátedra de Mecánica de Padua en 1898, un puesto donde estuvo durante veinte años. En 1918 abandonó Padua y se trasladó a Roma, donde también ocupó la Cátedra de Mecánica durante veinte años, hasta que fue cesado por la política discriminatoria del gobierno, ya que era descendiente de judíos.

La formación en matemáticas puras de Levi-Civita era extensa, su intuición geométrica era particularmente excelente, e hizo buen uso de ella en diversos problemas de matemáticas aplicadas. En uno de sus trabajos de 1895 Levi-Civita mejoraba la fórmula integral de **B. Riemann** (1826-1866) para el número de primos pertenecientes a un intervalo dado.



Figura 8.2: Imagen de T. Levi-Civita en los años 20

Sin embargo, Levi-Civita es más conocido por sus trabajos en el cálculo diferencial absoluto con sus aplicaciones a la teoría de la relatividad. En 1887 publicó un famoso artículo en el que desarrollaba el cálculo de tensores, siguiendo el trabajo de **E.B. Christoffel** (1829-1900), incluyendo la diferenciación covariante. En 1900 publicó, conjuntamente con Ricci, la teoría de tensores *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (*Métodos de cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones*), que quince años después sería utilizada hábilmente por **A. Einstein**.

**Hermann Weyl** (1885-1955) profundizó en las ideas de Levi-Civita y construyó una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo. El trabajo de Levi-Civita es, sin duda alguna, de una importancia capital en la teoría de la relatividad, y entre su producción científica merecen ser destacados los artículos sobre los campos gravitacionales estáticos, los cuales desarrolla de una forma elegante e ingeniosa.

Otro de los tópicos estudiados por Levi-Civita es la dinámica analítica, dedicando numerosos

artículos al estudio del *problema de los tres cuerpos*. También escribió sobre hidrodinámica y sobre la teoría de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Se sumó a la teoría de **A.L. Cauchy** (1789-1857) y **S. Kovalevskaya** (1850-1891), escribiendo un excelente libro sobre este tema en 1931. Posteriormente, en 1933, Levi-Civita contribuyó de forma importante a las ecuaciones de **P.A.M. Dirac** (1902-1984) que aparecen en la teoría cuántica.



Figura 8.3: Imagen de T. Levi-Civita en los años 30

La Sociedad Real de Edimburgo le concedió la medalla de **Sylvester** en 1922, y en 1930 fue elegido miembro extranjero de la misma. Asimismo, fue miembro honorario de la Sociedad Matemática de Londres, la Real Sociedad de Edimburgo y la Sociedad Matemática de Edimburgo.

Levi-Civita, como **Volterra** y muchos otros científicos italianos, se opuso dura y activamente al fascismo. Después de ser apartado de su puesto en la Universidad de Roma, su salud empeoró rápidamente, su corazón mostró síntomas de gran debilidad, muriendo finalmente de un derrame cerebral.

### Bibliografía

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company, 1995.

Internet. URL de la página:

[www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Levi-Civita.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Levi-Civita.html)

### Bibliografía complementaria

*Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).

### Artículos:

C. Agostinelli *Nel centenario della nascita di Tullio Levi-Civita*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 108 (1974), 13-37.

U. Amaldi *Commemorazione del socio Tullio Levi-Civita*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 1 (1946), 1130-1155.

- A. Buhl *Obituary: Tullio Levi-Civita, 1873-1941*, Enseignement Math. 38 (1942), 350-351.
- E. Cartan *Notice sur M Tullio Levi-Civita*, C. R. Acad. Sci. Paris 215 (1942), 233-235.
- L. Dell'Aglio y G. Israel *The themes of stability and qualitative analysis in the works of Levi-Civita and Volterra (Italian)*, Italian mathematics between the two world wars (Bologna, 1987), 125-141.
- A. Einstein *Tullio Levi-Civita*, Annuario della Pontificia Accademia delle Scienze 1 (1936-37), 496-511.
- D. Galletto *Tullio Levi-Civita (1873-1941)*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 8 (1973), 373-390.
- W.V.D. Hodge *Obituary: Tullio Levi-Civita*, J. London Math. Soc. 18 (1943), 107-114.
- W.V.D. Hodge *Obituary: Tullio Levi-Civita. 1873-1941*, Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London 4 (1942), 151-165.
- G. Krall *Tullio Levi-Civita nella meccanica del suo tempo*, Civiltà delle Macchine 1 (4) (1953), 33-37.
- G. Krall *Tullio Levi-Civita e la relatività*, Civiltà delle Macchine 1 (6) (1953), 42-48.
- B. Levi *Obituary: Tullio Levi-Civita (1873-1941) (Spanish)*, Math. Notae 2 (1942), 155-159.
- A. Masotti *Bibliografie di Tullio Levi-Civita e Vito Volterra*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 17 (1946), 16-61.
- M. Montagnana *Tullio Levi-Civita nel centenario della nascita*, Archimede 25 (1973), 318-322.
- L. Roth *Tullio Levi-Civita*, Nature 149 (1942), 266.
- H.S. Ruse *Obituary: Tullio Levi-Civita*, Edinburgh Math. Notes 1943 33 (1943), 19-24.
- C. Somigliana *Obituary: Tullio Levi-Civita e Vito Volterra*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 17 (1946), 1-15.

