

## CAPÍTULO 7 CAMPOS DE TENSORES

### 1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Uno forma
- La diferencial de una aplicación diferenciable
- Campo tensorial
- Tensor covariante
- Tensor contravariante
- Operaciones tensoriales
- El producto tensorial
- Componentes tensoriales
- La contracción (1,1)
- El pullback de una aplicación
- El pushforward de una aplicación
- Las formas diferenciales
- Los operadores simetrización y antisimetrización
- El producto exterior

### 2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

Los tensores sobre una variedad diferenciable son a los tensores sobre un espacio vectorial (las aplicaciones multilineales) lo que un campo de vectores es a un vector tangente. Así pues, comenzamos la lección recordando lo que se entiende por un tensor sobre un espacio vectorial, que tiene como casos particulares y distinguidos a los covectores y las formas bilineales. Tras esta introducción algebraica, se definen las uno formas sobre una variedad  $M$ .

#### 2.1. Definiciones y resultados básicos

##### Definición 7.1

Una  $1$ -forma  $\theta$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asigna a cada punto  $p \in M$  un covector  $\theta_p \in T_p^*M$ .

En otras palabras, si  $\pi^* : TM^* \rightarrow M$  es la proyección canónica del fibrado cotangente en  $M$ , entonces una 1-forma es una aplicación  $\theta : M \rightarrow TM^*$  tal que  $\pi^* \circ \theta = 1_M$ . La 1-forma se dice *diferenciable* si es una aplicación diferenciable de  $M$  en  $TM^*$ . El conjunto de las 1-formas diferenciables será denotado por  $\mathfrak{X}^*(M)$ .

Por otra parte, toda 1-forma puede interpretarse, de una manera natural, como una aplicación entre el conjunto de los campos de vectores diferenciables  $\mathfrak{X}(M)$  y el conjunto de las funciones continuas, lo que nos conduce a caracterizar las 1-formas diferenciables  $\theta$  como aquellas para las que  $\theta(X)$  es una función diferenciable, siempre que  $X$  sea un campo de vectores diferenciable. Es decir:

**Proposición 7.2**

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una 1-forma  $\theta$  es diferenciable si, y sólo si,  $\theta(X) \in C^\infty(M)$  para todo campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

En el conjunto de las 1-formas diferenciables sobre  $M$  podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:

**Suma:** Si  $\theta, \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$  entonces  $\theta + \omega : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  está definida por

$$(\theta + \omega)(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\theta + \omega)(X)(p) = \theta_p(X_p) + \omega_p(X_p)$$

**Producto:** Si  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$  entonces  $f\theta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  está definida por

$$(f\theta)(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f\theta)(X)(p) = f(p)\theta_p(X_p)$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto  $\mathfrak{X}^*(M)$  admite estructura de módulo sobre el anillo  $C^\infty(M)$  de las funciones diferenciables.

Entre los covectores tangentes existen unos que son especiales, y son aquellos que provienen de una función diferenciable. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $p$  es un punto de  $M$ , podemos pensar en la aplicación diferencial  $df_p$  como un covector en  $p$ , después de hacer la natural identificación entre el espacio tangente  $T_{f(p)}\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}$ . Esta interpretación nos permite considerar la 1-forma  $df$ , que a cada punto  $p$  le asocia la aplicación diferencial  $df_p$ , y que se denomina la diferencial de  $f$ . El siguiente resultado se demuestra con facilidad.

**Proposición 7.3**

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $f \in C^\infty(M)$  una función diferenciable. Entonces  $df$  es una 1-forma diferenciable.

Sea  $(U, x)$  un sistema de coordenadas y consideremos  $\theta$  una 1-forma diferenciable. Es fácil ver que, en el abierto  $U$ , se tiene la siguiente igualdad:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) dx_i$$

Por tanto, las componentes de  $\theta$  son las funciones  $\theta_i = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ . En particular, la diferencial de una función diferenciable  $f$  puede escribirse como

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Esta manera de construir 1-formas nos conduce a definir una aplicación  $d$  entre las funciones diferenciables  $\mathcal{C}^\infty(M)$  y las 1-formas diferenciables  $\mathfrak{X}^*(M)$ , denominada la aplicación diferencial y que posee interesantes propiedades:

**Proposición 7.4**

- (1)  $d : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.
- (2) Si  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , entonces  $d(fg) = gdf + fdg$ .
- (3) Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  y  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  entonces  $d(h(f)) = h'(f)df$ .

**2.2. Los campos tensoriales**

Introducimos a continuación los campos tensoriales de tipo  $(r, s)$  sobre una variedad  $M$  como las aplicaciones  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineales de  $\mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s$  en  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . Cuando  $r = 0$  se tienen los tensores covariantes de orden  $s$  y en el caso  $s = 0$  aparecen los tensores contravariantes de orden  $r$ . Más explícitamente:

**Definición 7.5**

- (1) Un *campo tensorial*  $A$  de tipo  $(r, s)$  sobre una variedad  $M$  es una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineal  $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ . Diremos que  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ .
- (2) Un *campo tensorial covariante* de orden  $s$  sobre una variedad  $M$  es una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineal  $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ .
- (3) Un *campo tensorial contravariante* de orden  $r$  sobre una variedad  $M$  es una aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineal  $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ .

**Ejemplo 7.6**

- (1) Sea la aplicación  $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  dada por  $E(\theta, X) = \theta(X)$ . Es fácil ver que  $E$  es un tensor de tipo  $(1,1)$ .
- (2) Toda 1-forma  $\theta$  puede considerarse un tensor de tipo  $(0,1)$ .
- (3) Todo campo de vectores diferenciable puede interpretarse como un tensor de tipo  $(1,0)$ , considerando  $X : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  definido por  $X(\theta) = \theta(X)$ .
- (4) Sea una 1-forma no nula  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$  y definamos  $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  por  $F(X, Y) = X(\theta(Y))$ . Entonces es fácil ver que  $F$  no es un tensor (falla la  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linealidad en la segunda variable).

Cuando disponemos de varios tensores los podemos operar de diversas maneras. Las operaciones disponibles son las siguientes:

**Suma:** Sean  $A, B \in \mathcal{T}_s^r(M)$ , entonces  $A + B : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  se define como sigue:

$$(A + B)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) + B(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

Es fácil ver que  $A + B \in \mathcal{T}_s^r(M)$ .

**Producto por funciones:** Sea  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Definimos  $fA : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  por

$$(fA)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = f \cdot A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

**Producto:** Mientras que sólo se pueden sumar dos tensores del mismo tipo, podemos realizar el producto de dos tensores de cualquier tipo. Sean  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y  $B \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$ . Definimos  $A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  por

$$(A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \cdot B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'})$$

Es fácil probar que  $A \otimes B \in \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'}(M)$ . La operación  $\otimes$  se denomina *producto tensorial*.

Como toda función diferenciable  $f$  puede considerarse un tensor de tipo  $(0,0)$ , entonces si  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  se tiene que

$$f \otimes A = A \otimes f = fA$$

Finalizamos este apartado con el siguiente resultado, cuya demostración es un mero ejercicio de manipulación algebraica.

### Proposición 7.7

- (1) El producto tensorial  $\otimes$  es  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineal.
- (2) El producto tensorial  $\otimes$  es asociativo y no conmutativo.
- (3) Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y  $B \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$ , entonces se satisface que

$$f(A \otimes B) = (fA) \otimes B = A \otimes (fB)$$

## 2.3. Tensores en un punto

Si  $V$  es un espacio vectorial y  $V^*$  denota el espacio vectorial dual, entonces los tensores de tipo  $(r, s)$  sobre  $V$  son las aplicaciones multilineales  $t : V^{*r} \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$ . En esta sección vamos a probar que todo campo tensorial sobre una variedad diferenciable  $M$  puede interpretarse como una aplicación que asigna a cada punto  $p$  de  $M$  un tensor en su espacio tangente.

Dado un espacio vectorial  $V$ , denotamos por  $T_s^r V$  el conjunto de las aplicaciones multilineales de tipo  $(r, s)$  definidas anteriormente. Es fácil ver que  $T_s^r V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n^{r+s}$ , siendo  $n$  la dimensión de  $V$ . Consideremos ahora  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, y definamos el siguiente conjunto:

$$T_s^r M = \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_p M) \equiv \{(p, t) : p \in M, t \in T_s^r(T_p M)\}$$

No es difícil probar el siguiente resultado.

### Proposición 7.8

El conjunto  $T_s^r M$  admite estructura de variedad diferenciable de dimensión  $n+n^{r+s}$ . Con esta estructura diferenciable,  $T_s^r M$  se denomina el *fibrado tensorial de tipo  $(r, s)$  sobre  $M$* .

Como casos particulares se obtienen los fibrados tangente  $TM$  y cotangente  $T^*M$ .

**Lema 7.9**

Sea  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ . Si cualquiera de las uno formas  $\theta^i$  o de los campos  $X_j$  es igual a cero en un punto  $p \in M$ , entonces

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$$

Como consecuencia de este lema es fácil deducir la siguiente propiedad.

**Proposición 7.10**

Sea  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ . Sean  $2r$  uno formas  $\theta^i, \omega^i, i = 1, \dots, r$ , y  $2s$  campo de vectores  $X_j, Y_j, i = 1, \dots, s$ , tales que  $\theta^i(p) = \omega^i(p)$  y  $X_j(p) = Y_j(p)$  para un punto  $p \in M$ . Entonces

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = A(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)(p)$$

En virtud de este resultado, si  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  podemos definir para cada punto  $p$  de  $M$  una aplicación multilinear  $A_p \in \mathcal{T}_s^r(T_pM)$ . En efecto, si  $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in T_p^*M$  y  $v_1, \dots, v_s \in T_pM$ , se define la aplicación  $A_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \rightarrow \mathbb{R}$  por la siguiente fórmula:

$$A_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p)$$

donde las uno formas  $\theta^i$  y los campos  $X_j$  son extensiones globales de los covectores  $\alpha^i$  y de los vectores  $v_j$ , respectivamente. Pero, ¿cómo podemos construir tales extensiones?

Sea  $(U, x)$  un entorno coordenado de  $M$  conteniendo al punto  $p$ . Si  $v \in T_pM$ , entonces

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

para ciertas constantes  $a_i$ . Consideremos el campo  $X' \in \mathfrak{X}(U)$  definido por

$$X' = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Sea  $f \in C^\infty(M)$  una función salto en  $p$  con soporte contenido en  $U$ . Entonces podemos definir una extensión global  $X \in \mathfrak{X}(M)$  del vector  $v$  como sigue:

$$X(q) = \begin{cases} f(q)X'_q & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{si } q \notin \text{sop}(f) \end{cases}$$

De manera totalmente análoga se puede extender un covector  $\alpha \in T_p^*M$  a una uno forma  $\theta$ .

Ahora podemos interpretar un tensor  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  como una aplicación diferenciable  $A : M \rightarrow T_s^r M$  tal que  $\pi_s^r \circ A = 1$ , donde  $\pi_s^r : T_s^r M \rightarrow M$  denota la proyección canónica del fibrado tensorial de tipo  $(r, s)$  sobre la variedad diferenciable  $M$ .

## 2.4. Las componentes tensoriales

Hemos visto en la sección anterior cómo se expresan localmente los tensores sobre una variedad, lo cual nos va a permitir generalizar a campos tensoriales las ecuaciones que nos daban las componentes de un campo de vectores o de una 1-forma en función de las bases canónicas asociadas a un sistema de coordenadas. Surgen, de este modo, las componentes tensoriales, que identifican unívocamente el campo tensorial del que proceden y permiten dar, al mismo tiempo, la interpretación clásica de los tensores en coordenadas.

### Definición 7.11

Sea  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y  $(U, x)$  un sistema de coordenadas en  $M$ . Las *componentes* de  $A$  respecto de  $(U, x)$  son las funciones

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A \left( dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \right)$$

con todos los índices variando de 1 a  $n$ .

A continuación, y con el fin de relacionar el concepto de tensor con el clásico por coordenadas, conviene indicar cómo son operados los tensores en coordenadas, y así se calcularán las componentes del tensor suma, del tensor producto tensorial y del tensor producto por una función diferenciable.

### Proposición 7.12

Sean  $A$  y  $B$  tensores sobre  $M$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Entonces:

- (1)  $(A + B)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + B_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ .
- (2)  $(fA)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = f A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ .
- (3)  $(A \otimes B)_{j_1 \dots j_{s+s'}}^{i_1 \dots i_{r+r'}} = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} B_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}}^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}}$

Como consecuencia de la definición de componentes de un tensor se tiene la siguiente propiedad, que afirma que los campos tensoriales conmutan con la restricción a abiertos.

### Proposición 7.13

Sea  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y  $(U, x)$  un sistema de coordenadas en  $M$ . Entonces, en los puntos de  $U$ , se satisface lo siguiente:

$$A = \sum A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

donde cada índice va sumado de 1 a  $n$ .

## 2.5. La contracción de un tensor

No obstante, una de las operaciones más destacables que podemos hacer con los tensores es la contracción, la cual transforma tensores de orden  $(r, s)$  en tensores de orden  $(r - 1, s - 1)$ , y cuya definición general deriva del caso especial denominado contracción  $(1, 1)$ , que transforma tensores de ese orden en funciones diferenciables.

**Lema 7.14**

Existe una única función  $C^\infty(M)$ -lineal  $C : \mathcal{T}_1^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , denominada contracción (1,1), tal que  $C(X \otimes \theta) = \theta(X)$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ .

Generalicemos ahora la aplicación contracción para tensores arbitrarios. Sea  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y consideremos dos índices  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq s$ . Se define  $C_j^i A \in \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(M)$  como sigue:

$$(C_j^i A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = C\{A(\theta^1, \dots, \bullet, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, \bullet, \dots, X_{s-1})\}$$

donde  $A(\theta^1, \dots, \bullet, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, \bullet, \dots, X_{s-1})$  es el tensor de tipo (1,1) definido por

$$(\theta, X) \rightarrow A(\theta^1, \dots, \theta, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X, \dots, X_{s-1})$$

**Proposición 7.15**

Sea  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq s$  y  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ . Si las componentes de  $A$  relativas a un sistema de coordenadas son  $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ , entonces las componentes de  $C_j^i A$  son

$$(C_j^i A)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} \sum_m A_{j_1 \dots m \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots m \dots i_{r-1}}$$

Si pensamos en un tensor  $A$  de tipo (1, 1) como una correspondencia que a cada punto  $p$  le asigna un operador lineal  $A_p$  sobre  $T_p M$ , entonces la contracción (1, 1) sobre  $A$  es la función diferenciable que a cada punto le asocia la traza del operador  $A_p$ .

**2.6. El pullback de una aplicación**

Un hecho básico de los covectores y las uno formas, que se generaliza a cualquier tensor de orden covariante  $s > 0$ , es que cualquier aplicación lineal entre espacios vectoriales  $V$  y  $W$  induce una aplicación lineal entre los espacios  $\mathcal{T}_s^0(V)$  y  $\mathcal{T}_s^0(W)$ . En exacta analogía, cualquier aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$  entre dos variedades diferenciables induce una aplicación  $f^* : \mathcal{T}_s^0(N) \rightarrow \mathcal{T}_s^0(M)$  que a cada tensor  $A$  sobre  $N$  le asigna un tensor del mismo orden sobre  $M$ ,  $f^*(A)$ , que se denomina el pullback de  $A$  mediante  $f$ .

**Definición 7.16**

Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable y  $A \in \mathcal{T}_s^0(N)$ ,  $s \geq 1$ . Pongamos

$$(f^* A)_p(v_1, \dots, v_s) = A_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_s))$$

para todo punto  $p \in M$ ,  $v_i \in T_p M$ . Entonces  $f^* A \in \mathcal{T}_s^0(M)$  y se denomina el pullback de  $A$  mediante  $f$ .

Así pues, fijada una aplicación diferenciable  $f$ , la correspondencia que a cada tensor le asocia su pullback mediante  $f$  permite definir la operación pullback, la cual posee unas propiedades interesantes, entre las que podemos destacar las siguientes. En primer lugar, el pullback es  $\mathbb{R}$ -lineal y se comporta de manera natural respecto a los productos tensoriales, es decir,  $f^*(A \otimes B) = f^*(A) \otimes f^*(B)$ . En segundo lugar, el pullback conserva la composición de aplicaciones, ya que si  $g$  es otra aplicación entre variedades, entonces  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  (véase las Actividades de Aplicación).

Para tensores covariantes (o contravariantes) de orden al menos 2, pueden definirse unas subclases especiales que juegan un papel destacado en el cálculo tensorial. Nos estamos refiriendo, como es natural, a los tensores simétricos y a los tensores antisimétricos o alternados. Un tensor es simétrico si la trasposición de cualesquiera dos de sus argumentos deja inalterado su valor, y es antisimétrico si cada trasposición de argumentos produce un cambio de signo. Más precisamente,

**Definición 7.17**

Sea  $A \in \mathcal{T}_s^0(M)$  y  $\sigma$  una permutación de orden  $s$  con signatura  $\varepsilon_\sigma$ ,  $s \geq 2$ .

(1)  $A$  es *simétrico* si  $A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}) = A(X_1, \dots, X_s)$ .

(2)  $A$  es *antisimétrico* si  $A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}) = \varepsilon_\sigma A(X_1, \dots, X_s)$ .

En este sentido, otras de las propiedades fundamentales de la operación pullback es que aplica tensores simétricos (respectivamente, antisimétricos) en tensores simétricos (respectivamente, antisimétricos).

Una operación de propiedades similares al pullback es el pushforward de un tensor mediante una aplicación  $f : M \rightarrow N$ , a la cual hay que exigirle en este caso que sea un difeomorfismo. Esta operación traslada tensores sobre  $M$  en tensores sobre  $N$  del mismo tipo, y permite construir una operación  $f_*$  que es un isomorfismo lineal. La operación pushforward satisface unas propiedades similares al pullback, ya que es natural respecto al producto tensorial, es decir,  $f_*(A \otimes B) = f_*(A) \otimes f_*(B)$ , y conserva la composición, pues si  $g$  es otro difeomorfismo entonces  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  (véase las Actividades de Aplicación).

## 2.7. Las formas diferenciales: El producto exterior

Una clase especial de tensores son las formas diferenciales definidas en un abierto de una variedad; éstas no son más que tensores covariantes antisimétricos.

**Definición 7.18**

Una forma diferencial de grado  $s$  (abreviadamente, una  $s$ -forma diferencial) sobre una variedad  $M$  (respectivamente, sobre un abierto  $U$ ) es un tensor covariante antisimétrico de tipo  $(0, s)$  sobre  $M$  (respectivamente, sobre  $U$ ). El conjunto de las  $s$ -formas diferenciales sobre  $M$  se denota por  $\bigwedge^s(M)$ , y el conjunto  $\bigwedge(M)$  denotará el conjunto de todas las formas diferenciales sobre  $M$ , es decir,  $\bigwedge(M) = \bigcup_{s \geq 0} \bigwedge^s(M)$ .

Si denotamos por  $\Sigma^s(M)$  el subespacio de  $\mathcal{T}_s^0(M)$  formado por los tensores simétricos, entonces existe otro subespacio, que podemos denotar por  $R^s(M)$ , tal que  $\mathcal{T}_s^0(M) = \Sigma^s(M) \oplus \bigwedge^s(M) \oplus R^s(M)$ , lo que nos permitirá obtener tensores simétricos y/o antisimétricos a partir de tensores dados.

**Ejemplo 7.19**

Sea  $M = \mathbb{R}^2$  y consideremos el tensor  $A \in \mathcal{T}_2^0(M)$  definido como sigue:

$$A(X, Y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

donde  $X = x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2$  e  $Y = y_1 \partial_1 + y_2 \partial_2$ . Es fácil probar que  $A \in \bigwedge^2(M)$ .

### 2.7.1. Los operadores simetrización y antisimetrización

Definimos entonces dos operadores sobre  $\mathcal{T}_s^0(M)$  denominados simetrización  $\mathcal{S}$  y antisimetrización  $\mathcal{A}$ , los cuales asocian a cada tensor  $T$  los tensores

$$\mathcal{S}(T) = \sum_{\sigma} T_{\sigma}$$

y

$$\mathcal{A}(T) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} T_{\sigma},$$

donde  $\sigma$  recorre el conjunto de las permutaciones de  $s$  letras,  $\varepsilon_{\sigma}$  es la signatura de  $\sigma$  y  $T_{\sigma}$  es esencialmente el tensor  $T$  cuando se han modificado sus argumentos por la acción de la permutación:  $T_{\sigma}(X_1, \dots, X_s) = T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)})$

Los operadores simetrización  $\mathcal{S}$  y antisimetrización  $\mathcal{A}$  poseen interesantes propiedades entre las que destacan las siguientes. En primer lugar,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{S}$  son proyecciones, esto es,  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$  y  $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$ . En segundo lugar, la imagen de  $\mathcal{A}$  son las formas diferenciales y la imagen de  $\mathcal{S}$  los tensores covariantes simétricos, lo cual nos permite caracterizar a los tensores simétricos como aquellos que  $\mathcal{S}T = s!T$ , y a los antisimétricos como los que satisfacen  $\mathcal{A}T = s!T$ .

### 2.7.2. El producto exterior

No es difícil probar que el producto tensorial de dos formas diferenciales no es, en general, una forma diferencial. Sin embargo, como sabemos que cada tensor determina, bajo la acción del operador  $\mathcal{A}$ , un tensor antisimétrico, podemos definir otra multiplicación para las formas diferenciales que es extraordinariamente útil. Se trata lógicamente del producto exterior  $\wedge$  de formas diferenciales, que a dos formas de grado  $r$  y  $s$  le asocia otra forma diferencial de grado  $r + s$ .

#### Definición 7.20

Sean  $\omega \in \wedge^r(M)$ ,  $\theta \in \wedge^s(M)$ . Definimos  $\omega \wedge \theta$  por la fórmula

$$(\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \theta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}),$$

donde  $\sigma$  recorre las permutaciones de  $r + s$  letras. Entonces  $\omega \wedge \theta \in \wedge^{r+s}(M)$  y se denomina el producto exterior de  $\omega$  y  $\theta$ .

El producto exterior es una operación bilineal, asociativa y, en general, no conmutativa verificando la siguiente propiedad

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha,$$

donde  $r$  y  $s$  son los grados de las formas  $\alpha$  y  $\beta$ .

El producto exterior nos permite generar cualquier forma diferencial, de cualquier grado, a partir de las formas diferenciales de grado uno (las uno formas). En efecto, si  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  es una referencia local de uno formas sobre una variedad diferenciable  $M$  (o sobre un abierto  $U$  de la misma) entonces el conjunto  $\{\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_s}\}$ , con todos los índices variando desde 1 hasta  $n$ , tales que  $i_1 < \dots < i_s$ , constituye una base para  $\wedge^s(M)$  (ó  $\wedge^s(U)$ , respectivamente).

### 3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

**A.7.1.** (a) Prueba que existe un  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -isomorfismo entre  $\mathfrak{X}^*(M)$  y  $\mathcal{T}_1^0(M)$ , donde  $\mathfrak{X}^*(M)$  denota el módulo dual de  $\mathfrak{X}(M)$ .

(b) Prueba que existe un  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -isomorfismo entre  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\mathcal{T}_0^1(M)$ .

(c) Deduce que  $\mathfrak{X}(M)$  se identifica con su módulo bidual.

**A.7.2.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable.

(a) Si  $i : M \rightarrow M$  es la identidad, entonces  $i^*$  es la identidad sobre  $\mathcal{T}_s^0(M)$ .

(b) Para tensores covariantes  $A$  y  $B$  de tipo  $(0, s)$  y  $(0, t)$ , respectivamente, se verifica:

$$F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B).$$

(c) Si  $G : N \rightarrow P$  es también una aplicación diferenciable:

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : \mathcal{T}_s^0(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^0(M),$$

para todo  $s \geq 0$ .

**A.7.3.** Sea  $F : M \rightarrow N$  un difeomorfismo.

(a) Entonces cada campo tensorial  $\Phi \in \mathcal{T}_s^r(M)$  determina un campo tensorial  $F_*\Phi \in \mathcal{T}_s^r(N)$ , llamado el *pushforward* de  $\Phi$  mediante  $F$ , por la fórmula

$$(F_*\Phi)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = \Phi_{F^{-1}(p)}(F_p^*(\omega_p^1), \dots, F_p^*(\omega_p^r), dF_p^{-1}(X_{1p}), \dots, dF_p^{-1}(X_{sp})),$$

donde  $F_p^*$  denota la aplicación transpuesta de  $dF_p$ , es decir,  $F_p^* : T_p N^* \rightarrow T_{F^{-1}(p)} M^*$ ,  $F_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_{F^{-1}(p)}(v))$ ,  $v \in T_{F^{-1}(p)} M$ ,  $\omega \in T_p N^*$ .

(b) Si  $i : M \rightarrow M$  es la identidad, entonces  $i_*$  es la identidad de  $\mathcal{T}_s^r(M)$ .

(c) Si  $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$  y  $B \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$ , entonces

$$F_*(A \otimes B) = F_*(A) \otimes F_*(B).$$

(d) Si  $G : N \rightarrow P$  es también un difeomorfismo, entonces

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

**A.7.4.** Sea  $A$  un campo tensorial de tipo  $(1, 2)$ . Sean  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\eta = (y_1, \dots, y_n)$  sistemas coordenados sobre  $U \subset M$ . Prueba que las componentes de  $A$  relativas a  $\eta$  están determinadas como sigue por las componentes de  $A$  relativas a  $\xi$ :

$$\eta A_{ab}^c = \sum_{i,j,k} \frac{\partial y_c}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_a} \frac{\partial x_j}{\partial y_b} \xi A_{ij}^k.$$

**A.7.5.** Sea  $x$  la carta identidad de  $\mathbb{R}^n$  y consideremos el tensor de tipo  $(0, 2)$   $g : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  definido por

$$\begin{aligned} g(X, Y) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow g(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) b_i(p) \end{aligned}$$

$$\text{donde } X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

- (a) Verifica que  $g$  es, efectivamente, un tensor de tipo  $(0,2)$ .  
 (b) Obten las componentes de  $g$  relativas a  $x$ .  
 (c) Sea  $y = (y_1, \dots, y_n)$  definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_1 + \dots + x_n \end{aligned}$$

Prueba que  $y$  es una carta de  $\mathbb{R}^n$  y calcula las componentes de  $g$  relativas a  $y$ .

**A.7.6.** Sea  $\phi : M^m \rightarrow N^n$  una aplicación diferenciable que aplica el sistema coordenado  $\xi = (x_1, \dots, x_m)$  en un sistema coordenado  $\eta = (y_1, \dots, y_n)$  en  $N$ . Si  $B$  es un campo tensorial covariante, de tipo  $(0,2)$ , prueba que sobre el entorno coordenado de  $\xi$  se satisface:

$$(\phi^* B) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{a,b=1}^n \frac{\partial(y_a \circ \phi)}{\partial x_i} \frac{\partial(y_b \circ \phi)}{\partial x_j} B \left( \frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial y_b} \right) \circ \phi$$

**A.7.7.** Sea  $\varphi$  una aplicación  $p$ -lineal y  $\sigma \in S_p$  una permutación de orden  $p$ . Se define

$$(\sigma\varphi)(v_1, \dots, v_p) = \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}), \quad v_1, \dots, v_p \in V.$$

Prueba las siguientes afirmaciones:

- (a)  $\varphi$  es simétrica (resp. antisimétrica) si, y sólo si, para todo  $u_1, \dots, u_p \in V$ ,  $1 \leq i < k \leq p$ , es :

$$\begin{aligned} \varphi(\dots, u_i, \dots, u_k, \dots) &= \varphi(\dots, u_k, \dots, u_i, \dots) \\ (\text{resp. } \varphi(\dots, u_i, \dots, u_k, \dots) &= -\varphi(\dots, u_k, \dots, u_i, \dots)). \end{aligned}$$

- (b)  $\varphi$  es antisimétrica si, y sólo si, para todo  $(u_1, \dots, u_p)$  con  $u_i = u_j$  para algún  $i \neq j$ , es  $\varphi(u_1, \dots, u_p) = 0$ .  
 (c) Sea  $\wedge^p V^*$  el espacio de todas las aplicaciones  $p$ -lineales antisimétricas. Prueba que  $\wedge^p V^* = 0$  para  $p > \dim V$ . Además, si  $n = \dim V$ , entonces  $\wedge^n V^*$  es 1-dimensional.

**A.7.8.** Sean  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathfrak{X}^*(M)$ .

- (a) Si  $\theta_i = \sum_j a_{ij} \psi_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces

$$\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n = \det(a_{ij}) \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n.$$

- (b)  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  es una referencia local de  $\mathfrak{X}^*(M)$  si, y sólo si,

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \neq 0$$

en todo punto de  $M$ .

**A.7.9.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Sean  $\omega_1, \dots, \omega_r$ ,  $r \leq n$ , formas lineales de  $V$  linealmente independientes. Supongamos que existen formas lineales  $\theta_1, \dots, \theta_r$  satisfaciendo la condición

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Entonces se cumple que

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, r.$$

**A.7.10.** Sobre  $\mathbb{R}^2$  con las coordenadas usuales  $\{x_1, x_2\}$ , sea  $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  la aplicación lineal con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Sea  $T \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$  dado por  $T = dx^1 \otimes dx^1 + 2dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 + 3dx^2 \otimes dx^2$ . Obten  $\phi^*T$ .

(b) Sea  $T \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{R}^2)$  definido por  $T = e_1 \otimes e^2 - 2e_2 \otimes e^2$ . Calcula las componentes de  $\phi_*T$ .

**A.7.11.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $\phi(x, y, z) = (2x + z, xyz)$  y  $T \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$  definido por  $T = (u + 2v)du \otimes du + u^2du \otimes dv$ . Calcula  $\phi^*T$ .

**A.7.12.** Sea  $M$  una variedad diferenciable.

(a) Interpreta  $A \in \mathcal{T}_1^1(M)$  como una aplicación diferenciable que asigna a cada punto  $p \in M$  un operador lineal  $A_p$  sobre  $T_pM$ .

(b) Prueba que  $(CA)(p) = \text{traza}(A_p)$ , donde  $C$  es el operador *Contracción*.

(c) Si  $A, B \in \mathcal{T}_1^1(M)$ , expresa la aplicación  $p \rightarrow A_p \circ B_p$  como un elemento de  $\mathcal{T}_1^1(M)$ .

**A.7.13.** 1) Sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación diferenciable definida por  $\varphi(x, y) = (x + 2y, y)$  y sea  $T = 3x\partial_x \otimes dy + \partial_y \otimes dy \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{R}^2)$ . Calcula el pullback  $\varphi^*(T)$  y el pushforward  $\varphi_*(T)$  del tensor  $T$ .

2) Sean los tensores  $A = T \otimes \varphi^*(T)$  y  $B = \varphi_*(T) \otimes T$ . Calcula  $C_2^1A - C_1^2B$ .

**A.7.14.** En  $\mathbb{R}^2$ , con las coordenadas usuales  $(x, y)$ , consideramos el tensor  $T \in \mathcal{T}_1^2(\mathbb{R}^2)$  dado por  $T = xy\partial_x \otimes \partial_x \otimes dy - y^2\partial_x \otimes \partial_y \otimes dy + 3x^2y\partial_y \otimes \partial_x \otimes dx$ . ¿Cuánto vale la contracción  $C_1^2(T)$ ?

**A.7.15.** Sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varphi(x, y) = (x + 2y, y)$  y sea el tensor  $T \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$  dado por  $T = 3xdx \otimes dy + dy \otimes dy$ . ¿Cuánto valen  $C_2^1(\varphi_*T \otimes \varphi^*T)$  y  $C_1^2(\varphi_*T \otimes \varphi^*T)$ ?

#### 4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK. *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

## 5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

**E.7.1.** Sean  $A$  y  $B$  dos campos tensoriales de tipo (1,1) sobre una variedad diferenciable  $M$ . Pongamos

$$S(X, Y) = [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X, Y] + BA[X, Y] - A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y],$$

con  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces la aplicación  $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  define un tensor de tipo (1,2) sobre  $M$  y  $S(X, Y) = -S(Y, X)$ .

**E.7.2. (a)** Sea  $T \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$  un tensor no nulo. Encuentra una caracterización para que  $T$  se pueda escribir en la forma  $T = A \otimes B$ , con  $A, B \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^2)$ .

**(b)** Sea  $A \in \mathcal{T}_2^0(M)$  un tensor simétrico y  $B \in \mathcal{T}_0^2(M)$  un tensor antisimétrico. Calcula  $\sum_{i,j} a_{ij} b^{ij}$ .

**(c)** Sean  $A, B \in \mathcal{T}_2^0(M)$  dos tensores simétricos de componentes respectivas  $a_{ij}, b_{kl}$ , verificando la igualdad:

$$a_{ij} b_{kl} - a_{il} b_{kj} + a_{jk} b_{il} - a_{kl} b_{ij} = 0.$$

Prueba que  $a_{ij} = \lambda b_{ij}$ .

**E.7.3.** Sea  $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$  la aplicación definida por  $\phi(x, y) = (x^3 + y, y)$  y sea el tensor  $T$  de tipo (2, 1) dado por

$$T = x \frac{\partial}{\partial x} \otimes dx \otimes dy + y \frac{\partial}{\partial y} \otimes dy \otimes dy.$$

Prueba que  $\phi$  es un difeomorfismo y calcula:

**(a)** El pushforward  $\phi_* T$ .

**(b)** Las contracciones (1,1) y (1,2) de  $T$ .

**E.7.4.** Sea  $T \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{R}^2)$  definido por

$$T = xy \frac{\partial}{\partial x} \otimes dx + y \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx + \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy.$$

Definimos la aplicación  $\phi$  como sigue:  $\phi : \{(x, y) | y > 0\} \rightarrow \{(x, y) | x > 0, x^2 < y\}$  y  $\phi(x, y) = (ye^x, y^2 e^{2x} + y)$ . Prueba que  $\phi$  es un difeomorfismo y calcula:

**(a)** La traza de  $T$ .

**(b)** El *push-forward* de  $T$ ,  $\phi_* T$ .

**E.7.5.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^3 \\ & \searrow \varphi = \pi \circ \phi & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

donde las aplicaciones  $\phi$  y  $\pi$  están definidas como sigue:

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= (x, 3y + 11z, 2x + y + 4z) \\ \pi(u, v, w) &= (u, v)\end{aligned}$$

Sean los tensores  $T \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{R}^3)$  y  $A \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^2)$  definidos por

$$\begin{aligned}T &= x \frac{\partial}{\partial y} \otimes dz + y \frac{\partial}{\partial z} \otimes dx \\ A &= u du + v dv\end{aligned}$$

Calcula los siguientes tensores:

- 1) El pushforward de  $T$ ,  $\phi_*(T)$ .
- 2) El pullback de  $A$ ,  $\pi^*(A)$ .
- 3)  $\omega = C_2^1(\phi_*(T) \otimes \pi^*(A))$ .
- 4)  $\phi^*\omega - C_2^1(T \otimes \varphi^*A)$
- 5) La derivada de Lie  $\mathcal{L}_X(\phi^*\omega)$ , donde  $X = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$ .

**E.7.6.** Una variedad diferenciable conexa  $M^n$  es **orientable** si existe un atlas orientado para la variedad, esto es, un atlas tal que el jacobiano de los cambios de cartas es siempre positivo. Prueba:

- a) Si una variedad  $M$  admite un atlas formado por dos cartas  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$  tal que  $U_1 \cap U_2$  es conexo entonces  $M$  es orientable.
- b) Sea  $M$  una variedad paracompacta. Entonces  $M$  es orientable si, y sólo si, existe una  $n$ -forma sobre  $M$  que no se anula en ningún punto.



## 6. BIOGRAFÍA: DAVID HILBERT (1862-1943)

**David Hilbert** (1862-1943) asistió a una academia en su pueblo natal de Königsberg. Después de la graduación, Hilbert abandonó la academia e ingresó en la Universidad de Königsberg, donde estudió bajo la dirección de **C. Ferdinand Lindemann** (1852-1939). Obtuvo su doctorado en 1885 con una tesis doctoral titulada *Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen*, que hizo progresar la teoría de los invariantes algebraicos. Uno de los amigos de Hilbert fue **Hermann Minkowski** (1864-1909), que también fue estudiante de doctorado en la Universidad de Königsberg; sus trabajos tuvieron una enorme influencia en el desarrollo posterior de las matemáticas.

En 1884 **A. Hurwitz** fue admitido en la Universidad de Königsberg y pronto estableció amistad con Hilbert, influyendo notablemente en el desarrollo matemático de Hilbert. Hilbert fue miembro directivo de la Universidad desde 1886 hasta 1895, alcanzando las categorías de Profesor Extraordinario en 1892 y de Catedrático en 1893.

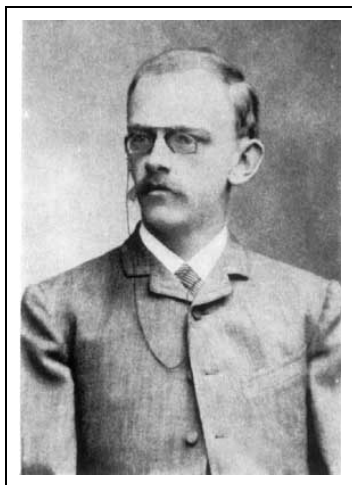


Figura 7.1: Imagen de D. Hilbert en 1886

En 1892 **Hermann A. Schwarz** (1845-1921) se trasladó de Gotinga a Berlín para ocupar la vacante dejada por **Karl Weierstrass** (1815-1897), y **F. Klein** (1849-1925) deseaba ofrecer a Hilbert la vacante de Gotinga. Sin embargo, Klein no pudo convencer a sus colegas y **Heinrich Weber** (1842-1913) fue seleccionado para ocupar dicho puesto. Tres años después, Weber se trasladó a una vacante en Estrasburgo y entonces sí consiguió que Hilbert fuese seleccionado para ocupar el puesto de Weber. De este modo, Hilbert fue nombrado profesor de la Universidad de Gotinga en 1895, donde estuvo enseñando durante el resto de su carrera docente.

La eminente posición que ocupaba Hilbert en el mundo de las matemáticas desde 1900 hacía que otras instituciones quisieran convencerlo de que abandonara Gotinga y, en 1902, la Universidad de Berlín le ofreció la Cátedra de **L. Fuchs** (1833-1902). Hilbert se trasladó a la plaza de Berlín, pero sólo hasta que la Universidad de Gotinga quiso recuperarlo ofreciéndole una cátedra a él y otra a su amigo Minkowski.

El primer trabajo de Hilbert sobre teoría de los invariantes, en 1888, contenía su famoso Teorema de la Base. Veinte años antes **P. Gordan** (1837-1912) había probado el teorema de la base finita para formas binarias utilizando una aproximación altamente computacional. Los diversos intentos que se sucedieron después para intentar generalizar el teorema de Gordan para sistema de más de dos variables

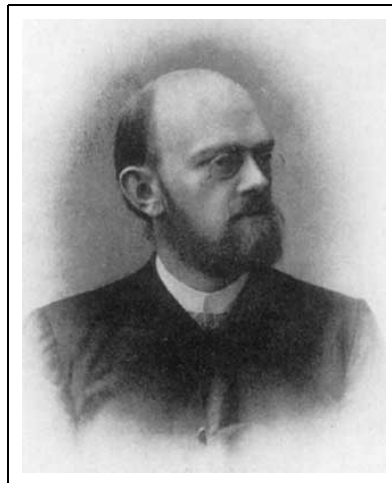


Figura 7.2: Imagen de D. Hilbert en 1900

fueron un fracaso, debido a la complejidad de la aproximación computacional. De hecho, los primeros intentos de Hilbert se basaron en las ideas de Gordan, pero pronto se percató que era necesario analizar el problema desde un nuevo punto de vista. Descubrió un método completamente nuevo que demostraba el teorema de la base finita para cualquier número de variables, pero de un modo enteramente abstracto. No obstante, y aunque sus métodos garantizaban la existencia de una base finita, él nunca construyó una tal base.

Hilbert sometió su artículo a la revista *Mathematische Annalen*. Sin embargo, Gordan era el experto de dicha revista en la teoría de invariantes, y encontró el revolucionario método de Hilbert poco interesante. Revisó el artículo de Hilbert y envió los siguientes comentarios a Klein:

*El problema no es la forma ... sino algo mucho más profundo. Hilbert ha desdeñado presentar sus ideas siguiendo las reglas formales, y piensa que es suficiente con que nadie contradiga su demostración ... está contento pensando que la importancia y corrección de sus proposiciones son suficientes ... para un trabajo en Annalen no es suficiente.*

Sin embargo, Hurwitz le hizo saber a Hilbert de este informe de Gordan, y el propio Hilbert le envió una carta a Klein en términos muy duros:

*... No estoy preparado para alterar o eliminar nada, y en relación con el artículo, y con toda modestia, esta es mi última palabra, ya que no se ha producido ninguna objeción definitiva e irrefutable contra mi razonamiento.*

Klein recibió las cartas de Hilbert y Gordan al mismo tiempo, pero mientras Hilbert era un profesor ayudante, Gordan era el líder mundial reconocido experto en teoría de invariantes, y además era amigo íntimo de Klein. Sin embargo, Klein reconoció la importancia del trabajo de Hilbert y le aseguró que su trabajo aparecería en *Annalen* sin cambios, como así fue.

Hilbert desarrolló sus métodos en un trabajo posterior, que también sometió a *Annalen*, y Klein, después de leer el manuscrito, escribió a Hilbert diciéndole:

*No tengo ninguna duda que éste es el trabajo sobre álgebra general más importante que ha sido*

*publicado nunca en los Annalen.*

En 1893, todavía en la Universidad de Königsberg, Hilbert comenzó el trabajo *Zahlbericht on algebraic number theory*. La Sociedad Matemática Alemana requirió este trabajo tres años después de que la Sociedad se creara en 1890. El trabajo *Zahlbericht* (1897) es una brillante síntesis de los trabajos de **E.E. Kummer** (1810-1893), **L. Kronecker** (1823-1891) y **R. Dedekind** (1831-1916), pero contiene numerosas ideas propias de Hilbert, que se han mantenido hasta nuestro días. D.E. Rowe describe este trabajo en los siguientes términos:

*... no es realmente un Recopilatorio en el sentido usual de la palabra, sino más bien una obra de investigación original que revela que Hilbert no era un mero especialista. ... [Hilbert] no sólo sintetiza los resultados de investigaciones anteriores ... sino que crea nuevos conceptos que constituyen las líneas de investigación en teoría algebraica de números durante los años posteriores.*



Figura 7.3: Imagen de D. Hilbert en 1926

El moderno tratamiento de la geometría euclidiana que ha recibido la aceptación más amplia se debe a Hilbert. El profesor Hilbert dio varias conferencias sobre los fundamentos de la geometría euclidiana en la Universidad de Gotinga durante el periodo de invierno de 1898-1899. Estas conferencias se reordenaron y publicaron en un delgado volumen en junio de 1899, bajo el título *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la Geometría)*. Esta obra, en sus diversas revisiones mejoradas, es en la actualidad clásica en su campo; ha hecho más que cualquier otro trabajo desde el descubrimiento de la geometría no euclídea para promover el método moderno y para dar forma al carácter de gran parte de las matemáticas actuales. La influencia de este libro fue inmediata. Una edición francesa apareció poco después de la publicación alemana, y una versión inglesa, traducida por **E.J. Townsend**, apareció en 1902. La obra tuvo siete ediciones alemanas en vida del autor, apareciendo la séptima edición en 1930. Desarrollando un conjunto de postulados para la geometría euclídea que, en esencia, no se separan mucho de los propios de Euclides y empleando un mínimo de simbolismo, Hilbert tuvo éxito para convencer a los matemáticos, en mayor grado del que tuvieron **Moritz Pasch** (1843-1930) y **Giuseppe Peano** (1858-1932), de la naturaleza puramente hipotético-deductiva de la geometría. Pero la influencia de la obra de Hilbert fue más allá de esto, pues apoyada por la gran autoridad matemática del autor, implantó firmemente el método postulacional no sólo en el campo de la geometría, sino esencialmente también en todas las demás ramas de las matemáticas. El estímulo para el desarrollo de los fundamentos de las matemáticas proporcionado por el pequeño libro de Hilbert es difícil de sobrestimar. Faltándole

el extraño simbolismo de los trabajos de Pasch y Peano, el de Hilbert puede leerse, en gran parte, por cualquier alumno inteligente que estudie geometría a nivel medio.

En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900 Hilbert pronunció su famosa conferencia, en la que intentó, basándose en las principales tendencias de las investigaciones matemáticas de fines del siglo XIX, predecir de alguna manera las direcciones futuras de los progresos matemáticos. Para ello propuso veintitrés problemas que, a sus ojos, representaban los puntos de discusión que podrían eventualmente hacer progresar las matemáticas. Su conferencia estuvo llena de optimismo por las matemáticas del siglo que comenzaba y sentía que los problemas abiertos eran un signo de la vitalidad del área:

*La gran importancia de los problemas planteados para el progreso de la ciencia matemática en general ... es innegable ... ya que cuando una rama del conocimiento proporciona un excedente de tales problemas, mantiene su vitalidad ... cualquier matemático ciertamente comparte la convicción de que cualquier problema matemático puede ser resuelto ... oímos dentro de nosotros un grito constante: hay un problema, busquemos la solución, que puede encontrarse a través del razonamiento.*

Los problemas sugeridos por Hilbert provienen de los diferentes sectores de las matemáticas, y se adivina fácilmente la profundidad y complejidad de su contenido. Se incluye la hipótesis del continuo, la buena ordenación de los números reales, la conjetura de Goldbach, la trascendencia de las potencias de números algebraicos, la hipótesis de Riemann, la extensión del principio de Dirichlet y muchos otros. Muchos de estos problemas han sido resueltos durante estos años pasados, y cada vez que un nuevo problema es resuelto supone un momento glorioso para las matemáticas.

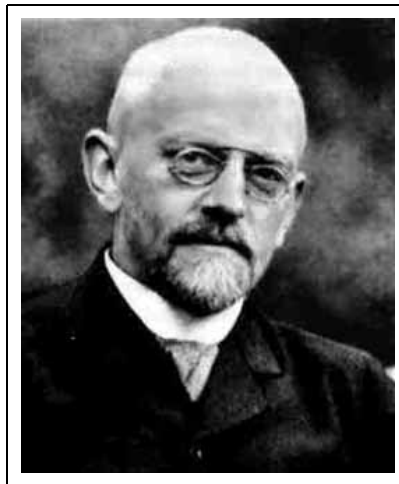


Figura 7.4: Imagen de D. Hilbert en 1930

Hoy día, el nombre de Hilbert es a menudo recordado y asociado a los *espacios de Hilbert*. **Irving Kaplanski** explica el trabajo de Hilbert que condujo a esta situación:

*El trabajo de Hilbert en ecuaciones integrales, alrededor de 1909, condujo directamente a la investigación en análisis funcional en el siglo XX (la rama de las matemáticas en la cual las funciones son estudiadas colectivamente). Este trabajo estableció asimismo las bases para su trabajo sobre espacios de dimensión infinita, posteriormente denominados espacios de Hilbert, un concepto sumamente útil en análisis matemático y mecánica cuántica. Haciendo uso de sus resultados sobre*

*ecuaciones integrales, Hilbert contribuyó al desarrollo de la física matemática mediante sus importantes memorias sobre la teoría cinética de los gases y la teoría de radiaciones.*

En 1915 Hilbert descubrió las ecuaciones correctas del campo en teoría de la relatividad general. En este punto, en los últimos años existe una controversia sobre si fue Hilbert el primero, antes que **A. Einstein**, que las describió correctamente.

En 1934 y 1939 se publicaron dos volúmenes de *Grundlagen der Mathematik* que pretendían conducir a la “teoría de la demostración”, un método para probar la consistencia de las matemáticas. El artículo de **Kurt Gödel** (1906-1978) de 1931 demostraría que este objetivo era imposible, ya que demostró que en el interior de un sistema siempre existe al menos una proposición (es decir, un enunciado verdadero) que no puede ser demostrada basándose únicamente en los axiomas del sistema.

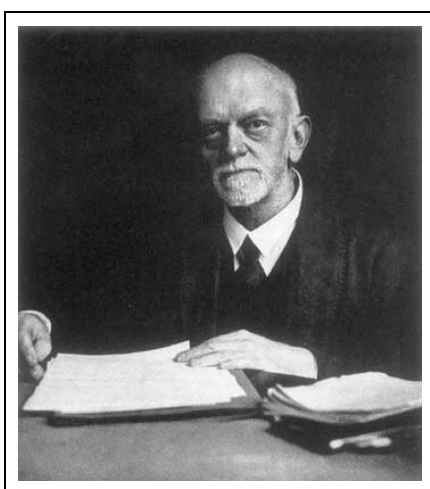


Figura 7.5: Imagen de D. Hilbert en 1932

Hilbert contribuyó a muchas ramas de las matemáticas, incluyendo la teoría de invariantes, los cuerpos algebraicos de números, el análisis funcional, las ecuaciones integrales, la física matemática, y el cálculo de variaciones. Las habilidades matemáticas de Hilbert fueron hábilmente recogidas por **Otto Blumenthal**, su primer estudiante:

*En el análisis del talento matemático se debe distinguir entre la habilidad para crear nuevos conceptos que generan nuevos tipos de estructuras de pensamiento y el talento para detectar conexiones profundas que dan unidad. En el caso de Hilbert, su grandeza radica en un inmenso poder de visión que penetra en las profundidades del problema. Todos sus trabajos contienen ejemplos de campos alejados en los cuales fue capaz de encontrar las interrelaciones y conexiones con el problema analizado. A partir de éstos, la síntesis, su obra de arte, era creada. En la medida en que nos referimos a la creación de nuevas ideas, pondría a Minkowski en un lugar más alto, junto a Gauss, Galois y Riemann. Pero cuando nos quedamos con la perspicacia penetrante, sólo unos pocos entre los más grandes pueden compararse con Hilbert.*

Entre los estudiantes de Hilbert podemos citar a **Hermann Weyl** (1885-1955), el famoso campeón mundial de ajedrez Lasker, y **Ernst Zermelo** (1871-1953).

Hilbert recibió muchos honores. En 1905 la Academia Húngara de Ciencias le concedió una distinción especial. En 1930 Hilbert se retiró y la ciudad de Königsberg lo nombró ciudadano honorario de

la ciudad. Dio un discurso de agradecimiento que finalizaba con seis palabras famosas que demuestran su entusiasmo por las matemáticas y su dedicación en vida para la resolución de problemas matemáticos:

*Wir müssen wissen, wir werden wissen - Nosotros debemos conocer, nosotros conoceremos.*

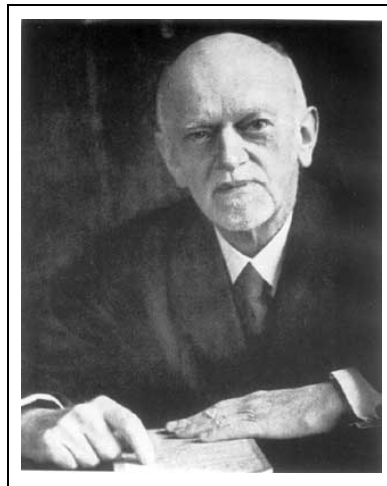


Figura 7.6: Imagen de D. Hilbert en 1937

### **Bibliografía**

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 654–661.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publishing Company, 1995.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 577–586.

Internet. URL de la página:

[www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Hilbert.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Hilbert.html)

### **Bibliografía complementaria**

*Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).

#### **Libros:**

C. Reid *Hilbert* (Berlin- Heidelberg- New York, 1970).

C. Reid *Hilbert-Courant* (New York, 1986).

#### **Artículos:**

P. Bernays *David Hilbert*, *Encyclopedia of Philosophy III* (New York, 1967), 496-504.

C. Carathéodory *Obituary: David Hilbert*, *S-B Math.-Nat. Abt. Bayer. Akad. Wiss.* 1943 (1943) 350-354.

- L. Corry *Axiomatics and structural algebra in the works of David Hilbert (Spanish)*, *Mathesis* 11 (4) (1995), 291-329.
- J. Dieudonné *David Hilbert (1862-1943) (Spanish)*, *Rev. Integr. Temas Mat.* 2 (1) (1983), 27-33.
- D.W. Lewis *David Hilbert and the theory of algebraic invariants*, *Irish Math. Soc. Bull.* 33 (1994), 42-54.
- B. Machado *David Hilbert (Portuguese)*, *Gaz. Mat., Lisboa* 4 (14) (1943), 1-2.
- B.H. Neumann *David Hilbert*, *Mathematical Spectrum* 25 (1992/93), 70-73.
- D.E. Rowe *Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition*, *Osiris* (2) 5 (1989), 186-213.
- D.E. Rowe *David Hilbert on Poincaré, Klein, and the world of mathematics*, *The Mathematical Intelligencer* 8 (1) (1986), 75-77.
- M. Toepell *On the origins of David Hilbert's Grundlagen der Geometrie*, *Archive for History of Exact Science* 35 (4) (1986), 329-344.
- H. Weyl *David Hilbert and his mathematical work*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 50 (1944), 612-654.
- H. Weyl *Hermann Obituary: David Hilbert. 1862-1943*, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London* 4 (1944), 547-553.
- H. Weyl *David Hilbert and his mathematical work (Portuguese)*, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* 1 (1946), 76-104.
- H. Weyl *David Hilbert and his mathematical work (Portuguese)*, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* 2 (1947), 37-60.