CAPÍTULO 6
CURVAS INTEGRALES Y GRUPOS UNIPARAMÉTRICOS

1. INTERROGANTES CENTRALES DEL CAPÍTULO

Se pretende que el alumno sepa definir, establecer o determinar lo siguiente:

- Curva integral de un campo
- Ecuaciones locales de una curva integral
- Punto crítico
- Campo completo
- Curva integral maximal
- Curva integral inyectiva
- Curva integral periódica
- Curva integral simplemente periódica
- El flujo de un campo
- El grupo uniparamétrico de transformaciones
- El corchete de Lie como una derivada

2. CONTENIDOS FUNDAMENTALES DEL CAPÍTULO

2.1. Definiciones y resultados básicos

En el estudio de los campos de vectores hemos interpretado éstos de dos formas distintas. En primer lugar hemos visto los campos como aplicaciones (diferenciables) de la variedad en su fibrado tangente y, en segundo lugar, hemos probado que podían considerarse como derivaciones en el álgebra de las funciones diferenciables. En esta lección se interpretan los campos de vectores como ecuaciones diferenciales sobre la variedad.

Comenzamos definiendo lo que se entiende por curva integral de un campo X, que no es más que una curva cuyo vector tangente coincide con el representante o valor del campo a lo largo de la curva.

Definición 6.1
Una curva $\alpha : I \to M$ es una *curva integral* de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ si $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$.

Se plantean ahora dos cuestiones importantes como son la existencia y unicidad de las curvas

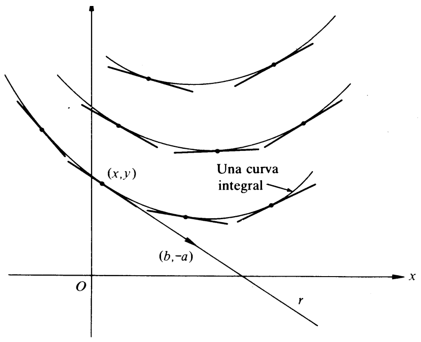


Figura 6.1: Curva integral de un campo de vectores

integrales, por un lado, y la búsqueda de métodos prácticos para su obtención, por otro, cuestiones que en realidad tendrán una solución común. Estos problemas se reducen, localmente, a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Sea (U, x) un sistema de coordenadas en M. Supongamos que la representante local de α en este sistema de coordenadas es $x \circ \alpha(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, y que el campo X se expresa localmente como

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $f_i = X(x_i) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ para todo i. Denotemos por $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la representante en coordenadas de f_i, entonces α es una curva integral de X en U si, y sólo si,

$$\frac{du_i}{dt} = F_i(u_1(t), \ldots, u_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n$$

El teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias permite obtener el siguiente resultado, en términos de la teoría de variedades.

Proposición 6.2
Para todo campo de vectores diferenciable X y todo punto p en la variedad existe un intervalo del origen en $\mathbb{R}$ y una única curva integral del campo, definida en dicho intervalo y con punto inicial p.

Definición 6.3
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$.
(1) p es un *punto crítico* de X si $X_p = 0$.
(2) X es *completo* si todas sus curvas integrales están definidas en todo $\mathbb{R}$.

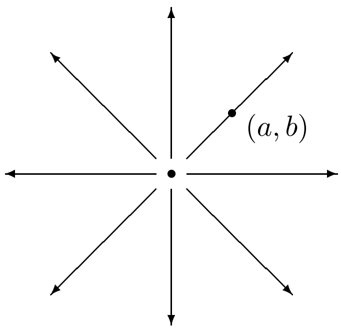
Ejemplo 6.4
Consideremos el campo de vectores definido en términos de la carta identidad por

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Las curvas integrales de X están dadas por

$$\alpha(t) = (ae^t, be^t), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

y un esquema de todas las curvas integrales es el siguiente:



Observemos que el único punto crítico es el origen de coordenadas. Todas las curvas integrales están definidas para todo t por lo que el campo X es completo.

Ejemplo 6.5
Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dos constantes y consideremos el campo de vectores definido en términos de la carta identidad por

$$X = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Las curvas integrales de X están dadas por

$$\alpha(t) = (ae^{\lambda_1 t}, be^{\lambda_2 t}), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Igual que en el ejemplo anterior, el campo X es completo y los puntos críticos son aquellos que satisfacen las ecuaciones $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = 0$.

Ejemplo 6.6
Consideremos el campo de vectores definido en términos de la carta identidad por

$$X = \frac{1}{e^{\lambda x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \lambda \neq 0.$$

Las curvas integrales de X están dadas por

$$\alpha(t) = (\frac{1}{\lambda} \log(\lambda(t + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda a}), b).$$

Consecuentemente, X no es un campo completo, ya que para ciertos valores de t, el argumento del logaritmo sería negativo.

Veamos a continuación dos resultados sencillos de demostrar pero que nos serán muy útiles más adelante.

Proposición 6.7
Sea $\alpha : J \to M$ una curva integral de un campo X y sea $t_0 \in J$. Entonces la curva $\beta : I \to M$, $\beta(t) = \alpha(t + t_0)$, definida en $I = \{t : t + t_0 \in J\}$, es una curva integral de X.

Proposición 6.8
Si $\alpha, \beta : I \to M$ son dos curvas integrales de X, definidas en un intervalo conexo I, tal que $\alpha(a) = \beta(a)$ para algún $a \in I$, entonces $\alpha = \beta$.

Si consideramos todas las curvas integrales del campo X con punto inicial p, dado que dos cualesquiera de ellas coinciden en la intersección de sus dominios, podemos definir la curva integral maximal de X con punto inicial p, cuyo dominio de definición es el mayor posible. En particular, si el dominio de todas las curvas integrales maximales de un campo es $\mathbb{R}$, dicho campo es completo. La curva integral maximal de un campo X que empieza en un punto p es única en el siguiente sentido.

Proposición 6.9
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $\alpha_p : I_p \to M$ la curva integral maximal de X que empieza en p. Si $q = \alpha_p(s)$ entonces $I_q = I_p - s$ y $\alpha_q(t) = \alpha_p(s+t)$ para $t \in I_q$.

El resultado anterior es equivalente a la existencia de un intervalo del origen en $\mathbb{R}$ en el cual están definidas todas las curvas integrales maximales. Como consecuencia de esta caracterización se tiene que todo campo de vectores con soporte compacto es completo y, en particular, todo campo definido sobre una variedad compacta es completo. Es decir,

Proposición 6.10
(1) *$X \in \mathfrak{X}(M)$ es completo si, y sólo si, existe un entorno I de = en $\mathbb{R}$ tal que cada curva integral maximal está definida en I.*
(2) *Todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ sobre una variedad compacta es completo.*

Para finalizar esta sección vamos a dar un resultado sobre como pueden ser las curvas integrales. Antes introduciremos algunos conceptos.

Definición 6.11
Sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una curva.
(1) γ es periódica si existe un número $c > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(t+c)$ para todo t. Si c es el menor número positivo satisfaciendo dicha propiedad, se dice que c es el periodo de γ.
(2) Si γ es una curva periódica, de periodo c, e inyectiva en algún intervalo $[a, a+c)$, entonces γ se dice que es simplemente periódica.

Proposición 6.12
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Todas las curvas integrales maximales de X son inyectivas, simplemente periódicas o constantes.

2.2. El flujo de un campo

Ligado al concepto de campo de vectores se encuentra el de flujo del campo, que determina el grupo local uniparamétrico de transformaciones $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ asociado al campo de vectores X, donde ψ_t está definido en un cierto subconjunto dependiente de t, y tal que si p es un punto de M, $\psi_t(p)$ es el valor en t de la curva integral maximal de X con punto inicial p. En otras palabras, ψ_t nos describe la posición de cada punto de su dominio en el instante t; es como una fotografía de una parte de M tomada justo en el instante t. Estas aplicaciones nos permiten caracterizar a los campos de vectores completos como aquellos para los que las transformaciones ψ_t están definidas en todo M.

Sea $\mathcal{D} = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p\}$. Se define el flujo de X como la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{D} & \to & M \\ & (t,p) & \to & \Psi(t,p) := \alpha_p(t) \end{array}$$

Consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores completo. A partir del flujo se pueden obtener dos tipos de funciones:

(1) Para cada $p \in M$, la aplicación $\Psi_p : \mathbb{R} \to M$ definida por $\Psi_p(t) := \Psi(t,p)$ no es más que la curva integral maximal de X que sale de p y, por tanto, nos describe la trayectoria del punto p a lo largo del tiempo t.

(2) Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\Psi_t : M \to M$ definida por $\Psi_t(p) := \Psi(t,p)$ nos proporciona la posición de cada punto de M en el instante t. Por esta razón, Ψ_t se denomina el estado t del flujo Ψ, y en ocasiones el conjunto $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}\}$ se dirá que es el flujo del campo X.

Proposición 6.13
Si $\{\Psi_t\}$ es el flujo de un campo X, entonces:
(1) $\Psi_0 = 1$
(2) $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$*, para todo* $s, t \in \mathbb{R}$ *(es decir, los estados de* Ψ *conmutan).*
(3) Ψ_t *es un difeomorfismo con* $\Psi_t^{-1} = \Psi_{-t}$.
Por verificar estas propiedades, $\{\Psi_t\}$ se dice que es un grupo uniparamétrico de transformaciones (o difeomorfismos).

Como una aplicación del flujo de un campo, puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 6.14
Dado un campo de vectores diferenciable X y un punto p de M tal que $X_p \neq 0$, existe un entorno del punto y una carta local de la variedad definida en dicho entorno tal que si $(x_1, \ldots, x_n)$ son las funciones coordenadas correspondientes a dicha carta, entonces $X = \partial/\partial x_1$ en los puntos del entorno.

Los grupos uniparamétricos de transformaciones nos permiten dar una interpretación geométrica del corchete de dos campos de vectores X e Y como la derivada (de Lie) de Y con respecto a X. Concretamente, dado un punto p de M, si $\{\psi_t\}$ es el grupo local uniparamétrico de transformaciones asociado a X, podemos considerar el valor de Y en $\psi_t(p)$, $Y_{\psi_t(p)}$, que será un vector tangente a M en $\psi_t(p)$, y trasladarlo a T_pM mediante a aplicación $d\psi_{-t}$. Se obtiene así la aplicación diferenciable $d\psi_{-t}(Y_{\psi_t(p)})$ definida en un entorno del origen en $\mathbb{R}$ y con valores en T_pM, cuya derivada en el origen resulta ser $[X,Y]_p$. En otras palabras,

Proposición 6.15
Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y Ψ el flujo local de X en un entorno de p. Entonces

$$[X,Y]_p = \lim_{p\to 0} \frac{1}{t}\left(d\psi_{-t}(Y_{\psi_t(p)}) - Y_p\right)$$

3. ACTIVIDADES DE APLICACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS

A.6.1. Encuentra las curvas integrales de los campos de vectores sobre $\mathbb{R}^2$ definidos en términos de la carta identidad por:

(a) $\dfrac{1}{e^{x_1}}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$

(b) $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$

(c) $\lambda x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \mu x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(d) $x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - (x_2)^3 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$

En cada caso encuentra los puntos críticos y determina si el campo de vectores es completo.

A.6.2. **(a)** Prueba que el campo de vectores sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ definido por

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

no es completo.

(b) Prueba que los campos de vectores definidos sobre $\mathbb{R}^2$ en términos de la carta identidad por

$$X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

son completos y, sin embargo, su corchete $[X, Y]$ no es completo.

A.6.3. Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y) & \longrightarrow & (t + x, y) \end{array}$$

Encontrar un campo X definido sobre $\mathbb{R}^2$ tal que Φ sea su flujo.

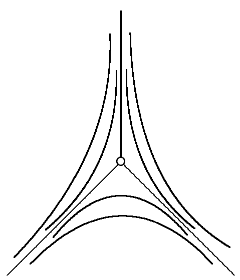
A.6.4. Sea $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, con $M = \mathbb{R}^2$, definida por

$$\phi(t, x_1, x_2) = (x_1 \cos t - x_2 \operatorname{sen} t, x_1 \operatorname{sen} t + x_2 \cos t)$$

(a) ϕ es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos.

(b) Hallar un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que ϕ sea el flujo de X.

A.6.5. En $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, ¿existe algún campo de vectores cuyas curvas integrales sean las de la siguiente figura?



A.6.6. Se considera el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ definido en la carta identidad por:

$$X = (-x_1 + x_2 - 2x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_2 + 4x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Encuentra el flujo de X.

A.6.7. Sean X, Y, Z los campos de vectores definidos en $\mathbb{R}^3$ por

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$$
$$Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$$
$$Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

(a) Prueba que la aplicación $(a, b, c) \longrightarrow aX + bY + cZ$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en un subespacio del espacio de los campos de vectores sobre $\mathbb{R}^3$.

(b) Obten el flujo del campo $X + Y + Z$.

A.6.8. Prueba que el flujo del campo de vectores definido en $\mathbb{R}^n$ por

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

es $\Phi(t, x) = e^t x$. Deduce de esto la *identidad de Euler* para funciones homogéneas.

A.6.9. Sean los campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $X = y^2\partial_x$, $Y = x^2\partial_y$, donde (x, y) representa la carta identidad. ¿Cuáles de los campos X, Y, $X + Y$ son completos?

A.6.10. Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables sobre variedades diferenciables M y N, respectivamente, y sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable. Sean θ y σ los flujos generados por X e Y, respectivamente. ¿Qué deben satisfacer θ y σ para que los campos X e Y estén F-relacionados?

A.6.11. Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables definidos en un abierto U, y consideremos ϕ y ψ los respectivos flujos locales. Decimos que ϕ y ψ conmutan en U si $\phi_t\psi_s(q) = \psi_s\phi_t(q)$, para todo $q \in U$, con s y t posibles; asimismo, decimos que X e Y conmutan en U si $[X, Y] = 0$ en U. Probar que los campos de vectores X e Y conmutan en U si, y sólo si, sus flujos ϕ y ψ conmutan en U.

4. BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

W. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1986.

R. BRICKELL y R. CLARK . *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand, 1970.

L. CONLON. *Differentiable Manifolds. A First Course*. Birkhäuser, 1993.

W.D. CURTIS y F.R. MILLER. *Differential Manifolds and Theoretical Physics*. Academic Press, 1985.

5. PREGUNTAS DE EVALUACIÓN

E.6.1. Sean x e y las proyecciones estereográficas de $\mathbb{S}^2$. Consideremos el campo de vectores X en $\mathbb{S}^2$ definido por los campos de vectores:

$$(x_1 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(-y_1 - y_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (y_1 - y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}$$

(a) Prueba que X es, efectivamente, un campo de vectores diferenciable sobre $\mathbb{S}^2$ y halla sus puntos críticos.

(b) Encuentra sus curvas integrales y determina si es un campo completo.

E.6.2. Sea $M = GL(2, \mathbb{R})$ el grupo lineal de orden 2 y definamos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (t, A) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \end{array}$$

donde el punto $\cdot$ indica la multiplicación de matrices. Encuentra un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que Φ sea su flujo.

E.6.3. Dar ejemplos de campos de vectores con las siguientes condiciones:

i) sobre $\mathbb{S}^1$ con exactamente k puntos críticos; generalizar a $\mathbb{T}^n$.

ii) sobre $\mathbb{R}^2$ con exactamente un punto crítico y todas las demás órbitas cerradas.

iii) sobre $\mathbb{R}^2$ con exactamente un punto crítico y todas las demás órbitas no cerradas.

iv) sobre $\mathbb{S}^2$ con exactamente dos puntos críticos.

E.6.4. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ una campo de vectores diferenciable sobre M con flujo ϕ y consideremos una aplicación diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. ¿Cuánto vale el límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\phi_t^*(f) - f)?$$

E.6.5. Sea t la carta identidad sobre $\mathbb{R}$ y consideremos el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ dado por $X(t) = e^t \partial_t$. ¿Es X un campo de vectores completo?

E.6.6. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las aplicaciones definidas por:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 0 \\ e^{-1/t^2}, & t < 0 \end{cases}$$

Sea el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ dado por $X(t) = \varphi(t)\partial_t$, donde $\varphi(t) = f(t-a)g(t-b)$, $a < b$. ¿Es X un campo de vectores completo?

ANOTACIONES

6. BIOGRAFÍA: BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) nació en Breselenz en Hanover. Su padre, Friedrich Bernhard Riemann, era un pastor luterano, que se casó con Charlotte Ebell cuando estaba en su madurez. Bernhard fue el segundo de sus seis hijos, dos chicos y cuatro chicas. Friedrich Riemann actuó como profesor de sus hijos y educó a Bernhard hasta que éste tuvo diez años. Fue entonces cuando un profesor de la escuela local, llamado Schulz, se encargó de la educación de Bernhard.

En 1840 Riemann entró directamente en la clase de tercero en el Liceo de Hanover. Mientras estudió en el Liceo estuvo viviendo con su abuela, pero ésta murió en 1842 y Riemann se trasladó al Johanneum Gymnasium en Lüneburg. Riemann fue un buen estudiante, aunque no brillante, que trabajó duro en las disciplinas clásicas, como hebreo y teología. Mostró un interés particular por las matemáticas y el director del Gymnasium le permitió estudiar los textos matemáticos de su propia biblioteca. En una ocasión le prestó a Riemann el libro de **A.M. Legendre** (1752-1833) acerca de la teoría de números, y Riemann se leyó el voluminoso libro (900 páginas) en sólo seis días.

En la primavera de 1846 Riemann se inscribió en la Universidad de Gotinga. Su padre le animó para que estudiara teología, por lo que entró en la facultad correspondiente. Sin embargo, Riemann asistió a algunas conferencias de matemáticas que le impresionaron enormemente, de forma que Riemann solicitó autorización de su padre para inscribirse en la facultad de filosofía y, de este modo, estudiar matemáticas. Riemann siempre estuvo muy ligado a su padre y sin el permiso de éste Riemann nunca hubiera cambiado de facultad. Riemann asistió a diversos cursos de matemáticas de **Moritz Abraham Stern** (1807-1894) y **K.F. Gauss** (1777-1855).

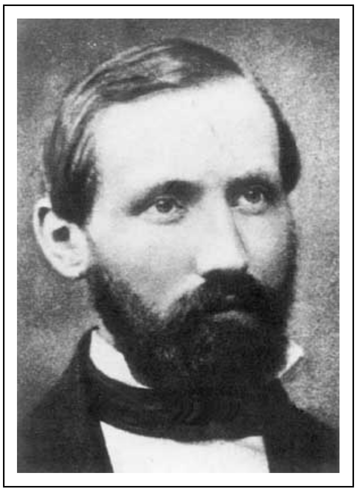


Figura 6.2: Grabado de Riemann en su juventud

Puede pensarse que Riemann estaba en el lugar adecuado para estudiar matemáticas en Gotinga, pero en esa época la Universidad de Gotinga no ocupaba una posición destacada en esta materia. Gauss enseñó a Riemann en los cursos elementales, y no hay evidencia que, en esa época, Gauss reconociera en gran genio que había en Riemann. Sin embargo, Stern si se percató de que tenía un gran estudiante y, posteriormente, describiría al Riemann de esta época diciendo que

...ya cantaba como un canario.

Riemann se trasladó de la Universidad de Gotinga a la de Berlín en la primavera de 1847, para estudiar bajo la supervisión de **J. Steiner** (1796-1863↽—‹**C**▷*G*▷*J*▷ *Jacobi* (1804-1851↽—‹**P**▷*G*▷*L*▷ *Diri*›*chlet* (1805-1859↽—*y***F**▷*G*▷ *Eisenstein* (1823-1852↽—▷*Ap*rendió mucho de Eisenstein, con el que discutía usando variables complejas en la teoría de funciones elípticas. Sin embargo, la persona que más influiría en Riemann durante esta etapa sería Dirichlet. **F. Klein** (1849-1925↽—*dic*e:

> *Riemann se comprometió con Dirichlet por la fuerte simpatía interior por un modo de pensar. Dirichlet amaba hacer las cosas claras en un sustrato intuitivo, con el cual podía realizar análisis lógicos agudos sobre cuestiones fundamentales, evitando los cálculos laboriosos siempre que podía. Sus maneras encantaron a Riemann, que las adoptó y desde entonces trabajó según los métodos de Dirichlet.*

El trabajo de Riemann siempre se basó en un razonamiento intuitivo, muy alejado del rigor necesario para que las conclusiones obtenidas fueran irrefutables. Sin embargo, las brillantes ideas contenidas en sus trabajos están mucho mejor expuestas porque no están salpicadas de numerosos cálculos. Durante esta época en la Universidad de Berlín, Riemann trabajó en su teoría general de variables complejas, que forma una parte muy importante de su investigación matemática.

En 1849 volvió a Gotinga, defendiendo su tesis doctoral, bajo la supervisión de Gauss, dos años más tarde. Sin embargo, otros matemáticos, aparte de Gauss, influirían notablemente en Riemann. **W. Weber** había vuelto de Leipzig para ocupar una plaza de física en Gotinga durante la estancia de Riemann en Berlín, y Riemann fue su asistente durante dieciocho meses. A través de Weber y **J.B. Listing** (1808-1882), que también ocupaba un plaza de física en Gotinga desde 1849, Riemann consiguió una formación excelente en física teórica e importantes ideas en topología, que influirían notablemente en sus investigaciones posteriores.

La tesis de Riemann estudiaba la teoría de variables complejas y, en particular, los objetos que hoy conocemos como *superficies de Riemann*, introduciendo métodos topológicos en la teoría de funciones complejas. El trabajo de Riemann se basa en la teoría de funciones complejas previamente desarrollado por **A.L. Cauchy** (1798-1857), aunque su tesis doctoral puede considerarse un trabajo sorprendentemente original que examina propiedades geométricas de las funciones analíticas, las aplicaciones conformes y la conexión de superficies.

En su tesis doctoral, Riemann utiliza frecuentemente un principio variacional que posteriormente se denominaría Principio de Dirichlet, ya que Riemann lo conoció a partir de unas conferencias que Dirichlet impartió en Berlín. El Principio de Dirichlet, no obstante, ya era conocido por Gauss, **G. Green** (11793-1841) y **W. Thomson** (1824-1907). La tesis de Riemann, uno de los trabajos más originales contenidos en una tesis doctoral, fue defendida el 16 de diciembre de 1851. En su informe sobre la tesis, Gauss diría que Riemann poseía

> *. . . una gloriosa y fértil originalidad.*

Con el apoyo de Gauss, Riemann entró en la Universidad de Gotinga y comenzó a trabajar en su Habilitación, el grado que le permitiría llegar a ser un profesor. Dedicó treinta meses para preparar su disertación, que estudiaba la representación de funciones mediante series trigonométricas. Dio la condición para que una función fuese integrable, que hoy conocemos como condición de integrabilidad de Riemann. En la segunda parte de su disertación, Riemann examinó el siguiente problema:

> *Si una función puede ser representada por una serie de potencias, ¿qué puede decirse acerca de su comportamiento?*

Para completar su Habilitación, Riemann tenía que dar una conferencia. Para ello, Riemann preparó tres conferencias, dos sobre electricidad y una sobre geometría. Gauss tenía que elegir una de las tres para que Riemann se la preparase, y en contra de las expectativas de Riemann, Gauss eligió la conferencia sobre geometría. La conferencia, titulada *Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría,* se impartió el 10 de junio de 1854 y se ha convertido en un clásico en la historia de las matemáticas.

Figura 6.3: Grabado de Riemann cuando trabajaba en su tesis doctoral

La conferencia tenía dos partes. En la primera parte Riemann planteaba el problema de cómo definir un espacio n-dimensional y proponía una definición de lo que hoy en día llamamos variedad de Riemann. Freudenthal escribe:

> *Posee las líneas más cortas, hoy llamadas geodésicas, que recuerdan las líneas rectas ordinarias. De hecho, en una primera aproximación en un sistema de coordenadas geodésicas, tal métrica es llana, de la misma forma que una superficie curva se aproxima por su plano tangente. Los habitantes de la superficie pueden descubrir la curvatura de su mundo y calcularla, en cualquier punto, como una consecuencia de las desviaciones observadas en el teorema de Pitágoras.*

De hecho el punto principal de esta parte de la conferencia de Riemann fue la definición del tensor curvatura de Riemann. La segunda parte de la conferencia plantea cuestiones profundas acerca de la relación de la geometría con el mundo en el que vivimos. Se pregunta cuál es la dimensión del espacio real y cuál es la geometría que describe el verdadero universo. La conferencia era muy avanzada y no fue apreciada por la mayoría de los científicos de su época. Monastyrsky escribe:

> *Entre la audiencia de Riemann, solamente Gauss fue capaz de apreciar la profundidad de los razonamientos de Riemann. . . . La conferencia superó todas sus expectativas y le sorprendió gratamente. A su regreso a la facultad, Gauss comentó, entre grandes alabanzas, con Wilhelm Weber sobre la profundidad de los pensamientos que Riemann había presentado.*

Riemann no fue plenamente comprendido hasta sesenta años después. Freudenthal escribe:

La teoría general de la relatividad justifica espléndidamente su trabajo. En la teoría matemática desarrollada por Riemann, Einstein encontró el marco que se adaptaba a sus ideas, su cosmología y cosmogonía: y el espíritu de Riemann era lo que la física necesitaba: la estructura métrica determinada por los datos.

Este brillante trabajo permitió que Riemann iniciara su carrera como profesor. Sin embargo, Monastyrsky escribe:

No mucho antes, en septiembre, Riemann leyó un informe "Sobre las Leyes de Distribución de la Electricidad Estática" en una sesión de la Sociedad de Gotinga de Científicos y Físicos. En una carta a su padre, Riemann comenta, entre otras cosas, que "el haber hablado en un encuentro científico fue muy útil para mis conferencias". En octubre comenzó a preparar sus conferencias sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las cartas a su amado padre están llenas de comentarios acerca de las dificultades que encontró. Aunque sólo ocho estudiantes asistieron a su primera conferencia sobre ecuaciones diferenciales, Riemann se mostró completamente feliz. Gradualmente Riemann venció su natural timidez y estableció una buena relación con su audiencia.

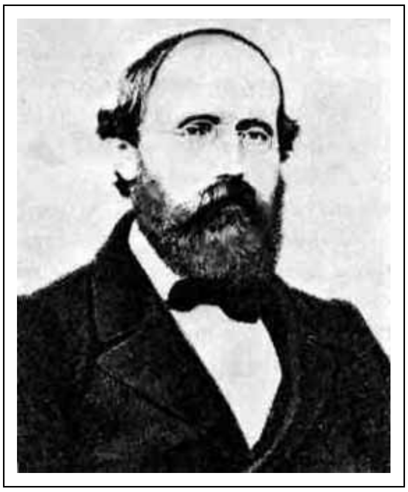


Figura 6.4: Grabado de Riemann en su madurez

La vacante dejada por Gauss en la Universidad de Gotinga fue ocupada por Dirichlet en 1855. En esta época hubo un intento de crear una plaza para Riemann, pero no prosperó. Sin embargo, dos años después fue nombrado profesor y, el mismo año, 1857, fue publicada otra de sus obras maestras. El artículo *Theory of abelian functions (Teoría de funciones abelianas)* era el resultado del trabajo realizado a lo largo de varios años y estaba contenido en un curso, para tres estudiantes, que desarrolló en 1855. Uno de los estudiantes asistentes fue **Richard Dedekind** (1831-1916), que hizo posible que el curso fuera conocido por la comunidad matemática al publicarlo después de la muerte de Riemann.

El trabajo sobre las funciones elípticas fue una continuación de su tesis doctoral y desarrolló la idea de las superficies de Riemann y sus propiedades topológicas. Examinó las funciones multivaluadas como funciones con valores en una superficie de Riemann especial y resolvió problemas generales de inversión que previamente habían sido resueltos por **N.H. Abel** (1802-1829) y **C.G.J. Jacobi** (1804-1851) para las integrales elípticas. Sin embargo, Riemann no era el único que estaba trabajando en tales ideas, como Klein señala:

... cuando Weierstrass envió un primer estudio de las funciones elípticas generales a la Academia de Berlín en 1857, el artículo de Riemann sobre el mismo tema apareció en el Journal de Crelle, en

el volumen 54. El trabajo contenía tantos conceptos nuevos e inesperados, que Weierstrass retiró su estudio y no volvió a publicar más sobre el tema.

El Principio de Dirichlet que Riemann había usado en tesis doctoral, volvió a ser utilizado en su trabajo de 1857. **K. Weierstrass** (1815-1897), sin embargo, demostró que el Principio de Dirichlet no era aplicable. Klein escribe:

La mayoría de los matemáticos se alejaron de Riemann . . . Riemann tenía una opinión diferente. Estaba completamente de acuerdo con las críticas de Weierstrass, que reconocía justas y correctas, pero añadía, como una vez el propio Weierstrass le había comentado, que usaba el Principio de Dirichlet sólo como una herramienta adecuada, estando confiado en que sus teoremas de existencia eran correctos.

En 1858 **E. Betti** (1823-1892), **F. Casorati** (1835-1890) y **F. Brioschi** (1824-1897) visitaron Gotinga y Riemann discutió con ellos sus ideas en topología. Esta estancia proporcionó un enorme placer en Riemann y Betti se benefició de sus contactos con Riemann, los cuales se potenciaron cuando Riemann visitó a Betti en Italia en 1863.

En 1859 Dirichlet falleció y Riemann pasó a ocupar su puesto en la Universidad de Gotinga el 30 de julio. Unos días después, Riemann fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Berlín, a propuesta de tres matemáticos alemanes: **E.E. Kummer** (1810-1893), **C.W. Borchardt** (1817-1880) y Weierstrass. Su propuesta decía:

Antes de la aparición de su trabajo principal (Teoría de funciones abelianas), Riemann era prácticamente un matemático desconocido. Esta circunstancia justifica la necesidad de un examen riguroso de sus trabajos como base para nuestra presentación. Nos consideramos obligados a solicitar la atención de la Academia para nuestro colega, que recomendamos no como un joven talento, sino como un investigador maduro e independiente en nuestra área científica, que de forma significativa ha influido en el progreso de las matemáticas.

Como un nuevo miembro de la Academia de Berlín, Riemann tenía que presentar un informe con sus investigaciones más recientes, y Riemann envió en trabajo *Sobre el número de primos menores que una cierta cantidad*, otra obra maestra que influyó decisivamente en la investigación matemática. Riemann examinaba la función zeta que ya había sido estudiada por **L. Euler**, aunque Riemann analizaba una cuestión diferente, ya que miraba la función zeta como una función compleja, y no real como había hecho Euler. Riemann establecía que la función zeta tiene infinitas raíces no triviales y que todas tenían parte real igual a 1/2. Esta afirmación constituye una famosa hipótesis de Riemann que permanece hoy como una de los más importantes problemas abiertos en matemáticas.

Para finalizar, volvamos a analizar el escepticismo de Weierstrass por el uso que Riemann hacía del Principio de Dirichlet. Weierstrass había probado que la existencia de una función minimizante no está garantizada por el Principio de Dirichlet, lo que hizo que la gente dudara de los métodos de Riemann. Freudenthal escribe:

Todo el material de Riemann utilizado fue rechazado . . . Durante el resto del siglo, los resultados de Riemann ejercieron una gran influencia: su modo de pensar.

Weierstrass creía firmemente en los resultados de Riemann, a pesar de los problemas que él mismo había detectado sobre el uso del Principio de Dirichlet. Propuso a su estudiante **Hermann Schwarz** (1845-1921) la tarea de encontrar otras demostraciones a los teoremas de existencia de Riemann que no utilizaran el Principio de Dirichlet. Klein, sin embargo, estaba fascinado por los métodos de aproximación geométrica de Riemann, y en 1892 escribió un libro con su versión del trabajo de Riemann, escrito en un estilo que conservaba el espíritu de Riemann. Freudenthal escribe:

> *Es un libro maravilloso, y sería interesante saber como fue recibido. Probablemente, muchos se ofendieron por su poco rigor: Klein se parecía demasiado a Riemann para poder convencer a aquellos que no creían es éste último.*

En 1901, Hilbert arregló los teoremas de Riemann proporcionando la forma correcta del Principio de Dirichlet que se necesitaba para que las demostraciones de Riemann fueran correctas. La búsqueda de las pruebas correctas no fue, sin embargo, una pérdida de tiempo, ya que muchas importantes ideas algebraicas fueron descubiertas en este trayecto. Monastyrsky escribe:

> *Es difícil recordar otro ejemplo en la historia de las matemáticas del siglo* XIX *en que la búsqueda de una demostración correcta haya conducido a la obtención de tantos resultados.*

Bibliografía

Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. Princeton University Press, 1985. pp. 588–591, 601, 604–605.

Florian Cajori. *A History of Mathematics*. Chelsea Publising Company, 1995. pp. 421–432.

Jean-Paul Collete. *Historia de las matemáticas*, vol. II. Siglo veintiuno de España Editores, S.A., 1985. pp. 349–354.

Internet. URL de la página:
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Riemann.html

Bibliografía complementaria

Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

Libros:

R. Dedekind *Biography of Riemann* en H Weber y R. Dedekind (eds.), The Collected Works of Riemann (New York, 1953).

F. Klein *Development of mathematics in the 19th century* (Brookline, Mass., 1979).

D. Laugwitz *Bernhard Riemann 1826-1866* (Basel, 1995).

M. Monastyrsky *Rieman, Topology and Physics* (Boston-Basel, 1987).

G. Schulz *Riemann* en H. Wussing y W. Arnold, Biographien bedeutender Mathematiker (Berlin, 1983).

Artículos:

H. Grauert *Bernhard Riemann and his ideas in philosophy of nature*, en Analysis, geometry and groups: a Riemann legacy volume (Palm Harbor, FL, 1993), 124-132.

Y.K. Hon *Georg Friedrich Bernhard Riemann*, Bull. Malaysian Math. Soc. 6 (2) (1975), 1-6.

F. Klein *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, Ges. Math. Abh. 3 (1923), 482-497.

E. Portnoy *Riemann's contribution to differential geometry*, Historia Math. 9 (1) (1982), 1-18.

E. Scholz *Riemann's vision of a new approach to geometry*, in 1830-1930: a century of geometry (Berlin, 1992), 22-34.

F.G. Tricomi *Bernhard Riemann e l'Italia*, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. 25 (1965/1966), 57-72.

A. Weil *Riemann, Betti and the birth of topology*, Arch. Hist. Exact Sci. 20 (2) (1979), 91-96.

J.D. Zund *Some comments on Riemann's contributions to differential geometry*, Historia Math. 10 (1) (1983), 84-89.